آنالیز ریاضی

جلد اول

گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

ترجمه

باقر امامی / پرویز شهریاری

MATH75.IR

همهٔ کسانی که رشتهٔ ریاضی دبیرستان را تمام کرده‌اند و بسیاری از آن‌ها که دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران را گذرانده‌اند، با نام باقر امامی، معلم پرقدرت ریاضی و انسان وارسته و آزاده، آشنا هستند.

باقر امامی، درطول زندگی نه‌چندان دراز خود، سال‌های طولانی در دبیرستان‌های تبریز و تهران و، سپس، دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران، شاخه‌های گوناگون ریاضیات را درس می‌داد. درسال‌های ۵۰ هم، علی‌رغم درد مزمن پاها وعلی‌رغم تحمل پی‌آمدهای یك سکتهٔ مغزی، هفته‌ای چند روز را به اراك می‌رفت و در رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم اراك تدریس می‌کرد. کسان بسیاری بودند که شیوهٔ تدریس ریاضی را از او آموختند و، بعدها خود معلمی پرآوازه شدند. من هم از جملهٔ کسانی هستم که در مکتب آموزشی باقر امامی، بسیارچیزها آموختم. او در مورد من هم، مثل موردهای بی‌شماری از هم‌کاران خود، سعهٔ صدر داشت وبه‌سادگی و باآزادگی، تجربه‌های ذی‌قیمت یك عمر معلمی ریاضی را، دراختیارم می‌گذاشت و، ازاین بابت، خود را مدیون اومی‌دانم.

زنده‌یاد باقرامامی، به‌جزتدریس، به‌کار ترجمه و تألیف هم‌علاقه داشت وکتاب‌های پرارزش بسیاری ازخود به‌یادگار گذاشته است. درسال‌هایی هم که ماهنامهٔ «سخن علمی» را منتشرمی‌کردم، یکی ازبهترین همکاران من بود و ترجمه‌های بسیاری از او، دراین ماهنامه به‌یادگارمانده است. درکار تألیف کتاب‌های درسی دبیرستانی، سال‌های متوالی با اوهمکاری داشته‌ام و، به‌همین مناسبت، توانسته‌ام فضل وانسانیت او را، درتجربهٔ زندگی وکار، تا عمق وجودم احساس کنم.

□

زنده‌یاد باقرامامی، درسال‌های آخر زندگی خود، تمامی جلد اول وبخش عمده‌ای ازجلد دوم کتاب حاضر را، ازمتن روسی، ترجمه کرده و دراختیار من گذاشته بود تا با تکمیل آن، این دورهٔ کامل «آنالیز ریاضی» را چاپ و دراختیار علاقه‌مندان بگذاریم.

سنگینی کار چاپ کتاب موجب شد تا بحث مربوط به‌انتشار آن، سال‌ها، وقت من و بسیاری از ناشران را بگیرد و به‌جایی نرسد. امروزکه این کتاب چاپ می‌شود و به‌همت ناشر آن، انتظاری طولانی پایان می‌یابد، دیگر باقر امامی در میان ما نیست تا سرنوشت

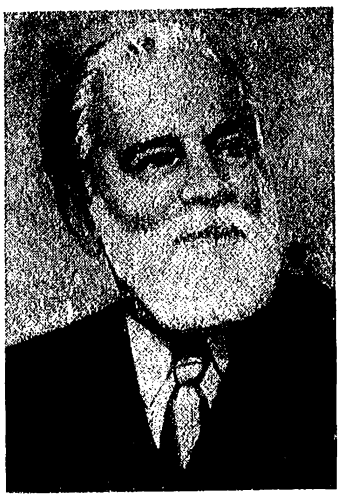
MATH75.IR

تلاش سال‌های آخر زندگی خود را ببینند.

برای یکسان بودن متن ترجمه، ناچار بودم، علاوه بر ترجمهٔ بخش باقی ماندهٔ جلد دوم و تمامی جلد سوم، ترجمهٔ آمادهٔ زنده‌یاد باقر امامی را هم بازنویسی و در بسیاری موردها، از نو ترجمه کنم. این نکته را به‌این خاطر یادآوری کرده‌ام که اگر خوانندهٔ عزیز نقصی در ترجمه بیابد و یا به‌برخی نارسائی‌ها بربخورد، تمامی آن‌ها را به‌حساب من بگذارد.

□

کتاب، اگرچه با روش کلاسیك تنظیم شده و طبعاً به‌برخی از موردهای آنالیز ریاضی جدید نپرداخته است، به علت تسلط و دقت فوق‌العادهٔ مؤلف آن، در ردیف بهترین کتاب در زمینهٔ «آنالیز ریاضی» است. نویسندهٔ کتاب که از سال ۱۹۱۸ تا پایان زندگی خود در



گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس
(۱۹۵۹-۱۸۸۸)

سال ۱۹۵۹ استاد ریاضی در دانشگاه لنین‌گراد بوده است، علاوه بر این کتاب، کتاب دیگری هم به‌نام «مبانی آنالیز ریاضی» (در دوجلد) دارد و خود، یکی از پژوهشگران در زمینهٔ «آنالیز ریاضی» و به‌خصوص نظریه تابع‌های با متغیر حقیقی است.

امیدوارم با چاپ این کتاب، توانسته باشم، دست‌کم، بخشی از دین خود را نسبت به‌زنده‌یاد باقر امامی، ادا کرده باشم.

زمستان ۱۳۶۷
پرویز شهریاری

MATH75.IR

فهرست

مقدمه

عددهای حقیقی

§۱. حوزهٔ عددهای گویا ۱۵
۱. ورود به مطلب ۱۵
۲. مرتب‌کردن عددهای گویا ۱۶
۳. جمع و تفریق عددهای گویا ۱۷
۴. ضرب و تقسیم عددهای گویا ۱۹
۵. اصل ارشمیدس ۲۱
§۲. ورود عددهای گنگ، مرتب‌کردن حوزهٔ عددهای حقیقی ۲۲
۶. تعریف عدد گنگ ۲۲
۷. مرتب‌کردن حوزهٔ عددهای حقیقی ۲۵
۸. گزاره‌های کمکی ۲۶
۹. نمایش عددهای حقیقی به‌کمک کسر دهدهی نامتناهی ۲۷
۱۰. پیوستگی حوزهٔ عددهای حقیقی ۳۰
۱۱. کران‌های مجموعه‌های عددی ۳۲
§۳. عمل‌های حسابی روی عددهای حقیقی ۳۵
۱۲. تعریف مجموع عددهای حقیقی ۳۵
۱۳. ویژگی جمع ۳۶
۱۴. تعریف حاصل‌ضرب عددهای حقیقی ۳۸
۱۵. ویژگی ضرب ۳۹
۱۶. نتیجه ۴۱
۱۷. قدرمطلق‌ها ۴۲
§۴. ویژگی‌ها و کاربردهای دیگر عددهای حقیقی ۴۳
۱۸. وجود ریشه توان با نمای گویا ۴۳
۱۹. توان با هرنمای حقیقی ۴۵

MATH75.IR

۲۰. لگاریتم ۴۷
۲۱. اندازه‌گیری پاره‌خطها ۴۸

فصل اول
نظریهٔ حد

§۱. واریانت و حدآن ۵۲
۲۲. کمیت متغیر واریانت ۵۲
۲۳. حد واریانت ۵۵
۲۴. کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچك ۵۷
۲۵. چند مثال ۵۸
۲۶. چند قضیه دربارهٔ واریانتی‌که دارای حد است ۶۴
۲۷. کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ ۶۶
§۲. قضیه‌های مربوط به‌حد. راههای سادهٔ تعیین حد ۶۸
۲۸. گذر به حد در برابری و نابرابری‌ها ۶۸
۲۹. پیش‌قضیه‌های مربوط به‌بی‌نهایت‌کوچك‌ها ۷۰
۳۰. عمل‌های حساب روی متغیرها ۷۲
۳۱. عبارت‌های مبهم ۷۴
۳۲. مثال‌هایی برای پیدا کردن حد ۷۷
۳۳. قضیه شتولتس و کاربردآن ۸۴
§۳. واریانت یکنوا ۸۸
۳۴. حد واریانت یکنوا ۸۸
۳۵. چند مثال ۹۰
۳۶. عدد e ۹۸
۳۷. محاسبهٔ تقریبی عدد e ۱۰۰
۳۸. پیش‌قضیه دربارهٔ بازه‌های (فاصله‌های) تو درتو ۱۰۳
§۴. اصل تقارب. حدهای جزیی ۱۰۵
۳۹. اصل تقارب ۱۰۵
۴۰. دنباله‌های جزئی و حدهای جزئی ۱۰۸
۴۱. پیش‌قضیهٔ بولزانو ــ ویراشتراس ۱۱۰
۴۲. بزرگترین و کوچکترین حد ۱۱۲

فصل دوم
تابع با یك متغیر

§۱. مفهوم تابع ۱۱۷

۴۳. متغیر و حوزهٔ مقدارهای آن ۱۱۷
۴۴. بستگی تابعی بین متغیرها. مثال‌ها ۱۱۸
۴۵. تعریف مفهوم تابع ۱۱۹
۴۶. روش تحلیلی مشخص کردن تابع ۱۲۲
۴۷. منحنی نمایش تغییر تابع ۱۲۵
۴۸. طبقه‌های مهم تابع‌ها ۱۲۷
۴۹. مفهوم تابع معکوس ۱۳۲
۵۰. تابع‌های معکوس مثلثاتی ۱۳۴
۵۱. انطباق تابع‌ها. یادداشت‌های نهائی ۱۳۹
§۲. حد تابع ۱۴۱
۵۲. تعریف حد تابع ۱۴۱
۵۳. حالت واریانت‌ها ۱۴۳
۵۴. مثال‌ها ۱۴۵
۵۵. گسترش نظریهٔ حد ۱۵۷
۵۶. چند مثال ۱۶۰
۵۷. حد تابع یکنوا ۱۶۴
۵۸. معیار یا نشانهٔ کلی بولزانو ـ کوشی ۱۶۵
۵۹. بزرگترین و کوچکترین حد تابع ۱۶۷
§۳. طبقهٔ‌بندی کمیت‌های بی‌نهایت کوچک و کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ ۱۶۸
۶۰. مقایسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها ۱۶۸
۶۱. مقیاس بی‌نهایت کوچک‌های هم‌ارز ۱۶۹
۶۲. بی‌نهایت کوچک‌های هم‌ارز ۱۷۲
۶۳. جدا کردن بخش اصلی ۱۷۴
۶۴. مسأله‌ها ۱۷۶
۶۵. طبقه‌بندی بی‌نهایت بزرگ‌ها ۱۷۹
§۴. پیوستگی (و ناپیوستگی) تابع‌ها ۱۸۰
۶۶. تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه ۱۸۰
۶۷. عمل‌های حسابی، روی تابع‌های پیوسته ۱۸۳
۶۸. مثال‌های تابع‌های پیوسته ۱۸۳
۶۹. پیوستگی یک‌سوئی. طبقه‌بندی ناپیوستگی‌ها ۱۸۶
۷۰. مثال‌هایی از تابع‌های ناپیوسته ۱۸۷
۷۱. پیوستگی و ناپیوستگی تابع‌های یکنوا ۱۹۱
۷۲. پیوستگی تابع‌های مقدماتی ۱۹۲
۷۳. انطباق تابع‌های پیوسته ۱۹۳

۷۴. حل یك معادلهٔ تابعی ۱۹۴
۷۵. خصوصیت تابعی تابع‌های نمائی، لگاریتمی و توانی ۱۹۶
۷۶. مشخصهٔ تابعی کسینوس‌های مثلثاتی و هذلولی ۱۹۹
۷۷. استفاده از پیوستگی تابع‌ها، برای محاسبهٔ حدها ۲۰۲
۷۸. عبارت توان ــ نمائی ۲۰۶
۷۹. چند مثال ۲۰۸
§۵. ویژگی‌های تابع‌های پیوسته ۲۱۰
۸۰. قضیهٔ مربوط به صفرشدن تابع‌ها ۲۱۰
۸۱. کاربرد در حل معادله‌ها ۲۱۲
۸۲. قضیهٔ مربوط به مقدارهای میانی ۲۱۴
۸۳. وجود تابع معکوس ۲۱۶
۸۴. قضیهٔ مربوط به کران‌دار بودن تابع‌ها ۲۱۸
۸۵. بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع ۲۱۹
۸۶. مفهوم پیوستگی یکنواخت ۲۲۲
۸۷. قضیهٔ کانتور ۲۲۴
۸۸. پیش‌قضیهٔ بورل ۲۲۵
۸۹. اثباتی نو برای قضیه‌های اساسی ۲۲۷

فصل سوم
مشتق‌ها و دیفرانسیل‌ها

§۱. مشتق و محاسبهٔ آن ۲۳۱
۹۰. مسالهٔ محاسبهٔ سرعت حرکت نقطه ۲۳۱
۹۱. مسألهٔ رسم مماس برمنحنی ۲۳۲
۹۲. تعریف مشتق ۲۳۴
۹۳. مثال‌های محاسبه ۲۳۹
۹۴. مشتق تابع معکوس ۲۴۳
۹۵. فهرست دستورهای مشتق ۲۴۵
۹۶. دستور برای نمو تابع‌ها ۲۴۶
۹۷. قانون‌های سادهٔ محاسبه ۲۴۸
۹۸. مشتق تابع مرکب ۲۵۰
۹۹. چند مثال ۲۵۱
۱۰۰. مشتق یك‌طرفه ۲۶۰
۱۰۱. مشتق نامتناهی ۲۶۱
۱۰۲. چند مثال دیگر از حالت‌های خاص ۲۶۳

§۲. دیفرانسیل ۲۶۴
۱۰۳. تعریف دیفرانسیل ۲۶۴
۱۰۴. رابطهٔ بین دیفرانسیل‌پذیری و وجود مشتق ۲۶۶
۱۰۵. دستورهای اساسی و قانون‌های دیفرانسیل‌گیری ۲۶۸
۱۰۶. بی‌تغییری شکل دیفرانسیل ۲۷۰
۱۰۷. دیفرانسیل‌ها، به‌عنوان سرچشمه‌ای برای رابطه‌های تقریبی ۲۷۲
۱۰۸. کاربرد دیفرانسیل در برآورد خطاها ۲۷۵
§۳. قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل ۲۷۸
۱۰۹. قضیهٔ فرما ۲۷۸
۱۱۰. قضیهٔ داربو ۲۸۰
۱۱۱. قضیهٔ رول ۲۸۱
۱۱۲. رابطهٔ لاگرانژ ۲۸۲
۱۱۳. حد مشتق ۲۷۵
۱۱۴. دستور کوشی ۲۸۶
§۴. مشتق‌ها و دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر ۲۸۸
۱۱۵. تعریف مشتق مرتبهٔ بالاتر ۲۸۸
۱۱۶. دستورهای کلی، برای مشتق‌های مرتبهٔ دلخواه ۲۹۰
۱۱۷. دستور لایب‌نیتس ۲۹۵
۱۱۸. مثال‌ها ۲۹۷
۱۱۹. دیفرانسیل‌های مرتبهٔ بالاتر ۳۰۱
۱۲۰. به‌هم‌خوردن بی‌تغییری در شکل، برای دیفرانسیل‌های مرتبهٔ بالا ۳۰۲
۱۲۱. دیفرانسیل‌گیری پارامتری ۳۰۳
۱۲۲. تفاضل‌های محدود ۳۰۵
§۵. دستور تیلور ۳۰۸
۱۲۳. دستور تیلور برای چند جمله‌ای ۳۰۸
۱۲۴. بسط تابع غیرمشخص، جملهٔ متمم به شکل په‌آنو ۳۱۰
۱۲۵. مثال‌ها ۳۱۴
۱۲۶. شکل‌های دیگر جملهٔ متمم ۳۱۹
۱۲۷. دستورهای تقریبی ۳۲۳
§۶. درون‌یابی (انترپولاسیون) ۳۳۰
۱۲۸. ساده‌ترین مسألهٔ درون‌یابی. دستور لاگرانژ ۳۳۰
۱۲۹. جملهٔ متمم دستور لاگرانژ ۳۳۱
۱۳۰. درون‌یابی با گره‌های مکرر. دستور هرمیت ۳۳۳

فصل چهارم
بررسی تابع، به‌کمک مشتق

§۱. مطالعهٔ روند تغییر تابع ۳۳۶
۱۳۱. شرط ثابت بودن تابع ۳۳۶
۱۳۲. شرط یکنوایی تابع ۳۳۸
۱۳۳. اثبات نابرابری ۳۴۲
۱۳۴. ماکزیمم و می‌نیمم. شرط‌های لازم ۳۴۶
۱۳۵. شرط‌های کافی. قاعدهٔ اول ۳۴۸
۱۳۶. چند مثال ۳۵۰
۱۳۷. قاعدهٔ دوم ۳۵۶
۱۳۸. استفاده از مشتق مرتبه‌های بالاتر ۳۵۹
۱۳۹. تعیین مقدارهای حداکثر و حداقل ۳۶۲
۱۴۰. مسأله‌ها ۳۶۴
§۲. تابع‌های محدب (و مقعر) ۳۷۰
۱۴۱. تعریف تحدب یا «برآمدگی» (و تعقر یا «گودی») تابع ۳۷۰
۱۴۲. گزاره‌های ساده مربوط به تابع‌های محدب ۳۷۱
۱۴۳. شرط‌های تحدب تابع ۳۷۴
۱۴۴. نابرابری ین‌سن و کاربرد آن ۳۷۷
۱۴۵. نقطهٔ عطف ۳۸۰
§۳. رسم نمودار تابع‌ها ۳۸۲
۱۴۶. طرح مسأله ۳۸۲
۱۴۷. شمای رسم نمودار. مثال‌ها ۳۸۳
۱۴۸. ناپیوستگی‌های نامتناهی، بازهٔ نامتناهی، مجانب‌ها ۳۸۶
۱۴۹. چند مثال ۳۹۰
§۴. رفع ابهام ۳۹۵
۱۵۰. ابهام به‌صورت $\frac{0}{0}$ ۳۹۵
۱۵۱. ابهام به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ ۴۰۲
۱۵۲. صورت‌های دیگر ابهام ۴۰۵
§۵. حل تقریبی معادله‌ها ۴۰۸
۱۵۳. ملاحظه‌های مقدماتی ۴۰۸
۱۵۴. قاعدهٔ بخش‌های متناسب (روش وترها) ۴۰۹
۱۵۵. قاعدهٔ نیوتون (روش مماس‌ها) ۴۱۴
۱۵۶. مثال‌ها و تمرین‌ها ۴۱۷

۱۵۷. روش ترکیبی ۴۲۳
۱۵۸. مثال‌ها و تمرین‌ها ۴۲۴

فصل پنجم
تابع‌های با چند متغیر

§۱. مفهوم‌های اساسی ۴۳۰
۱۵۹. بستگی تابعی بین متغیرها. مثال‌ها ۴۳۰
۱۶۰. تابع‌های با دومتغیر وحوزهٔ تعریف آن‌ها ۴۳۱
۱۶۱. فضای حسابی n بعدی ۴۳۵
۱۶۲. مثال‌های حوزه، درفضای n بعدی ۴۳۸
۱۶۳. تعریف کلی حوزهٔ بازوبسته ۴۴۱
۱۶۴. تابع با n متغیر ۴۴۴
۱۶۵. حد تابع با چند متغیر ۴۴۵
۱۶۶. حالت واریانت‌ها ۴۴۸
۱۶۷. مثال‌ها ۴۵۰
۱۶۸. حدهای تکراری ۴۵۲
§۲. تابع‌های پیوسته ۴۵۵
۱۶۹. پیوستگی وناپیوستگی تابع‌های با چند متغیر ۴۵۵
۱۷۰. عمل روی تابع‌های پیوسته ۴۵۸
۱۷۱. تابع پیوسته درحوزه. قضیهٔ بولزانو-کوشی ۴۵۹
۱۷۲. پیش قضیهٔ بولزانو-ویرشتراس ۴۶۱
۱۷۳. قضیهٔ ویرشتراس ۴۶۳
۱۷۴. پیوستگی یکنوا (مونوتون) ۴۶۵
۱۷۵. پیش قضیهٔ بورل ۴۶۷
۱۷۶. اثباتی تازه ازقضیه‌های اساسی ۴۶۸
§۳. مشتق و دیفرانسیل تابع‌های چند متغیره ۴۷۰
۱۷۷. مشتق جزئی و دیفرانسیل جزئی ۴۷۰
۱۷۸. نمو کامل تابع ۴۷۴
۱۷۹. دیفرانسیل کامل ۴۷۸
۱۸۰. تعبیرهندسی، برای حالت تابع با دومتغیر ۴۸۰
۱۸۱. مشتق تابع مرکب ۴۸۴
۱۸۲. مثال‌ها ۴۸۵
۱۸۳. دستور نموهای محدود ۴۸۹
۱۸۴. مشتق درجهت مفروض ۴۹۰

۱۸۵. بی‌تغییری شکل دیفرانسیل (اول) ۴۹۴
۱۸۶. کاربرد دیفرانسیل کامل درمحاسبه‌های تقریبی ۴۹۶
۱۸۷. تابع‌های همگن ۴۹۹
§۴. مشتق‌ها و دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر ۵۰۳
۱۸۹. مشتق مرتبه‌های بالاتر ۵۰۳
۱۹۰. قضیهٔ مربوط به‌مشتق‌های مختلط ۵۰۶
۱۹۱. تعمیم ۵۱۰
۱۹۲. مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر ازتابع‌های مرکب ۵۱۲
۱۹۳. دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر ۵۱۳
۱۹۴. دیفرانسیل تابع‌های مرکب ۵۱۷
۱۹۵. رابطهٔ تیلور ۵۱۹
§۵. اکسترمم‌ها. مقدارهای حداکثروحداقل ۵۲۲
۱۹۶. اکسترمم‌های تابع با چند متغیر. شرط‌های لازم ۵۲۲
۱۹۷. شرط‌های‌کافی (حالت تابع با دو متغیر) ۵۲۴
۱۹۸. شرط‌های‌کافی (حالت کلی) ۵۲۹
۱۹۹. شرط‌های عدم وجود اکسترمم ۵۳۲
۲۰۰. بیشترین و کمترین مقدارتابع. مثال‌ها ۵۳۴
۲۰۱. مسأله‌ها ۵۴۰

فصل ششم
دترمینان‌های تابعی وکاربردآن‌ها

§۱. ویژگی‌های صوری دترمینان‌های تابعی ۵۵۴
۲۰۲. تعریف دترمینان تابعی (ژاکوبین) ۵۵۴
۲۰۳. ضریب ژاکوبین‌ها ۵۵۵
۲۰۴. ضرب ماتریس‌های تابعی (ماتریس ژاکوبی) ۵۵۸
§۲. تابع‌های ضمنی ۵۶۱
۲۰۵. مفهوم تابع ضمنی با یك متغیر ۵۶۱
۲۰۶. وجود تابع ضمنی ۵۶۴
۲۰۷. مشتق‌پذیری تابع ضمنی ۵۶۶
۲۰۸. تابع ضمنی از چند متغیر ۵۷۵
۲۰۹. محاسبهٔ مشتق تابع‌های ضمنی ۵۷۶
۲۱۰. مثال‌ها ۵۸۰
§۳. برخی‌کاربردهای نظریهٔ تابع‌های ضمنی ۵۸۶
۲۱۱. اکسترمم‌های نسبی ۵۸۶

۲۱۲. روش ضریب‌های نامعین لاگرانژ ۵۹۰
۲۱۳. شرط‌های کافی، برای اکسترمم نسبی ۵۹۱
۲۱۴. مثال‌ها ومسأله‌ها ۵۹۳
۲۱۵. مفهوم استقلال تابع‌ها ۶۰۰
۲۱۶. مرتبهٔ ماتریش ژاکوبی ۶۰۲
§۴. تغییرمتغیرها ۶۰۷
۲۱۷. تابع با یك متغیر ۶۰۷
۲۱۸. مثال‌ها ۶۱۱
۲۱۹. تابع‌های با چند متغیر. تغییرمتغیرهای مستقل ۶۱۴
۲۲۰. روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌ها ۶۱۷
۲۲۱. حالت کلی تغییرمتغیرها ۶۱۹
۲۲۲. مثال‌ها ۶۲۲

فصل هفتم
کاربرد محاسبهٔ دیفرانسیلی در هندسه

§۱. نمایش تحلیلی منحنی‌ها و سطح‌ها ۶۳۷
۲۲۳. منحنی‌ها برصفحه (در دستگاه مختصات قائم) ۶۳۷
۲۲۴. مثال‌ها ۶۴۰
۲۲۵. منحنی‌هایی که سرچشمهٔ مکانیکی دارند ۶۴۴
۲۲۶. منحنی‌هایی واقع برصفحهٔ (درمختصات قطبی) مثال‌ها ۶۴۹
۲۲۷. سطح ومنحنی درفضا ۶۵۵
۲۲۸. نمایش پارامتری ۶۵۷
۲۲۹. مثال‌ها ۶۵۹
§۲. خط مماس وصفحهٔ مماس ۶۶۴
۲۳۰. مماس برمنحنی مسطح درمختصات قائم ۶۶۴
۲۳۱. مثال‌ها ۶۶۶
۲۳۲. مماس درمختصات قطبی ۶۷۰
۲۳۳. مثال‌ها ۶۷۱
۲۳۴. مماس برمنحنی فضائی. صفحهٔ مماس برسطح ۶۷۳
۲۳۵. مثال‌ها ۶۷۸
۲۳۶. نقطه‌های خاص منحنی‌های مسطح ۶۷۹
۲۳۷. حالت نمایش پارامتری منحنی ۶۸۵
§۳. منحنی‌های مماس برهم ۶۸۸
۲۳۸. پوش خانوادهٔ منحنی‌ها ۶۸۸

۲۳۹. مثال‌ها ۶۹۲
۲۴۰. نقطه‌های مفسر ۶۹۴
۲۴۱. مرتبهٔ تماس دومنحنی ۶۹۸
۲۴۲. حالتی‌که، یکی ازمنحنی‌ها، به‌صورت ضمنی باشد ۷۰۱
۲۴۳. منحنی بوسان ۷۰۳
۲۴۴. راه دیگری برای رسیدن به‌منحنی‌های بوسان ۷۰۵
§۴. طول منحنی مسطح ۷۰۷
۲۴۵. پیش قضیه‌ها ۷۰۷
۲۴۶. جهت برروی منحنی ۷۰۸
۲۴۷. طول منحنی. جمع‌پذیری طول‌کمان ۷۱۰
۲۴۸. شرط‌های کافی راستاپذیری. دیفرانسیل‌کمان ۷۱۲
۲۴۹. کمان درنقش پارامترجهت مثبت مماس ۷۱۶
§۵. انحنای منحنی‌های مسطح ۷۲۰
۲۵۰. مفهوم انحنا (میزان خمیدگی) ۷۲۰
۲۵۱. دایرهٔ انحنا وشعاع انحنا ۷۲۴
۲۵۲. مثال‌ها ۷۲۶
۲۵۳. مختصات مرکز انحنا ۷۳۲
۲۵۴. گسترده و گسترنده. جست وجوی گسترنده ۷۳۴
۲۵۵. ویژگی‌های گسترده و گسترنده ۷۳۸
۲۵۶. جست‌وجوی گسترده ۷۴۲

ضمیمه

مسألهٔ گسترش تابع‌ها

۲۵۷. حالت تابع با یك متغیر ۷۴۵
۲۵۸. طرح مسأله، برای حالت دوبعدی ۷۴۷
۲۵۹. گزاره‌های کمکی ۷۴۹
۲۶۰. قضیهٔ اساسی مربوط بدگسترش ۷۵۳
۲۶۱. تعمیم ۷۵۴
۲۶۲. ملاحظه‌های نهایی ۷۵۶

MATH75.IR

مقدمه

عددهای حقیقی

§۱. حوزهٔ عددهای گویا

۱. ورود به‌مطلب. خواننده از دورهٔ دبیرستانی، با عددهای گویا و ویژگی‌های آن‌ها آشنایی دارد. حتی در آن زمان هم، لزوم گسترش این حوزهٔ عددی، برای ریاضیات مقدماتی، احساس می‌شد. در واقع، حتی بسیاری از ریشه‌های عددهای درست و مثبت (عددهای طبیعی) را هم نمی‌توان درمیان عددهای گویا پیدا کرد. مثلاً $\sqrt{۲}$ از این گونه است، یعنی عددی گویا مثل $\frac{p}{q}$ (p و q عددهای طبیعی‌اند) پیدا نمی‌شود به‌نحوی که مجذور آن برابر ۲ باشد.

برای اثبات این حکم، از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید کسر $\frac{p}{q}$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\left(\frac{p}{q}\right)^{۲} = ۲$. این کسر را ساده‌نشدنی در نظر می‌گیریم، یعنی بین p و q عامل مشترکی وجود نداشته باشد. از تساوی $p^{۲} = ۲q^{۲}$ نتیجه می‌شود که p عددی است زوج: $p = ۲r$ (r عددی است درست) و ، بنابراین، q باید عدی فرد باشد. به جای p مقدارش را قرار می‌دهیم، به تساوی $q^{۲} = ۲r^{۲}$ می‌رسیم که به معنای زوج بودن عدد q است. تناقضی که پیدا می‌شود، درستی حکم بالا را روشن می‌کند.

اگر به حوزهٔ عددهای گویا اکتفا کنیم، در هندسه هم نمی‌توانیم درازای همهٔ پاره‌خطها را مشخص کنیم. در واقع، اگر مربعی به‌ضلع واحد انتخاب کنیم، طول قطر آن، با عدد گویایی مثل $\frac{p}{q}$ قابل بیان نیست، زیرا بنا به قضیهٔ فیثاغورث، مجذور این درازا باید برابر ۲ باشد و دیدیم که چنین چیزی ممکن نیست.

دراین‌مقدمه، دربارهٔ گسترش حوزهٔ عددهای گویا و الحاق عددهای گنگ (که طبیعتی تازه دارند) به‌آن، گفت‌وگو می‌کنیم. ضمناً ثابت می‌کنیم که در این حوزهٔ گسترده، همهٔ ویژگی‌های عادی عددهای گویا، که مربوط به‌عمل‌های حسابی و به‌کار بردن علامت‌های برابری و نابرابری است، به‌قوت خود باقی می‌مانند. برای این‌که امکان عملی تحقیق این ویژگی‌ها، در مورد حوزهٔ عددی جدید، وجود داشته باشد، مهم این است که بتوانیم آن ویژگی‌های بنیادی را تشخیص دهیم که همهٔ ویژگی‌های دیگر نتیجهٔ منطقی آن‌ها باشند. دراین‌صورت، تحقیق لازم تنها روی این ویژگی‌های بنیادی انجام می‌گیرد.

به‌همین مناسبت، در این‌جا، ابتدا ویژگی‌های بنیادی حوزهٔ عددهای گویا را برمی‌شماریم و ضمن مثال‌هایی نشان می‌دهیم که ویژگی‌های دیگر این عددها، ناشی از همین ویژگی‌های بنیادی است. در این‌جا، هروقت از «عدد» صحبت می‌کنیم، منظورمان عدد گویا است و حرف‌های a، b، ... را برای آن‌ها به‌کار می‌بریم.

۲. مرتب‌کردن عددهای گویا. ازهمان ابتدا قرار می‌گذاریم که عددهای برابر، یعنی یک‌عدد که به‌صورت‌های مختلف نشان داده شده باشد. به‌زبان دیگر، «برابری» ($=$) را به‌معنای «اتحاد» می‌گیریم و، به‌همین مناسبت، صحبتی از ویژگی‌های عددهای برابر نمی‌کنیم.

عددهای گویا را می‌توان به‌کمک مفهوم «بزرگتر است از» ($>$) مرتب کرد. گروه اول ویژگی‌ها، به‌همین مفهوم مربوط است:

I. ۱°. برای هر دوعدد a و b، یکی وتنها یکی ازاین رابطه‌ها برقرار است

$$a=b, \qquad a>b, \qquad b>a$$

I. ۲°. از $a>b$ و $b>c$ نتیجه می‌شود: $a>c$ (ویژگی سرایت‌پذیری برای نشانهٔ $>$)؛

I. ۳°. اگر $a>b$، آنگاه عددی مانند c پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$a>c \quad \text{و} \quad c>b^* \qquad \text{(ویژگی فشردگی)}$$

مفهوم «کوچکتر است از» ($<$)، یك مفهوم نتیجه‌ای است. یعنی وقتی وتنها وقتی گویند $a<b$، که داشته باشیم $a>b$. به‌سادگی دیده می‌شود که از $a<b$ و $b<c$ نتیجه می‌شود $a<c$ (ویژگی سرایت‌پذیری در نشانهٔ $<$). در واقع، نابرابری‌های $a<b$ و $b<c$، با نابرابری‌های $a>b$ و $c>b$ هم ارزند که از آن‌جا نابرابری $a<c$ (I. ۲°) و یا هم‌ارز آن $a<c$ نتیجه می‌شود.

*) با این‌شرط، گویند عدد c بین دوعدد a و b قرار دارد. روشن است که این‌گونه‌عددها، یك مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

ویژگی‌های بعدی مفهوم «بزرگتر است از»، که مربوط به انجام عمل‌های حسابی روی عددهای گویا است، در زیر شرح داده شده است.

۳. جمع و تفریق عددهای گویا. گروه دوم ویژگی‌ها مربوط به جمع است، یعنی پیدا کردن مجموع دو عدد.

برای هر دوعدد a و b، عدد منحصر به‌فردی وجود دارد که مجموع a و b نامیده می‌شود (و آن را به‌صورت $a+b$ نشان می‌دهند). این مفهوم، چند ویژگی دارد:

II. ۱. $a+b=b+a$ (ویژگی جابه‌جایی جمع)،

II. ۲. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ویژگی شرکت‌پذیری جمع).

نقش خاص صفر، با این ویژگی معلوم می‌شود:

II. ۳. $a+0=a$.

علاوه بر آن

II. ۴. برای هرعدد a، عدد $-a$ (قرینهٔ a) وجود دارد، به‌نحوی که $a+(-a)=0$.

براساس این ویژگی‌ها، قبل از هرچیز، پرسش مربوط به‌تفریق پیش می‌آید که به‌عنوان عکس عمل جمع، در نظر گرفته می‌شود. تفاضل عددهای a و b را عدد c می‌نامیم، به‌شرطی که برای آن داشته باشیم: $c+b=a$*. پرسش مربوط به‌منحصر به‌فرد بودن این عدد مطرح می‌شود.

فرض می‌کنیم $c=a+(-b)$، به‌دست می‌آید [II. ۲، ۱، ۴، ۳]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=$$

$$=a+[b+(-b)]=a+0=a$$

می‌بینیم که این عدد c، در تعریف تفاضل صدق می‌کند.

برعکس فرض کنید c' تفاضل عددهای a و b باشد، به نحوی که $c'+b=a$. به دوطرف این تساوی $(-b)$ را اضافه وسمت‌چپ برابری را تبدیل می‌کنیم[II. ۲، ۴، ۳]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c'$$

و نتیجه می‌گیریم: $c'=a+(-b)=c$.

به‌این‌ترتیب، منحصر به‌فرد بودن تفاضل عددهای a و b ثابت شد. این تفاضل را با $a-b$ نشان می‌دهند.

از منحصر به‌فرد بودن تفاضل، نتیجه‌های چندی به‌دست می‌آید. قبل ازهمه، از

---

*) بنابر II. ۱، این برابری را، که معرف تفاضل است، می‌توان به‌صورت $a=c+b$هم نوشت.

II.۳.۰، نتیجه می‌شود $a-a=0$ و ، از این‌جا، نتیجه می‌شود که، به جز ۰، عدد دیگری وجود ندارد که خاصیتی شبیه II.۳.۰ داشته باشد. سپس، از همین‌جا نتیجه می‌شود که قرینهٔ هر عدد مفروض، منحصر به‌فرد است: $a-a=0$.

از آن‌جا که $-(-a)+a=0$. نتیجه می‌شود $-(-a)=a$ و معلوم [II.۱.۰] می‌شود که $-(-a)=a$، یعنی عددهای a و $-a$، متقابلاً قرینهٔ یکدیگرند . ویژگی زیر هم، برای عددهای قرینه وجود دارد:

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

که برای اطمینان از درستی آن، کافی است ثابت کنیم:

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0$$

که به‌سادگی و از II.۱.۰، ۲.۰، ۴.۰، ۳.۰ نتیجه می‌شود.

سرانجام، از خاصیتی نام می‌بریم که مربوط به‌علامت $>$ و علامت جمع است.

II.۵.۰. از $a>b$ نتیجه می‌شود $a+c>b+c$.

این نابرابری از آن‌جا به‌دست آمده است که به‌دوطرف نابرابری خود، یک‌مقدار افزوده‌ایم، و به‌کمک آن، هم‌ارزی نابرابری‌های زیر ثابت می‌شود:

$$a-b>0 \quad و \quad a>b$$

سپس، از $a>b$ نتیجه‌می‌شود $-a<-b$. در واقع، $a>b$ را می‌توان به‌صورت $a-b>0$ نوشت، ولی

$$a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=$$
$$=(-b)-(-a)$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری $a-b>0$ به‌صورت $(-b)-(-a)>0$ درمی‌آید، که از آن‌جا $-b>-a$ یا $-a<-b$ به‌دست می‌آید.

درحالت خاص، از $a>0$ نتیجه می‌شود $-a<0$ و از $a<0$ نتیجه می‌شود $-a>0$. باشرط $a\neq 0$، از دوعدد a و $-a$، که متقابلاً قرینهٔ یکدیگرند، یکی (وتنها یکی) بزرگتر از ۰ است که آن را قدرمطلق عدد a یا $-a$ گویند و بااین علامت نشان می‌دهند:

$$|a|=|-a|$$

قدرمطلق عدد صفر، برابر صفر است: $|0|=0$.

از ویژگی I۱.۵° می‌توان جمع جمله به جملهٔ نابرابری‌ها را نتیجه گرفت: از $a>b$ و $c>d$ نتیجه می‌شود $a+c>b+d$. در واقع، از $a>b$ نتیجه می‌شود $a+c>b+c$. به‌نوبهٔ خود از $c>d$ نتیجه می‌شود $c+b>d+b$، یا [I۱.۲°] $b+c>b+d$، آنگاه بنابر I۱.۱°، سرانجام نتیجه می‌شود $a+c>b+d$.

۴. ضرب و تقسیم عددهای گویا. گروه سوم ویژگی‌ها، مربوط به ضرب است، یعنی پیدا کردن حاصل‌ضرب دو عدد. برای هر دو عدد a و b، عدد منحصر به فردی وجود دارد که حاصل‌ضرب a و b نامیده می‌شود (و به صورت $a.b$ یا به طور ساده ab نوشته می‌شود). این مفهوم نیز دارای چند ویژگی است:

III۱.۱° $ab=ba$ (ویژگی جابه‌جایی ضرب).

III۱.۲° $(ab)c=a(bc)$ (ویژگی شرکت‌پذیری ضرب)،

نقش خاص واحد، با این ویژگی معلوم می‌شود:

III۱.۳° $a.۱=a$،

و علاوه بر آن

III۱.۴° به‌ازای هر عدد غیر صفر a، عدد $\frac{۱}{a}$ (عکس آن) وجود دارد، به نحوی که

$$a.\frac{۱}{a}=۱.$$

همان‌طور که پرسش مربوط به تفریق، براساس ویژگی‌های جمع حل شد، پرسش مربوط به تقسیم هم، به‌عنوان عکس عمل ضرب و براساس ویژگی‌های ضرب، حل می‌شود. عدد عکس در این‌جا، همان نقش عدد قرینه را در عمل جمع دارد.

عددی مانند c را خارج‌قسمت دو عدد a و b می‌نامیم (مقسوم‌علیه b همیشه مخالف صفر فرض می‌شود)، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$c.b=a^{*}$$

این تعریف را می‌توان به صورت $c=a.\frac{۱}{b}$ نوشت، زیرا [III۱.۲°، III۱.۱°، III۱.۴°، III۱.۳°]:

$$c.b=\left(a.\frac{۱}{b}\right).b=a.\left(\frac{۱}{b}.b\right)=a.\left(b.\frac{۱}{b}\right)=a.۱=a$$

---

*) بنابر III۱.۱°، این برابری را، که خارج‌قسمت را تعیین می‌کند، می‌توان به‌صورت $b.c=a$ نوشت.

به‌عکس، اگر عدد c' در تعریف خارج قسمت عددهای a و b صدق کند، به‌نحوی که $c'.b=a$، دراین‌صورت، با ضرب دو طرف این برابری در $\frac{1}{b}$ و تبدیل سمت‌چپ آن [III. ۲°، ۴°، ۳°]

$$(c'.b).\frac{1}{b}=c'.\left(b.\frac{1}{b}\right)=c'.1=c'$$

به دست می‌آید: $c'=a.\frac{1}{b}=c$.

به‌این ترتیب، منحصر به‌فرد بودن خارج قسمت عددهای a و b ثابت شد (با شرط $b\neq 0$). این خارج‌قسمت را به‌صورت $a:b$ یا $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهیم.

از منحصر به‌فردبودن خارج‌قسمت نتیجه می‌شود که به‌جز واحد، عدد دیگری وجود ندارد که خاصیتی شبیه ویژگی III. ۳° داشته باشد. از همین‌جا، منحصر بودن عکس یك عدد (به‌عنوان خارج‌قسمت ۱ بر a) نتیجه می‌شود. علاوه بر آن، به سادگی معلوم می‌شود که عددهای a و $\frac{1}{a}$ متقابلاً عکس یکدیگرند.

ویژگی زیر، به هر دو عمل بنیادی حساب ــ جمع و ضرب ــ مربوط می‌شود:

III. ۵°. $(a+b).c=a.c+b.c$ (ویژگی پخشی ضرب نسبت به جمع).

از این‌جا، به‌سادگی می‌توان ویژگی پخشی ضرب را نسبت به‌تفریق، نتیجه گرفت:

$$(a-b).c=a.c-b.c$$

بنا به تعریف تفریق، این ویژگی، به‌طور مستقیم، از این‌جا ناشی می‌شود که

$$(a-b).c+b.c=[(a-b)+b].c=a.c$$

همچنین، با به‌کاربردن ویژگی III. ۵° ثابت می‌شود که

$$b.0=0.b=0$$

در واقع [II. ۳°]

$$a+0=a,\quad (a+0).b+a.b+0.b=a.b$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود $0.b=0$ و همچنین [III. ۱°] $b.0=0$.

برعکس، اگر $a.b=0$ و $b\neq 0$، دراین صورت لازم است که $a=0$، زیرا

$a=\frac{\circ}{b}$ و درعین‌حال $\frac{\circ}{b}=\circ$ (زیرا $b.\circ=\circ$) وخارج‌قسمت منحصر به‌فرد است.

بالاخره، ازیك‌ویژگی‌صحبت‌می‌کنیم که به‌علامت $<$ وعلامت‌ضرب مربوط‌می‌شود:

III. ۶°. از $a<b$ و $c>\circ$ نتیجه می‌شود: $a.c<b.c$.

ضرب جمله به‌جملهٔ دو نابرابری، شامل عددهای مثبت، در یکدیگر، نیز به‌همین ویژگی مربوط است. ازهمین‌جا معلوم می‌شود که اگر $a>\circ$ و $b>\circ$، آنگاه $a.b>\circ$.

یادآوری می‌کنیم که $(a.b)=-(a).b$، و آن از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$a.b+(-a).b=[a+(-a).b]=\circ.b=\circ$$

حالا، به‌سادگی‌دیده می‌شود. که اگر $a<\circ$ و $b>\circ$، به‌نحوی که $a=-|a|$ و $b=|b|$، آن‌گاه

$$a.b=(-|a|).|b|=-(|a|.|b|)<\circ$$

درحالتی‌که $a<\circ$ و $b<\circ$، وضع به‌همان‌صورت‌است. اگرداشته‌باشیم $a<\circ$ و $b<\circ$. آن‌گاه

$$a.b=-[-|a|).|b|]=|a|.|b|>\circ$$

به‌این‌ترتیب، قانون‌علامت‌ها را درمورد ضرب، به‌طورکامل‌ثابت‌کردیم. این‌قانون، نتیجهٔ منطقی ویژگی‌های عددهای گویا (که نام برده‌ایم) هستند. به‌زبان دیگر، اگربخواهیم ویژگی‌های نامبرده را رعایت‌کنیم، قانون علامت‌ها جبراً به‌ما تحمیل می‌شود. همین مطلب را، درمورد قانون ضرب درصفر هم می‌توان گفت (که دربالا، آن را روشن‌کردیم).

حالا، با در دست داشتن ویژگی‌های جمع وضرب، می‌توانیم ویژگی فشردگی عددهای‌گویا را ثابت‌کنیم، که آن را قبلاً در ردیف ویژگی‌های بنیادی [۳.I°] قرار دادیم. به‌خصوص، به‌کمك آن‌ها می‌توان ثابت کرد که مثلاً از $a<b$ نتیجه می‌شود:

$$a<\frac{a+b}{۲}<b.$$

۵. اصل ارشمیدس. به‌ویژگی‌های بنیادی، که دربارهٔ عددهای گویا ذکر کردیم، حکم ساده و مهم زیر را، که از ویژگی‌های نامبرده نتیجه نمی‌شود، اضافه می‌کنیم:

IV.۱۰°. $c>\circ$ هر عددی باشد، عددطبیعی n وجود دارد به‌نحوی‌که از c بزرگتر باشد (اصل ارشمیدس).

در واقع، ارشمیدس، این اصل را به‌صورت هندسی بیان می‌کند:

اگر روی خط راست، دو پاره خط دلخواه A و B داده شده باشند، می‌توان A را آن قدر تکرارکردکه مجموع آن‌ها از B بزرگتر شود:

$$\underbrace{A+A+\cdots+A}_{n \text{ مرتبه}}=n\cdot A>B$$

اگر این‌حکم را، برای عددهای مثبت a و b بازنویسی کنیم، منجر به‌این می‌شود که: عدد طبیعی n وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ مرتبه}}=a\cdot n>b$$

که با توجه به ویژگی‌های عددهای گویا، این نابرابری با نابرابری $n>\frac{b}{a}$ هم‌ارزاست و اگر $\frac{b}{a}$ را برابره C بگیریم، همان‌چیزی به‌دست می‌آید که به‌نام اصل ارشمیدس تنظیم کردیم.

§۲. ورود عددهای گنگ. مرتب‌کردن حوزهٔ عددهای حقیقی

۶. تعریف عددگنگ. مجموعهٔ عددهای گویا را، باهمه ویژگی‌هایی که در§۱ برای آن برشمردیم، معلوم می‌گیریم.

نظریهٔ عددهای گنگ را، بنابرتعریف ددکیند (*R.Dedekind*) می‌آوریم. اساس این نظریه، بر مفهوم برش، در حوزهٔ عددهای گویا قرارگرفته است. مجموعهٔ همهٔعددهای گویا را، به دومجموعهٔ غیرتهی A و A' تقسیم می‌کنیم (یعنی، هر یك از دو مجموعهٔ A و A'، دست‌کم،شامل یك‌عدد گویا باشد). این تقسیم را، یك‌برش می‌نامیم، وقتی‌که دوشرط زیر برقرار باشد:

۱°. هر عدد گویا، دریکی و تنها یکی ازمجموعه‌های A یا A' قرارگیرد*،

۲°. هرعدد a از مجموعهٔ A، کوچکتر از هرعدد a' از مجموعهٔ A' باشد.

مجموعهٔ A را طبقهٔ پائین برش و مجموعهٔ A' را طبقهٔ بالای آن گویند. برش را به‌صورت $A\backslash A'$ نشان می‌دهند.

ازتعریف برش نتیجه می‌شود که، اگر a متعلق بـه طبقهٔ پایین باشد، هرعددگویای کوچکتر از a نیز، متعلق بـه‌طبقهٔ پایین است. به‌همین‌ترتیب، اگر a' متعلق بـه طبقهٔ بالا

*) این وضع،که هرعددگویا، تنها دریکی از دوطبقه قرارگیرد، ازشرط ۲° هم نتیجه می‌شود.

باشد، هرعدد گویای بزرگتر از a' نیز، متعلق به‌طبقهٔ بالا خواهد بود.

مثال ۱. A را مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای a می‌گیریم که در نابرابری $a<۱$ صدق کنند، ومجموعهٔ A' را همهٔ عددهای گویا a' که درنابرابری $a'\geqslant ۱$ صادق باشند.

به‌سادگی دیده می‌شود که، به‌این‌ترتیب، یك‌برش به‌دست می‌آید. عدد ۱ به‌طبقهٔ A' تعلق دارد و روشن است که کوچکترین عدد دراین طبقه است، از طرف دیگر روشن‌است که درطبقهٔ A، بزرگترین عدد وجود ندارد، زیرا اگر عددی مانند a از A انتخاب کنیم، همیشه می‌توان عدد گویایی مانند $a_۱$ پیدا کرد که بین a و ۱ واقع باشد. بنابراین، $a_۱$ بزرگتراز a و، ضمناً، متعلق به‌طبقهٔ A است

مثال ۲. درطبقهٔ پایین A، همهٔ عددهای گویای a را که کوچکتر یا برابر ۱ باشند $(a\leqslant ۱)$، و در طبقهٔ بالا، همهٔ عددهای گویای a' را که بزرگتر از ۱ باشند $(a'>۱)$ قرار می‌دهیم.

این‌هم، یك‌برش‌است. درطبقهٔ بالا، کوچکترین عدد وجود ندارد، ولی درطبقهٔ پایین، بزرگترین عدد وجود دارد (عدد ۱).

مثال ۳. درطبقهٔ A، همهٔ عددهای مثبت a، که به‌ازای آن‌ها $a^۲<۲$ و، ضمناً، عدد صفر وهمهٔ عددهای‌منفی را؛ و درطبقهٔ A'، همهٔ عددهای مثبت a' که برای‌آن‌ها $a'^۲>۲$ است، قرار می‌دهیم.

به‌سادگی روشن می‌شود که دراین‌حالت، بازهم یك برش داریم. در این‌جا، در طبقهٔ A بزرگترین عدد و در طبقهٔ A' کوچکترین عدد، وجود ندارد. به‌عنوان نمونه، حکم اول را ثابت می‌کنیم (اثبات حکم دوم هم، شبیه‌آن است). a را عدد مثبتی ازطبقهٔ A می‌گیریم، دراین صورت داریم: $a^۲<۲$. ثابت می‌کنیم که می‌توان عدد مثبتی مانند n پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\left(a+\frac{۱}{n}\right)^۲<۲$$

که، دراین‌صورت، عدد $a+\frac{۱}{n}$ هم متعلق به‌طبقهٔ A خواهد بود.

این نابرابری، هم‌ارز نابرابری زیر است:

$$a^۲+\frac{۲a}{n}+\frac{۱}{n^۲}<۲ \Rightarrow \frac{۲a}{n}+\frac{۱}{n^۲}<۲-a^۲$$

روشن است که اگر n در نابرابری $\frac{۲a+۱}{n}<۲-a^۲$ صدق کند، نابرابری‌موردنظرهم،

قطعاً برقرار خواهد بود؛ و برای این منظور، کافی است داشته باشیم:

$$n > \frac{۲a+۱}{۲-a^۲}$$

وچنین انتخابی برای n، همیشه ممکن است [بنا بر «اصل ارشمیدس»، IV.۱۰°]. به‌این ترتیب، اگر عدد مثبت a را ازطبقهٔ A انتخاب کنیم، همیشه می‌توان عددی بزرگتر از a، درهمین طبقه، پیدا کرد؛ وچون این حکم برای $a<۰$ هم روشن است، بنابراین، هیچ عددی نمی‌تواند بزرگترین عدد درطبقهٔ A باشد.

به‌سادگی می‌توان فهمید که اگر هم درطبقهٔ پایین بزرگترین عدد $a_۰$ و هم درطبقهٔ بالا کوچکترین عدد $a'_۰$ وجود داشته باشد، یك برش تعریف نمی‌شود. فرض کنیم، چنین برشی وجود داشته باشد، بنابرقانون فشردگی حوزهٔ عددهای گویا [I.۳۰°]، عدد گویایی مانند c می‌توان پیدا کرد که بین $a_۰$ و $a'_۰$ باشد: $a_۰<c<a'_۰$. عدد c نمی‌تواند متعلق به طبقهٔ A باشد، زیرا دراین‌صورت، $a_۰$ بزرگترین عدد این‌طبقه نخواهد بود. به‌همین‌ترتیب، عدد c متعلق به‌طبقهٔ A' هم نمی‌تواند باشد. و این امر، با ویژگی ۱° از تعریف برش، متناقض است.

بنابراین، برش می‌تواند تنها به یکی از صورت‌هایی باشدکه در مثال‌های ۱، ۲ و ۳ آوردیم:

۱) درطبقهٔ پایین A، بزرگترین عدد وجود ندارد، ولی درطبقهٔ بالای A'، کوچکترین عدد وجود دارد؛

۲) درطبقهٔ پایین A، بزرگترین عدد وجود دارد، ولی درطبقهٔ بالای A' کوچکترین عدد وجود ندارد؛

۳) بزرگترین عدد برای طبقهٔ پایین و کوچکترین عدد برای طبقهٔ بالا وجود ندارد.

در دو حالت اول گوییم، برش منجر به‌عدد گویای r می‌شود (که مرز بین دو طبقهٔ A و A' است)؛ دراین‌صورت، گوییم که برش، عدد گویای r را تعریف می‌کند. درمثال‌های ۱ و ۲، این عدد r برابر ۱ است. درحالت سوم، چنین عدد مرزی وجود ندارد: برش هیچ عدد گویایی را تعریف نمی‌کند. دراین‌جاست که به‌عددهای تازه‌ای می‌رسیم: عددهای گنگ. به زبان دیگر، هر برش ازنوع حالت سوم، عددگنگی مانند α را تعریف می‌کند. این عدد α، رخنه‌ای در برش ایجاد می‌کند: α در حد فاصل همهٔ عددهای a ازطبقهٔ A وهمهٔ عددهای a ازطبقهٔ A' قرار گرفته است. در مثال ۳)، این عدد تازه، همان $\sqrt{۲}$ است.

برای عددهای گنگ، هیچ گونه علامت یك گونه‌ای وجود ندارد*، هرعدد گنگ، با برش $A|A'$ در حوزهٔ عددهای گویا (که این عدد را تعریف می‌کند) مربوط می‌شود.

برای یك‌نواختی، بهتر است برای عدد گویای r نیز به‌همین‌ترتیب عمل کنیم، ولی برای هرعدد گویای r دو نوع برش وجود دارد: درهر دوحالت، عدد $a<r$ به‌طبقهٔ پایین و عدد $a>r$ به‌طبقهٔ بالا تعلق دارد. ولی خود عدد r می‌تواند متعلق به طبقهٔ پایین (که دراین‌صورت، بزرگترین عدد این طبقه است) و یا متعلق به‌طبقهٔ بالا (که دراین صورت، کوچکترین عدد این طبقه است) باشد. برای مشخص بودن وضع، قرار می‌گذاریم که هروقت صحبت از برشی است که عدد گویای r را تعریف می‌کند، این عدد متعلق به‌طبقهٔ بالا باشد./

عددهای گویا و گنگ را روی‌هم عددهای حقیقی گویند. مفهوم عدد حقیقی یکی از مفهوم‌های بنیادی آنالیز ریاضی است./

۷. مرتب‌کردن حوزهٔ عددهای حقیقی. دوعددگنگ α و β که به‌ترتیب با برش‌های $A|A'$ و $B|B'$ تعریف شده‌اند، وقتی و تنها وقتی بایکدیگر برابرندکه این برش‌ها متحد باشند. با وجود این، کافی است طبقه‌های پایین A و B، یا طبقه‌های بالای A' و B' برهم منطبق باشند، تا دو برش برهم منطبق شوند. این تعریف، برای حالتی هم که دو عدد α و β گویا باشند، درست است. به‌عبارت دیگر، اگر دوعددگویای α و β برابر باشند، برش‌های تعریف این دوعدد برهم منطبق‌اند، و برعکس، از انطباق برش‌ها، برابری عددهای α و β نتیجه می‌شود. البته، دراین‌مورد، باید شرطی را که برای تعریف عددهای گویا به‌کمك برش پذیرفتیم، درنظر داشته باشیم.**

حالا مفهوم «بزرگتری» را درمورد عددهای حقیقی روشن می‌کنیم. این مفهوم را برای عددهای گویا روشن کرده‌ایم. برای عدد گویای r و عدد گنگ α نیز، مفهوم «بزرگتری» روشن شده است: اگر α به وسیلهٔ برش $A|A'$ تعریف شده باشد، α از هر عدد گویای متعلق به‌طبقهٔ A بزرگتر است. همچنین هرعدد گویای طبقهٔ A' از α بزرگتر است.

حالا دوعدد گنگ α و β را درنظر می‌گیریم و، ضمناً، فرض می‌کنیم α به‌وسیلهٔ

---

*) صحبت بر سرعلامت‌گذاری‌های محدود است، والا با علامت‌گذاری‌های نامحدود عددهای گنگ در بند ۹ آشنا خواهیم شد. اغلب عددهای گنگ را، بنابر سرچشمهٔ پیدایش آن‌ها، به‌صورت‌های $\sqrt{2}$، $\log 5$، $\sin 10^\circ$ وغیره نشان می‌دهند.

**) بدون درنظرگرفتن این شرط، مثلاً هر دو مثال ۱ و ۲ (بند ۶)، عدد ۱ را تعریف می‌کنند، درحالی‌که این دوبرش برهم منطبق نیستند.

برش $A'|A$ و β به‌وسیلهٔ برش $B'|B$ تعریف شده‌باشد. عددی را بزرگتر گوییم که طبقهٔ پایین آن بزرگتر باشد. به‌عبارت دقیق‌تر: وقتی $\alpha>\beta$، که طبقهٔ پایین A به‌طورکامل، شامل طبقهٔ پایین B باشد، ولی برآن منطبق نباشد. (این شرط هم‌ارز آن است که بگوییم: طبقهٔ B'، به‌طورکامل، شامل طبقهٔ A' باشد و بر آن منطبق نباشد). به‌سادگی معلوم می‌شود که این تعریف را می‌توان برای حالتی هم‌که یکی از دوعدد α و β، و یا حتی وقتی‌که هر دو عدد α و β، گویا باشند، به‌کار برد.

ثابت می‌کنیم که ویژگی‌های ۱.I°، ۲.I°، برای عددهای حقیقی برقرار است.

1 **۱.I°. برای هر دوعددحقیقی α و β، یکی و تنها یکی از رابطه‌های زیر برقرار است:**

$$\alpha=\beta, \qquad \alpha>\beta, \qquad \beta>\alpha$$

اگر برش $A'|A$ عدد α و برش $B'|B$ عدد β را تعریف کرده باشد، در حالتی که دو برش برهم منطبق باشند؛ $\alpha=\beta$؛ اگر دو برش برهم منطبق نباشند، یا A به‌طورکامل شامل B است که، دراین‌صورت، $\alpha>\beta$ و یا این وضع وجود ندارد؛ در حالت اخیر، عضوی مانند b از طبقهٔ B وجود دارد که متعلق به‌طبقهٔ A' است، دراین‌صورت، برای هر عضو a ازطبقهٔ A داریم $a>b$، به‌این‌ترتیب، طبقهٔ B شامل طبقهٔ A است، بدون این‌که برآن منطبق باشد، و داریم $\beta>\alpha$.

2 **۲.I°. از $\alpha>\beta$ و $\beta>\gamma$ نتیجه می‌شود: $\alpha>\gamma$.**

فرض کنید عددهای α، β و γ (که دربین آن‌ها ممکن‌است عددهای گویا نیزوجود داشته باشد)، به‌وسیلهٔ برش‌های $A|A'$، $B|B'$ و $C|C'$ تعریف شده باشند. اگر داشته باشیم $\alpha>\beta$، طبق تعریف مفهوم «بزرگتری» طبقهٔ A شامل طبقهٔ B است، بدون آن‌که برآن منطبق باشد. به‌همین ترتیب، اگر $\beta>\gamma$، دراین‌صورت، طبقهٔ B شامل طبقهٔ C است، بی‌آن‌که برآن منطبق باشد. بنابراین، طبقهٔ A به‌طورکامل شامل طبقهٔ C می‌شود، بی‌آن‌که برآن منطبق باشد، یعنی $\alpha>\gamma$.

مفهوم «کوچکتری» را هم شبیه بند ۲ می‌توانیم روشن‌کنیم: گوییم $\alpha<\beta$، وقتی که $\beta>\alpha$. علامت $<$ هم، کاملاً مانند علامت $>$، دارای ویژگی سرایت‌پذیری است.

۸. گزاره‌های کمکی. حالا به ویژگی فشردگی حوزهٔ همهٔ عددهای حقیقی می‌پردازیم و حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

پیش قضیهٔ ۱. اگر α و β دو عدد حقیقی دلخواه باشند وضمناً $\alpha<\beta$، همیشه عدد گویای r پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که بین α و β قرار داشته باشد: $\alpha<r<\beta$ (و بنابراین مجموعه‌ای نامتناهی از چنین عددها وجود دارد).

از آن‌جا که $\alpha<\beta$، طبقهٔ پایین A، از برش مربوط به‌تعریف α، به‌طورکامل، شامل

طبقهٔ پایین B، از بسرش مربوط به‌تعریف β است، بدون آن‌که بر آن منطبق باشد. به‌این‌ترتیب، عدد گویایی مانند r در A پیدا می‌شود که متعلق به B نیست و ، بنابراین، متعلق به B' است و داریم:

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(برابری تنها وقتی ممکن است که β عددی گویا باشد). ولی، چون در A بزرگترین عدد وجود ندارد، درصورت لزوم، می‌توان با افزایش r، علامت برابری را حذف کرد.

یادآوری. با اثبات این مطلب که بین عددهای حقیقی α و β (با شرط $\alpha > \beta$) باید عددی گویا (و نه‌تنها حقیقی) وجود داشته باشد، در واقع، یك ویژگی قوی‌تر ازفشردگی را برای حوزهٔ عددهای حقیقی ثابت کردیم. در زیر ازاین فشردگی قوی استفاده می‌کنیم.

پیش‌قضیهٔ ۲. دو عدد حقیقی α و β را درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای عدد دلخواه $e > 0$، دو عدد α و β بتوانند بین مرزهای گویای s و s' واقع باشند:

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \qquad s' \geqslant \beta \geqslant s$$

به‌نحوی‌که تفاضل این مرزها کمتر از e باشد:

$$s' - s < \alpha$$

دراین‌صورت، α و β الزاماً برابرند.

اثبات. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. مثلاً فرض‌می‌کنیم $\alpha > \beta$. بنابر پیش قضیهٔ ۱، بین α و β می‌توان دوعدد گویای r و $r' > r$ را قرار داد:

$$a > r' > r > \beta$$

در این صورت، روشن است که به ازای هر دو عدد s و s' (که α و β بین آن‌ها قرار گرفته‌اند) نابرابری‌های زیر برقرار است:

$$s' > r' > r > s$$

ازآن‌جا $$s' - s > r' - r > 0$$

طوری‌که تفاضل $s' - s$، برخلاف فرض پیش قضیه، نمی‌تواند، مثلاً، کوچکتر از عدد $e = r' - r$ باشد. و این تناقض، حکم پیش قضیه را ثابت می‌کند.

۹. نمایش عددهای حقیقی به‌کمك کسردهدهی نامتناهی. نمایشی را درنظر داریم که، درآن، قسمت دهدهی (مانتیس) مثبت باشد وقسمت صحیح بتواند مثبت، منفی یا صفر شود.

فرض می‌کنیم، عدد حقیقی α، نه‌عددی درست باشد و نه کسردهدهی متناهی. مقدار تقریبی این عدد را، به‌صورت کسر دهدهی، جست‌وجو می‌کنیم. اگر عدد α با برش $A|A'$ تعریف شده باشد، قبل ازهمه، معلوم است که می‌توان در طبقهٔ A، عدد، درست M و در طبقهٔ A'، عدد درست $N>M$ را پیدا کرد. اگر به M مرتباً یک واحد اضافه‌کنیم، الزاماً به دو عدد درست متوالی C_0 و C_0+1 می‌رسیم، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$C_0<\alpha<C_0+1$$

عدد C_0 می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

حال، اگر فاصلهٔ بین C_0 و C_0+1 را به ده‌قسمت برابر تقسیم‌کنیم، این عددها به‌دست می‌آید:

$$C_0/1,\ C_0/2,\ \dots,\ C_0/9$$

دراین‌صورت، α دریکی (وتنها یکی) از این فاصله‌های تقسیم قرار می‌گیرد. به‌دو عددی می‌رسیم‌که اختلاف آن‌ها $\frac{1}{10}$ است: C_0/c_1 و $C_0/c_1+\frac{1}{10}$ و داریم:

$$C_0/c_1<\alpha<C_0/c_1+\frac{1}{10}$$

با ادامهٔ این روش، بعداز رقم‌های $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$، رقم n ام، یعنی c_n را پیدا می‌کنیم و نابرابری زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$C_0/c_1c_2\cdots c_n<\alpha<C_0/c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n} \qquad (1)$$

به‌این‌ترتیب، درجریان پیدا کردن مقدار تقریبی دهدهی عدد α، عدد درست C_0 و دنبالهٔ نامتناهی رقم‌های $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ را ساخته‌ایم. در نتیجه، می‌توانیم، کسر دهدهی یعنی نماد

$$C_0/c_1c_2\cdots c_n\cdots \qquad (2)$$

را برای نمایش عدد حقیقی α درنظر بگیریم.

درحالت خاصی هم‌که α، عددی درست و یا، به‌طورکلی، کسر دهدهی متناهی باشد، می‌توان به‌ترتیب مشابهی، عدد C_0 و رقم‌های $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ را به‌دست آورد و رابطهٔ کلی‌تر زیر را نوشت:

$$C_0/c_1c_2\cdots c_n \leqslant \alpha \leqslant C_0/c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \qquad (1a)$$

موضوع این‌است که، دراین‌حالت، دریکی ازمرحله‌هایی که α را درفاصله‌ای جست وجو می‌کنیم، بریکی از دو سمت‌چپ یاراست این فاصله منطبق می‌شود و (۱a)، درآن‌وضع، به‌صورت برابری درمی‌آید. دراین‌حالت، رقم‌های بعدی، همه برابر صفر یا همه برابر ۹ می‌شود، بنابراین، عدد α را دراین‌حالت، به‌دوصورت می‌توان نشان دادکه در یکی صفر و در دیگری ۹ تکرار شده است. مثلاً

$$۳/۸۲۶ = ۳/۸۲۶۰۰۰\ldots = ۳/۸۲۵۹۹۹\ldots$$

$$-۳/۸۲۶ = \bar{۴}/۱۷۴۰۰۰\ldots = \bar{۴}/۱۷۳۹۹۹\ldots$$

حال فرض‌کنید، برعکس، کسر دهدهی نـامتناهی (۲) داده شده باشد. ثابت‌می‌کنیم که همیشه عدد حقیقی α پیدا می‌شودکه این‌کسر نمایش آن است. برای این‌منظور، کسر

$$C_n = C_0/c_1c_2\cdots c_n \qquad (۳)$$

را که «مقدار تقریبی نقصانی» عدد مجهول است و، همچنین، «مقدار تقریبی اضافی» آن

$$C'_n = C_0/c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \qquad (۴)$$

را درنظر می‌گیریم. به‌سادگی دیده می‌شودکـه هر C_m از هر C_m کوچکتر است (نه تنها به‌ازای $m=n$، بلکه ضمناً به‌ازای $m>n$ یا $m<n$). حالا، درحوزهٔ عددهای گویا، یك برش، به‌ترتیب‌زیر، درست می‌کنیم: درطبقهٔ بالای A'، همهٔ عـددهای گویای a' را قرار می‌دهیم که از همهٔ C_nها بزرگترنـد (مثلاً همهٔ عددهای C'_n)، و در طبقهٔ پـایین A، همهٔ عددهای گویای بقیه را (مثلاً، خود عـددهای C_n). به سادگی معلوم می‌شودکه این، یك برش است و عددی حقیقی مثل α را تعریف می‌کند.

درواقع، چون α عددی است‌که بین دوطبقه محدود است، داریم:

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n$$

یعنی، عدد α، در همهٔ نابرابری‌های به‌صورت (۱a) صدق می‌کند. و این ثابت می‌کندکه هرکسر به صورت (۲)، نمایش یك‌عدد حقیقی است.

اختلاف بین‌کسرهای‌دهدهی تقریبی (۳) و (۴) (تقریبی نقصانی و تقریبی‌اضافی)، برابر $\frac{1}{10^n}$ است. با بزرگ‌کردن n، می‌توان این اختلاف را، از هر عددگویای $e>0$

دلخواه، کوچکتر کرد. در واقع، چون عددهای طبیعی، که از $\frac{1}{e}$ تجاوز نکنند، فقط به تعداد محدودی وجود دارند، نابرابری $\frac{1}{e} \leqslant 10^n$ و یا، هم‌ارز آن، $\frac{1}{10^n} \geqslant e$، می‌تواند برای تعداد محدودی از مقدارهای n برقرار باشد؛ و برای بقیهٔ مقدارهای n داریم:

$$\frac{1}{10^n} < e$$

از این توضیح، و با در نظر گرفتن پیش‌قضیهٔ ۲، می‌توان نتیجه گرفت که عدد β (که غیر از α است)، نمی‌تواند در همان نابرابری (۱) یا (۱a) ــ که برای α صدق می‌کند ــ صادق باشد. بنابراین، عدد β، با کسر دهدهی نامتناهی، غیر از کسر دهدهی نامتناهی عدد α، نمایش داده می‌شود.

از این‌جا، ضمناً، این نتیجه به‌دست می‌آید که اگر نمایش یك عدد، به‌صورت هیچ کسر دهدهی متناهی نباشد، نمی‌تواند، در نمایش دهدهی خود، دورهٔ گردش ۰ یا ۹ داشته باشد، زیرا اگر یك کسر دهدهی دارای دورهٔ گردش ۰ یا ۹ باشد، هم‌ارز با یك کسر دهدهی متناهی است.

ازاین به‌بعد، خواننده می‌تواند هر عدد حقیقی را به‌صورت کسر دهدهی نامتناوب در نظر بگیرد (از دورهٔ دبیرستانی می‌دانیم که کسرهای نامتناهی متناوب، نمایش عددهای گویا هستند و، برعکس، هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت یك کسر دهدهی متناوب نشان داد. به‌این ترتیب، نمایش هر عدد گنگ، به‌صورت کسر نامتناهی غیرمتناوبی در خواهد آمد (و همین نمایش می‌تواند آغازی برای ساختمان نظریهٔ عددهای گنگ باشد).

یادآوری. اغلب پیش می‌آید که به‌جای عدد حقیقی α، از مقدارهای گویا و تقریبی a و a' استفاده کنیم:

$$a < \alpha < a'$$

به‌نحوی که اختلاف a و a' بتواند به‌اندازهٔ دلخواه کوچك باشد. وقتی که α، عددی گویا باشد، وجود a و a' روشن است. در حالتی که α، عدد گنگ باشد، می‌توان به‌جای a و a'، مثلاً از مقدارهای تقریبیِ دهدهی C_n و C'_n استفاده کرد و n را در آن‌ها، به‌قدر کافی، بزرگ گرفت.

۱۰. پیوستگی حوزهٔ عددهای حقیقی. اکنون به یکی از ویژگی‌های مهم حوزهٔ عددهای حقیقی می‌پردازیم، که آن را به‌طور اساسی، از حوزهٔ عددهای گویا مشخص می‌کند.

ضمن بررسی برش درحوزهٔ عددهای گویا، دیدیم که گاهی برای این برش، دراین‌حوزه،عدد مرزی وجود ندارد (یعنی رخنه‌ای وجود دارد که منجر به‌این برش شده است). همین‌پرنبودن حوزهٔ عددهای گویا و وجود رخنه‌هایی درآن، پایه‌ای برای پیدایش عددهای جدید، یعنی عددهای گنگ، شد. حال، به‌بررسی برش، درحوزهٔ عددهای حقیقی، می‌پردازیم. برای این منظور، حوزهٔ عددهای حقیقی را، به دومجموعهٔ ناتهی A و A' تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی که:

۱°. هرعدد حقیقی در یکی و تنها یکی از مجموعه‌های A و A' قرار گیرد؛

۲°. هرعدد α ازمجموعهٔ A، کوچکتر از هرعدد α' از مجموعهٔ A' باشد.

دربرابر این پرسش قرار می‌گیریم: آیا برای برش $A|A'$، عدد مرزی، از بین عددهای حقیقی (که این برش را پدیدآورده است)، پیدا می‌شود، یا این‌که، دراین‌حوزه هم رخنه‌ای وجود دارد (که بتواند سرچشمه‌ای برای پیدایش عددهای تازه باشد)؟

ثابت می‌کنیم که، در واقع، چنین رخنه‌ای وجود ندارد.

قضیهٔ اساسی (قضیهٔ ددکیند). به‌ازای هر برش $A|A'$ حوزهٔ عددهای حقیقی، عدد حقیقی β پیدا می‌شود که این برش را به‌وجود می‌آورد. این عدد β عبارت است از: ۱) یا بزرگترین عدد درطبقهٔ پایین A، ۲) یا کوچکترین عدد درطبقهٔ بالای A'.

این‌ویژگی‌عددهای‌حقیقی، پیوستگی (یاتمامیت ویافشردگی‌کامل) آن نامیده‌می‌شود.

اثبات. مجموعهٔ همهٔ عددهای‌گویای متعلق به A را $\mathcal{A}$ ومجموعهٔ همهٔ عددهای‌گویا متعلق‌به A' را $\mathcal{A}'$ می‌نامیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که مجموعه‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$، برشی در حوزهٔ همهٔ‌عددهای گویا به‌وجود می‌آورند. این برش $\mathcal{A}|\mathcal{A}'$، یك عدد حقیقی مانند β را تعریف می‌کند. این عدد حقیقی، باید متعلق به‌یکی ازطبقه‌های A یا A' باشد. فرض می‌کنیم، مثلاً، β درطبقهٔ پایین A قرارگرفته باشد. ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت، β بزرگترین عدد درطبقهٔ A است. درواقع، اگر این‌طور نباشد، باید عدد دیگری، مانند α_0، از این‌طبقه پیدا شود که از β بزرگتر باشد. بنابرپیش‌قضیهٔ ۱، بین α_0 و β، عدد گویایی مانند r وجود دارد

$$\alpha_0 > r > \beta$$

r هم متعلق به‌طبقهٔ A است و، بنابراین، به‌طبقهٔ $\mathcal{A}$ تعلق دارد. می‌بینیم که تناقض پیش می‌آید و عدد گویای r، متعلق به‌طبقهٔ پایین برشی است که β را تعریف می‌کند. و از این عدد بزرگتر است! وجود این تناقض، درستی حکم قضیه را ثابت می‌کند.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان برای حالتی که β درطبقهٔ بالای A' است، استدلال کرد.

یادآوری: باتوجه به پیش قضیهٔ ۱ روشن است که عدد β نمی‌تواند، درعین‌حال، بزرگترین عدد طبقهٔ A وکوچکترین عدد طبقهٔ A' باشد.

۱۱. کرانهای مجموعه‌های عددی. با استفاده از قضیهٔ اساسی ددکیند، مفهوم‌هایی را می‌آوریم که، در آنالیز امروز، نقش اساسی به‌عهده دارند (این مفهوم‌ها، برای بررسی عمل‌های حسابی، درمورد عددهای حقیقی، مورد نیازند).

مجموعهٔ نامتناهی دلخواهی از عددهای حقیقی را در نظر می‌گیریم. این مجموعه، می‌تواند به صورت‌های مختلف داده شده باشد: مجموعهٔ عددهای طبیعی، مجموعهٔ همهٔ کسرهای مثبت کوچکتر از واحد، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی بین ۰ و ۱، مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{2}$ و غیره.

هریك از عددهای این مجموعه را به x نشان می‌دهیم، یعنی x علامت نمونه‌ای عددهای این مجموعه باشد. خودمجموعهٔ عددهای x را باعلامت $\mathfrak{M} = \{x\}$ نشان می‌دهیم.

اگر برای مجموعهٔ $\{x\}$، عددی مانند M وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم: $x \leqslant M$، گوییم مجموعهٔ ما، ازبالا کران‌دار است (به‌وسیلهٔ عدد M)، خود عدد M را، دراین‌حالت، کران بالای مجموعهٔ $\{x\}$ می‌نامیم. مثلاً، مجموعهٔ کسرهای مثبت کوچکتر از واحد، ازبالا، به‌وسیلهٔ عدد ۱، یا هرعدد بزرگتراز ۱، کران‌دار است. دنبالهٔ عددهای طبیعی، ازبالا، کران‌دار نیست.

به‌همین‌ترتیب، اگر عددی مانند m پیدا شود که‌همیشه داشته باشیم: $x \geqslant m$، گوییم مجموعهٔ $\{x\}$ از پایین کران‌دار است. (به‌وسیلهٔ عدد m). خود عدد m را کران‌پائین مجموعهٔ $\{x\}$ می‌نامیم. مثلاً، دنبالهٔ عددهای‌طبیعی، ازپایین، باعدد۱ و یا هرعدد کوچکتر از ۱، کران‌دار است. مجموعهٔ کسرهای مثبت کوچکتراز ۱، ازپایین، با عدد ۰ ویاهرعدد کوچکتراز ۰، کران‌دار است.

مجموعه‌ای که از بالا کران‌دار است، ممکن است ازپایین، کران‌دار باشد یا نباشد. همچنین، مجموعه‌ای که از پایین کران‌دار است، ممکن‌است ازبالا، کران‌دار یا ناکران‌دار باشد. مثلاً، کسرهای مثبت کوچکتر از واحد، هم از بالا و هم از پایین، کران‌دار است، درحالی که دنبالهٔ طبیعی عددها، از پایین کران‌دار و از بالا ناکران‌دار است. اگر مجموعه‌ای، از بالا (یا پایین) کران‌دار نباشد، کران بالا (یاکران پایین) آن را $+\infty$ (یا $-\infty$) می‌گیرند. ضمناً، در ارتباط با این‌عددهای «غیرخاص» یا «بی‌نهایت»، فرض می‌گیرند که

$$-\infty < +\infty, \qquad -\infty < \alpha < +\infty$$

که درآن، α عدد حقیقی دلخواه (ومحدود) است.

علامت‌های $+\infty$ و $-\infty$ را این طور می‌خوانند: «به اضافهٔ بی‌نهایت» و

«منهای بی‌نهایت».

اگر مجموعه‌ای از بالاکران‌دار باشد، یعنی کران بالای محدودی مانند M داشته باشد، دراین‌صورت، دارای بی‌نهایت کران بالا خواهد بود (زیرا، هرعدد بزرگتراز M هم، کران بالای آن است). از این کران‌های بالا، با کوچکترین آن‌ها، بیشتر کارداریم، که ما آن را مرزبالا (سوپرموم *supermum*) (یا کران بالای دقیق) می‌نامیم. همین‌طور، اگر مجموعه‌ای از پایین کران‌دار باشد، بزرگترین همهٔ کران‌های پایین را مرزپایین (اینفیموم *infimum*) (یا کران پایین دقیق) می‌نامیم. مثلاً، برای کسرهای مثبت کوچکتر از واحد، مرزهای پایین و بالا، به‌ترتیب، برابر ۰ و ۱ است.

پرسشی پیش می‌آید: آیا برای مجموعه‌ای که ازبالا (یا پایین) کران‌دار است، همیشه مرز بالا (یا پایین) وجود دارد؟ در واقع، از آن‌جا که کران‌های بالا (یا پایین)، دراین‌حالت، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند، در بین مجموعهٔ نامتناهی عددها، همیشه نمی‌توان کوچکترین یا بزرگترین را پیدا کرد*. بنابراین، وجود کوچکترین (یا بزرگترین) عدد، بین همهٔ کران‌های بالا (یا پایین) مجموعهٔ مورد بررسی، نیاز به اثبات دارد.

قضیه. اگر مجموعهٔ $\mathfrak{M} = \{x\}$ از بالا (یا پایین) کران‌دار باشد، آن‌گاه مرز بالا (یا پایین) خواهد داشت.

اثبات. استدلال را برای مرزبالا انجام می‌دهیم. دوحالت درنظر می‌گیریم:

۱°. بین عددهای x از مجموعهٔ $\mathfrak{M}$، بزرگترین عدد $\bar{x}$ پیدا می‌شود. دراین صورت، همهٔ عددهای مجموعه، درنابرابری $x \leqslant \bar{x}$ صدق می‌کنند، یعنی $\bar{x}$ کران بالای مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ است. از طرف دیگر، $\bar{x}$ متعلق به $\mathfrak{M}$ است. بنابراین، برای هر مرز بالای M، نابرابری $\bar{x} \leqslant M$ برقرار است، از این‌جا نتیجه می‌شود که $\bar{x}$ مرزبالای $\mathfrak{M}$ است.

۲°. بین عددهای x ازمجموعهٔ $\mathfrak{M}$ بزرگترین عدد وجود ندارد. درمجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی، برشی به‌این‌ترتیب به‌وجود می‌آوریم، درطبقهٔ بالای A'، همهٔ کران‌های بالائی α' ازمجموعهٔ $\mathfrak{M}$، و درطبقهٔ پایین A، همهٔ بقیهٔ عددهای حقیقی α را قرار می‌دهیم. بااین تقسیم، همهٔ عددهای x ازمجموعهٔ $\mathfrak{M}$، درطبقهٔ پایین A قرار می‌گیرند، زیرا بنابرفرض، هیچ‌کدام از آن‌ها، بزرگترین نیست. به‌این‌ترتیب، هردو طبقهٔ A و A' ناتهی است. این تقسیم، در واقع، یك برش است، زیرا همهٔ عددهای حقیقی، در طبقه‌ها پخش شده‌اند و هرعدد ازطبقهٔ A' بزرگتراز هرعدد ازطبقهٔ A است. بنابرقضیهٔ اساسی ددکیند، باید عدد حقیقی β وجود داشته باشد، که منجر به‌برش بشود. هیچ‌کدام از عددهای x، به مناسبت این‌که متعلق به‌طبقهٔ A هستند، از این عدد β تجاوز نمی‌کنند، یعنی β برای x

*) مثلا، بین همهٔ کسرهای مثبت کوچکتر از واحد، نه‌بزرگترین و نه‌کوچکترین، وجودندارد.

کران‌بالایی است؛ بنابراین، A متعلق بـه طبقهٔ A' و، از آن‌جـا، کـوچکترین عدد است. به‌این‌ترتیب، β، که‌کوچکترین عدد بین‌کران‌های بالایی است، همان مرزبالا برای‌مجموعهٔ $\mathfrak{X}=\{x\}$ می‌شود.

نیمهٔ دوم قضیه هم (که به مرز پایین مربوط می‌شود)، به‌همین‌ترتیب ثابت‌می‌شود.

اگر M^*، مرز بالای مجموعهٔ عددی $\mathfrak{X}=\{x\}$ بـاشد، دراین‌صورت، بـرای همهٔ مقدارهای‌x داریم:

$$x\leqslant M^*$$

عدد دلخواه α را کوچکتر از M^* انتخاب می‌کنیم. از آن‌جا که M^*کوچکترین عدد ازکران‌های بالایی است، عدد α، بی‌تردید، نمی‌تـواند برای مجموعهٔ $\mathfrak{X}$کران بالا باشد، یعنی عددی مانند x' در x پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$x'>\alpha$$

با این دو نابرابری، می‌توان مرز بالای مجموعهٔ $\mathfrak{X}$ را، به‌طورکامل، مشخص‌کرد.

به‌همین‌ترتیب، مرز پایین m^* از مجموعهٔ $\mathfrak{X}$ بدین‌گونه مشخص می‌شودکه به‌ازای همهٔ مقدارهای x از x داشته باشیم:

$$x\geqslant m^*$$

و اگر β عدد دلخواهی بزرگتر از m^* بـاشد، عدد x'' از $\mathfrak{X}$ پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$x''<\beta$$

برای نشان دادن مرز بالایی M^* و مرز پایینی m^* از مجموعهٔ عددی $\mathfrak{X}$، از ایـن علامت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$M^*=\sup\mathfrak{X}=\sup\{x\},\qquad m^*=\inf\mathfrak{X}=\inf\{x\}$$

(از واژهای لاتینی: بالاترین $=\sup remum$، پایین‌ترین $=\inf imum$).

به‌این نتیجه‌گیری روشن، که اغلب به‌آن برخورد می‌کنیم، توجه‌کنیم:

اگر همهٔ عددهـای‌x از یـک مجموعه، در نـابرابـری‌$x\leqslant M$ صدق‌کنند، داریـم: $\sup\{x\}\leqslant M$. در واقع، عدد M یکی ازکران‌های بالایی مجموعه است و، بنابراین، کوچکترین عدد از بین همه‌کران‌های بالایی، نمی‌تواند از آن تجاوزکند.

به‌همین‌ترتیب، از نابرابری $x\geqslant m$ نتیجه می‌شود: $\inf\{x\}\geqslant m$.

بالاخره قرار می‌گذاریم که، اگر مجموعهٔ $\mathscr{X}=\{x\}$ از بالا کران‌دار نباشد، مرز بالایی آن را $+\infty$ بنامیم: $sup\{x\}=+\infty$. به‌همین ترتیب، اگر مجموعهٔ $\mathscr{X}=\{x\}$ از پایین کران‌دار نباشد، گوییم مرز پایین آن $-\infty$ است: $\inf\{x\}=-\infty$.

§۳. عمل‌های حسابی روی عددهای حقیقی

۱۲. تعریف مجموع عددهای حقیقی. حالا، به مفهوم عمل روی عددهای حقیقی، برمی‌گردیم. از این به‌بعد، حرف‌های یونانی α ، β و γ را، برای نشان دادن عددهای حقیقی ــ چه گویا و چه گنگ ــ به‌کار می‌بریم.

دوعدد حقیقی α و β را در نظر می‌گیریم. عددهای گویای a ، a' و b ، b' را طوری انتخاب می‌کنیم که در نابرابری‌های زیر صدق کنند:

$$a<\alpha<a', \qquad b<\beta<b' \tag{۱}$$

مجموع $\alpha+\beta$ از دوعدد α و β، به عدد حقیقی مانند γ گفته می‌شود که بین همهٔ مجموع‌های به‌صورت $a+b$ ازیک‌طرف، وهمهٔ‌مجموع‌های به‌صورت $a'+b'$،ازطرف دیگر، قرار گیرد.

$$a+b<\gamma<a'+b' \tag{۲}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر دوعدد حقیقی α و β ، این عدد γ وجود دارد.

مجموعهٔ همهٔ مجموع‌های ممکن $a+b$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه، از بالا، کران‌دار است، مثلاً بامجموع دلخواه $a'+b'$. فرض می‌کنیم [**۱۱** دیده شود]:

$$\gamma=sup\{a+b\}$$

دراین‌صورت $a+b\leqslant\gamma$ و درعین‌حال $\gamma\leqslant a'+b'$.

اگر عددهای گویای a ، b و a' ، b' درشرط‌های (۱) صدق کنند، همیشه می‌توان با بزرگ‌کردن a و b و کوچک‌کردن a' و b'، این شرط‌ها را حفظ کرد. بنابراین، در نابرابری‌هایی که هم‌اکنون، به‌دست آوردیم، علامت‌های برابری، حتی در یک مورد هم، نمی‌تواند وجود داشته باشد. به‌این‌ترتیب، عدد γ، درتعریف جمع صدق می‌کند.

با همهٔ این‌ها، به‌پرسش دیگری هم باید پاسخ داد: آیا مجموع $\gamma=\alpha+\beta$، که به‌وسیلهٔ نابرابری‌های (۲) تعریف‌می‌شود، منحصربه‌فرد است؟ بنابرآن‌چه درشمارهٔ۹ گفتیم، عددهای گویای a ، a' و b ، b' را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$a'-a<e, \qquad b'-b<e$$

که در آن، e عددی است مثبت و گویا و به‌دلخواه کوچك. از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$(a'+b')-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)<۲e$$

یعنی این تفاضل نیز می‌تواند به‌دلخواه کوچك باشد.* بنابراین، بنابر پیش‌قضیهٔ ۲، تنها یك عدد وجود دارد که بین مجموع‌های $a+b$ و $a'+b'$ قرار گرفته است.

بالاخره متذکر می‌شویم که اگر α و β دوعدد گویا باشند، روشن است که مجموع معمولی آن‌ها $\gamma=\alpha+\beta$، در نابرابری‌های (۲) صدق می‌کند. به‌این‌ترتیب، تعریف کلی که در این‌جا، برای مجموع دوعدد حقیقی، آوردیم، با تعریف قبلی جمع درمورد عددهای گویا، متناقض نیست.

۱۳. ویژگی‌های جمع. به‌سادگی معلوم می‌شود که، برای جمع عددهای حقیقی، این ویژگی‌ها درست است:

$$\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad .°۱۰\text{II}} \quad ; \quad \boxed{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \quad .°۲۰\text{II}} \quad ;$$

$$\boxed{\alpha+۰=\alpha \quad .°۳۰\text{II}}$$

به عنوان نمونه، ویژگی آخر را ثابت می‌کنیم. اگر عددهای گویای a، a' و b، b' را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$a<\alpha<a', \qquad b<۰<b'$$

در این‌صورت، روشن است که

$$a+b<a<\alpha<a'<a'+b'$$

به‌این‌ترتیب، α عددی است حقیقی، که بین‌دوعدد به‌صورت $a+b$ و $a'+b'$ قرار گرفته است. $\alpha+۰$ هم، طبق تعریف، بین همین دوعدد واقع است. از طرف دیگر، می‌دانیم که چنین عددی، منحصر به‌فرد است و، بنابراین $\alpha+۰=\alpha$.

ویژگی $°۴۰\text{II}$ را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که برای هرعدد حقیقی α، عدد $-\alpha$ (قرینهٔ آن) وجود دارد که درشرط $\alpha+(-\alpha)=۰$ صدق می‌کند.

برای این‌منظور، کافی است، خود را به‌حالت‌گنگ بودن عدد α محدود کنیم.

اگر عدد α، به‌وسیلهٔ برش $A|A'$ تعریف شده باشد، عدد $-\alpha$ را، به‌این‌ترتیب، تعریف می‌کنیم: درطبقهٔ پایین $\bar{A}$ ازعدد $-\alpha$، همهٔ عددهای گویای $-a'$ را درنظر می‌گیریم، که در آن، a' عبارت‌است از هرعدد طبقهٔ A'، در طبقهٔ بالای $\bar{A}'$ این عدد، همهٔ

*) عدد $۲e$ می‌تواند از هرعدد $e'>۰$ کوچکتر باشد، وقتی که $e<\frac{e'}{۲}$ انتخاب کنید

عددهای $a-$ را درنظرمی‌گیریم، که درآن، a عبارت است ازهرعدد طبقهٔ A. به‌سادگی دیده می‌شود که این تقسیم، یك برش است و، درواقع، عددی حقیقی (و دراین‌جا، عددی گنگ) را تعریف می‌کند. این عدد را $\alpha-$ می‌نامیم.

حالا ثابت می‌کنیم که این عدد درشرط بالا صدق می‌کند. با استفاده ازخود تعریف عدد $\alpha-$، می‌بینیم که مجموع $\alpha+(-\alpha)$، عدد حقیقی منحصر به فردی است که بین عددهای به صورت $a-a'$ و $a'-a$ واقع است، که درآن، عددهای a و a'، عددهایی گویا هستند و داریم: $a<\alpha<a'$. ولی، روشن است که

$$a-a'<0<a'-a$$

یعنی، عدد ۰، بین عددهایی که هم‌اکنون نام بردیم، واقع است که، بنابرمنحصر به‌فرد بودن عددی که این ویژگی را دارد، به‌دست می‌آید:

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

سرانجام. به‌این ویژگی می‌رسیم:

II. ۵°. ۱ از $\alpha>\beta$ نتیجه می‌شود: $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

اگر $\alpha>\beta$، می‌توان بین آن‌ها، دو عددگویای r_1 و r_2 را قرار داد: $\alpha>r_1>r_2>\beta$. بنابرآن‌چه درشمارهٔ۹دیدیم،دوعددگویای c و c' وجوددارد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$c<\gamma<c',\ c'-c<r_1-r_2$$

و ازآن‌جا $r_1+c>r_2+c'$

و بنا به تعریف جمع

$$\alpha+\gamma>r_1+c,\ r_2+c'>\beta+\gamma$$

که با درنظرگرفتن همهٔ این نابرابری‌ها، نتیجهٔ لازم به‌دست می‌آید.

به‌این‌ترتیب، همهٔ ویژگی‌های II. ۱°تا۵°، که درشمارهٔ۳برای عددهای گویا تنظیم کردیم، برای جمع عددهای حقیقی هم درست است. بنابراین، در مورد عددهای حقیقی هم،می‌توان به‌همهٔ نتیجه‌های منطقی ناشی ازاین ویژگی‌ها، رسید. درمورد عددهای حقیقی هم، می‌توان همهٔ آن‌چه راکه درشمارهٔ۳، و بلافاصله بعد از طرح ویژگی‌های گروه II، آوردیم، تکرارکرد، یعنی می‌توان وجود منحصر به‌فرد تفاضل $\alpha-\beta$ عددهای α و β را ثابت‌کرد، مفهوم قدر مطلق عدد α را توضیح داد (که برای آن، همان علامت $|\alpha|$ را حفظ می‌کنیم) و غیره.

۱۴. تعریف حاصلضرب عددهای حقیقی. حالا، به حاصل ضرب عددهای حقیقی می‌پردازیم، و، در ابتدا، خود را به عددهای مثبت محدود می‌کنیم. دوعدد مثبت و حقیقی α و β را در نظر می‌گیریم. در این جا نیز، همهٔ نوع‌های عددهای گویا را، که در نابرابری‌های (۱) صدق می‌کنند، مورد توجه قرارمی‌دهیم، ولی این عددها را هم، مثبت می‌گیریم.

حاصل ضرب $\alpha\beta$ دو عدد حقیقی و مثبت α و β، به‌عددی حقیقی مانند γ گفته می‌شود که بین همهٔ نوع‌های ممکن حاصل‌ضرب‌های ab از یك طرف، و همهٔ نوع‌های ممکن حاصل ضرب‌های $a'b'$ از طرف دیگر، قرارگرفته باشد:

$$ab<\gamma<a'b' \qquad (۳)$$

برای اثبات وجود عدد γ، مجموعهٔ همهٔ نوع‌های ممکن حاصل ضرب ab را انتخاب می‌کنیم. این مجموعه، از بالا، با هر حاصل‌ضرب به‌صورت $a'b'$ کران‌داراست. اگر فرض کنیم:

$$\gamma=\sup\{ab\}$$

دراین صورت، روشن است که $ab\leqslant\gamma$ و درعین‌حال $\gamma\leqslant a'b'$.

با توجه به امکان بزرگ‌کردن عددهای a و b وکوچك‌کردن عددهای a' و b' (مانند حالت جمع)، می‌توان دراین‌جا هم، علامت برابری را حذف کرد، به‌نحوی که عدد γ، در تعریف حاصل‌ضرب صدق کند.

منحصر بودن حاصل‌ضرب را، به‌این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت: بنابرشمارهٔ ۹، عددهای a، a' و b، b' را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$a'-a<e \quad و \quad b'-b<e$$

که در آن، e عبارت است از عددی مثبت و به‌دلخواه کوچك. ضمناً می‌توان عددهای a و b را مثبت گرفت و فرض کرد که عددهای a' و b'، به‌ترتیب، از عددهای ثابت a'_0 و b'_0 تجاوز نکنند. دراین صورت، تفاضل

$$a'b'-ab=a'(b'-b)+b(a'-a)<(a'_0+b'_0)\cdot e$$

را هم می‌توان از هر عدد دلخواه کوچکتر گرفت*. همین امکان، بنابر پیش قضیهٔ ۲، کافی

(*) $(a'_0+b'_0)\cdot e$ از هر عدد دلخواه $e'>0$ کوچکتر است، وقتی که داشته باشیم:

$$e<\frac{e'}{a'_0+b'_0}$$

است ما را مطمئن کند که نابرابری (۳)، تنها برای یك عدد γ می‌تواند برقرار باشد.

درحالتی هم، که دو عدد α و β گویا باشند، روشن است که حاصل ضرب معمولی $\gamma=\alpha\beta$، در نابرابری (۳) صدق می‌کند، یعنی با تعریف کلی ضرب درعددهای حقیقی، تناقض پیدا نمی‌کند.

بالاخره، برای این که حاصل‌ضرب دو عدد دلخواه حقیقی (مثبت یا منفی) را پیدا کنیم، به‌این ترتیب، عمل می‌کنیم.

قبل از همه، شرط می‌کنیم که برای هرعدد α

$$0\cdot\alpha=\alpha\cdot 0=0$$

واگر هردو عامل مخالف صفر باشند، «قانون علامت‌ها» را مبنا قرارمی‌دهیم:

اگر α و β هم‌علامت باشند: $\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|$

اگر α و β با علامت‌های مختلف باشند: $\alpha\cdot\beta=-|\alpha|\cdot|\beta|$

(وما دیگر، معنای حاصل‌ضرب دوعدد مثبت $|\alpha|\cdot|\beta|$ را می‌دانیم).

این توافق ازاین جهت لازم است که (همان‌طور که درشمارهٔ ۴دیدیم)، عمل روی عددهای حقیقی، دارای همهٔ ویژگی‌های بنیادی عمل روی عددهای گویا باشند.

۱۵. ویژگی‌های ضرب. مانند حالت عددهای گویا، در مورد عددهای حقیقی نیز، این ویژگی‌ها وجود دارد:

$$\alpha\beta=\beta\alpha \quad .^{\circ}1\ .\mathrm{III}; \qquad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \quad .^{\circ}2\ .\mathrm{III}$$

$$\alpha\cdot 1=\alpha \quad .^{\circ}3\ .\mathrm{III}$$

به‌عنوان نمونه، ویژگی دوم را ثابت می‌کنیم و ازحالتی آغاز می‌کنیم که هرسه عدد α، β و γ مثبت باشند. فرض می‌کنیم a، a' و b، b' و c، c' عددهای گویای دلخواهی باشند که دراین نابرابری‌ها صدق کنند:

$$0<a<\alpha<a', \quad 0<b<\beta<b', \quad 0<c<\gamma<c'$$

دراین صورت، بنا به‌تعریف ضرب دوعدد حقیقی، داریم:

$$ab<\alpha\beta<a'b', \quad bc<\beta\gamma<b'c'$$

اگر دوباره از همین تعریف استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(ab)c<(\alpha\beta)\gamma<(a'b')c', \quad a(bc)<\alpha(\beta\gamma)<a'(b'c')$$

چون به‌ازای عددهای گویا، ویژگی مورد نظر درست است، بنابراین، عددهای

حقیقی $\alpha(\beta\gamma)$ و $(\alpha\beta)\gamma$، بین دومرز مشابه قرار گرفته‌اند:

$$(ab)c=a(bc),\quad (a'b')c'=a'(b'c')$$

ولی، به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر عامل‌های a، a' و b، b' و c c' را به هم نزدیك کنیم، تفاضل حاصل ضرب‌ها، یعنی $abc-a'b'c'$ هم می‌تواند به اندازهٔ دلخواه کوچك شود (برای این منظور، می‌توان شبیه آن چه درشمارهٔ ۱۴، برای ضرب دوعامل انجام دادیم، استدلال کرد). از آن جا، بنابر پیش‌قضیهٔ ۲، برابری عددهای $(\alpha\beta)\gamma$ و $\alpha(\beta\gamma)$ نتیجه می‌شود.

برای حالتی هم که علامت عددها دلخواه باشد، می‌توان بلافاصله، وبادرنظرگرفتن «قانون علامت‌ها»، به‌همین نتیجه رسید. وقتی هم که، دست‌کم، یکی ازعامل‌های α، β و γ برابر صفر باشد، هردوحاصل‌ضرب برابر صفر می‌شود.

حالا، به‌ویژگی بعدی می‌پردازیم:

II. ۴°. به‌ازای هر عدد حقیقی و مخالف صفر α، عدد $\frac{1}{\alpha}$ (عکس عدد α) وجود دارد که در برابری زیر صدق می‌کند:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$$

کافی است. تنها حالت عدد گنگ α را در نظر بگیریم. ابتدا فرض می‌کنیم $\alpha>0$.

اگر α، به وسیلهٔ برش $A|A'$ تعریف شده باشد، برش مربوط به $\frac{1}{\alpha}$ را، به این ترتیب، می‌سازیم. در طبقهٔ پایین A، همهٔ عددهای گویای منفی، عدد صفر و همهٔ عددهای به‌صورت $\frac{1}{a'}$ را می‌آوریم، که در آن a' عبارت است از هرعدد دلخواهی از A'؛ درطبقهٔ بالای A' هم، همهٔ عددهای به‌صورت $\frac{1}{a}$ را قرار می‌دهیم، که در آن a عبارت است ازهرعدد مثبت دلخواه ازطبقه A. به‌سادگی معلوم می‌شود که، به‌این ترتیب، برشی به‌دست می‌آوریم که یك عدد حقیقی (و دراین حالت، گنگ) را تعریف می‌کند. این عدد را $\frac{1}{\alpha}$ می‌نامیم.

ثابت می‌کنیم، این عدد، درشرط موردنظر صدق می‌کند. طبق تعریف، حاصل‌ضرب $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$ عدد حقیقی منحصربه‌فردی است که بین عددهای به‌صورت $\frac{a}{a'}$ و $\frac{a'}{a}$ قرار گرفته است، که در آن، a و a' عددهای گویای مثبتی هستند که در نابرابری $a<\alpha<a'$ صدق

می‌کنند. ولی، عدد ۱ نیز، بین همین دو عدد قرار گرفته است:

$$\frac{a}{a'}<1<\frac{a'}{a}$$

و بنابراین، حاصل‌ضرب موردنظر هم، همین مقدار است.

درحالت $\alpha<0$، فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{|\alpha|}$$

دراین صورت، بنابرقانون علامت‌ها، داریم:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=|\alpha|\cdot\frac{1}{|\alpha|}=1$$

حالا کـه توانستیم ثابت کنیم، همهٔ ویژگی‌هـای بنیادی IV. ۱° تا ۴°، در مورد عددهای‌حقیقی هم درست‌است، معلوم می‌شود، برای‌این‌حوزه هم، همهٔ‌آن چه‌که درشمارهٔ ۴، دربارهٔ وجود خارج قسمت منحصر به فرد $\frac{\alpha}{\beta}$ (با شـرط $\beta\neq 0$) و غیـره آوردیـم، درست است.

ویژگی پخشی:

$$\boxed{(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma}\quad \text{III. ۵°}$$

هم، برای همهٔ عددهای حقیقی برقرار است و، به‌سادگی، می‌توان آن را برای عددهای مثبت ثابت‌کرد (شبیه اثبات ویژگی III. ۲°). همهٔ حالت‌های دیگر، به‌کمك تغییرعلامت دوطرف برابری، یا به‌طریق انتقال جمله‌ای از یك طرف به‌طرف دیگر برابری، به‌همین حالت اخیر منجر می‌شود. حالت خاصی هم،که درآن α، β، γ و $\alpha+\beta$ برابرصفرباشد، برابری دوطرف روشن است.

سرانجام، به‌این ویژگی می‌رسیم:

$$\boxed{\text{III. ۶° از } \beta<\alpha \text{ و } 0<\gamma \text{ نتیجه می‌شود } \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma,}$$

که بی هیچ زحمتی قابل تحقیق است. نابرابری $\alpha>\beta$ هم ارز $\alpha-\beta>0$ است و، در این صورت، بنا بر قانون علامت‌هـا، هم‌ارز $(\alpha-\beta)\cdot\gamma>0$. اگر ازویژگی پخشی (که برای تفاضل نیز درست است) استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید $\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\gamma>0$ و ازآن‌جا $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.

۱۶. نتیجه. می‌ماندکه «اصل ارشمیدس» را به‌خاطر بیاوریم:

IV. ۱°. عدد حقیقی γ هرچه باشد، عدد طبیعی n وجود دارد که بزرگتر از γ باشد.

تحقیق درستی این اصل ساده است. در طبقهٔ بالای برش $C|C'$، که معرف γ است، عدد c'، که بزرگتر از γ است پیدا می‌شود. به‌ازای عددهای گویا هم، این اصل درست است.

حالا دیگر می‌توان گفت: در حوزهٔ همهٔ عددهای حقیقی، به‌قانون‌های جبر مقدماتی، که مربوط به‌چهارعمل حسابی و برابری‌ها و نابرابری‌ها باشند، به‌طور کامل، برقرار است.

۱۷. قدرمطلق‌ها. در این‌جا، به‌آن‌چه دربارهٔ قدر مطلق‌ها گفته‌ایم، یادداشت‌هایی می‌افزاییم.

قبل از همه یادآور می‌شویم که نابرابری $|\alpha|<\beta$ (که البته، در آن $\beta>0$)، با نابرابری مضاعف $-\beta<\alpha<\beta$ هم‌ارز است. در واقع، از $|\alpha|<\beta$ نتیجه می‌شود که هم $\alpha<\beta$ و هم $-\alpha<\beta$، برعکس، اگر بدانیم $\alpha<\beta$ و $-\alpha<\beta$، در این صورت، به‌طور هم‌زمان خواهیم داشت: $\alpha<\beta$ و $-\alpha<\beta$. ولی، یکی از این دو عدد α و $-\alpha$ همان $|\alpha|$ است و، بنابراین، نابرابری $|\alpha|<\beta$ درست است.

به‌همین ترتیب، هم‌ارزی نابرابری‌های زیر هم ثابت می‌شود:

$$|\alpha|\leqslant\beta, \quad -\beta\leqslant\alpha\leqslant\beta$$

حالا، به‌اثبات نابرابری مفید زیر می‌پردازیم:

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

نابرابری‌های روشن زیر را باهم جمع می‌کنیم:

$$-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha|, \quad -|\beta|\leqslant\beta\leqslant|\beta|$$

به‌دست می‌آید:

$$-(|\alpha|+|\beta|)\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

و از این‌جا، با توجه به‌آن‌چه در همین شماره گفتیم، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.

به‌کمک روش استقرای ریاضی، می‌توان این نابرابری را، برای هر تعداد عدد نوشت:

$$|\alpha+\beta+\cdots+\gamma|\leqslant|\alpha|+|\beta|+\cdots+|\gamma|$$

اگر، در نابرابری که ثابت کردیم، β را به $-\beta$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

چون $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$، بنابراین $|\alpha|\leqslant|\alpha+\beta|+|\beta|$ و یا

$$|\alpha+\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$$

و شبیه‌آن $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|$

و چون، در عین حال داریم $|\beta|-|\alpha|\leqslant|\alpha-\beta|$

روشن می‌شود که

$$||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha-\beta|$$

همهٔ این نابرابری‌ها، در نظریهٔ حد کاربرد دارند.

§۴. ویژگی‌ها و کاربردهای دیگر عددهای حقیقی

۱۸. وجود ریشه. توان با نمای گویا. تعریف ضرب (و تقسیم) عددهای حقیقی، بلافاصله، منجر به تعریف توان با نمای صحیح مثبت (و منفی) می‌شود. برای رسیدن به توان با نمای گویا، ابتدا دربارهٔ وجود ریشه صحبت می‌کنیم.

همان طور که می‌دانیم، عدم وجود ریشه‌های ساده در بین عددهای گویا، یکی از دلیل‌های گسترش این حوزهٔ عددی بود. حالا می‌خواهیم تحقیق کنیم که این گسترش، تا چه اندازه، رخنه‌های قبلی را پر می‌کند (و ضمناً، رخنه‌های تازه‌ای به‌وجود نمی‌آورد).

α را، عددی حقیقی و n را، عددی طبیعی در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم، ریشهٔ nام عدد α، به‌عدد حقیقی ξ گفته می‌شود، به شرطی که داشته باشیم:

$$\xi^n=\alpha$$

تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که عددهای α، که در این رابطه صدق می‌کنند، مثبت باشند، یعنی به اصطلاح مقدارحسابی ریشه رامورد توجه قرارمی‌دهیم. ثابت‌می‌کنیم که این عدد ξ همیشه وجود دارد و ، ضمناً، منحصر به فرد است.

حکم مربوط به منحصر به فرد بودن عدد ξ، بلافاصله، از این‌جا نتیجه می‌شود که عددهای مثبت مختلف، متناظر با توان‌های مختلف آن‌هاست: اگر داشته باشیم $\xi'>\xi>0$، در آن‌صورت داریم $\xi'^n>\xi^n$.

اگر عدد گویای r وجود داشته باشد، به نحوی که توان nام آن برابر α شود، در این صورت، همین‌عدد، عدد مجهول ξ است. بنابراین، کافی‌است وضعی را درنظربگیریم که، چنین عدد گویایی وجود ندارد.

برش $X|X'$ را، در حوزهٔ همهٔ عددهای حقیقی، به این‌ترتیب می‌سازیم. درطبقهٔ X، همهٔ عددهای منفی، صفر و، همچنین، همهٔ عددهای مثبت گویای x را، که برای آن‌ها داریم $x^n<\alpha$، قرار می‌دهیم و در طبقهٔ X'، همهٔ عددهای گویا و مثبت x' را، که برای آن‌ها

داریم $x^n > \alpha$.

به سادگی معلوم می‌شود که این طبقه‌ها تهی نیستند و، ضمناً، X شامل عددهای مثبت هم می‌باشد. مثلاً، اگر عدد طبیعی m را طوری بگیریم کـه داشته باشیم $\frac{1}{m} < \alpha < m$ در این صورت خواهیم داشت $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$. در نتیجه، عدد $\frac{1}{m}$ در طبقهٔ X و عـدد m در طبقهٔ X' قرار می‌گیرد.

اکنون فرض کنید، عدد ξ بـه وسیلهٔ برش $X|X'$ تعریف شده باشد. ثابت می‌کنیم $\xi^n = \alpha$ یعنی $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$.

اگر ξ^n را، به عنوان حاصل ضرب n عامل برابر ξ در نظر بگیریم، براساس تعریف ضرب عددهای مثبت حقیقی [۱۴]، نتیجه می‌گیریم:

$$x^n < \xi^n < x'^n$$

x و x'، عددهای مثبت گویا هستند و، برای آن‌ها، داریم:

$$0 < x < \xi < x'$$

چون x متعلق به طبقهٔ X و x' متعلق به طبقهٔ X' است، بنابر تعریف این طبقه‌ها، داریم:

$$x^n < \alpha < x'^n$$

ولی تفاضل $x' - x$ را می‌توان از هر عدد $e > 0$ کوچکتر گرفت [۹، یادآوری]. ضمناً، هیچ چیز مانع از این نیست که x' را از عدد ثابتی مـانند x'_0 کوچکتر بگیریم. در این حالت، تفاضل

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \dots + x^{n-1}) < e \cdot n x'^{n-1}_0$$

نیز می‌تـواند، به اندازهٔ دلخواه، کوچك شود*. از این جا، بنابـر پیش قضیهٔ ۲، برابری عددهای ξ و α نتیجه می‌شود.

بعد از آن‌که وجود ریشه ثابت شد، بـا روش عادی، به مفهوم توان با هـر نمای گویای r پی می‌بریم و روشن می‌شود که برای این توان‌ها، همهٔ قانون‌های عادی مربوط به دورهٔ جبر مقدماتی، درست است:

$$\boxed{\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'} \quad , \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'}}$$

---

* عدد $e \cdot n x'^{n-1}_0$، ازهرعدد $e' > 0$ کوچکتر می‌شود، وقتی‌که $e' < \frac{e'}{n x'^{n-1}_0}$ انتخاب کنیم.

$$(\alpha^r)^{r'}=\alpha^{r\cdot r'}\ ,\ (\alpha\beta)^r=\alpha^r\cdot\beta^r$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r=\frac{\alpha^r}{\beta^r}\ ,\ \ldots$$

روی این مطلب تاکید می‌کنیم که با شرط $\alpha>1$، توان α^r، با صعودی بودن نمای گویای r، صعودی است.

۱۹. توان با هر نمای حقیقی. حالا، به تعریف توان هرعدد حقیقی (ومثبت) α، با هرنمای حقیقی β می‌پردازیم.

این توان‌های عدد α را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha^b \text{ و } \alpha^{b'}$$

که در آن، b و b' عددهایی گویا باشند و در نابرابری‌های زیر صدق کنند:

$$b<\beta<b'$$

توان عدد $\alpha>1$* با نمای β (که با علامت α^β نموده می‌شود)، به عدد حقیقی γ گفته می‌شودکه بین توان‌های α^b و $\alpha^{b'}$ قرارگرفته باشد:

$$\alpha^b<\gamma<\alpha^{b'} \qquad (1)$$

به سادگی معلوم می‌شود که چنین عددی، همیشه وجود دارد. در واقع، مجموعهٔ توان‌های $\{\alpha^b\}$ از بالا کران‌دار است. و مثلاً، به هر توان $\alpha^{b'}$، در این صورت، فرض می‌کنیم [۱۱]:

$$\gamma=\sup_{b<\beta}\{\alpha^b\}$$

به ازای این عدد خواهیم داشت:

$$\alpha^b\leqslant\gamma\leqslant\alpha^{b'}$$

با توجه به این‌که، می‌توان b را بزرگ و b' را کوچک کرد، علامت برابری را حذف می‌کنیم، یعنی عدد γ، که به این ترتیب ساخته شد، در نابرابری‌های (۱) صدق می‌کند.

حالا ثابت می‌کنیم، عددی که به این ترتیب ساخته شده منحصر به‌فرد است. برای این منظور، قبل از همه، یادآور می‌شویم که پیش‌قضیهٔ ۲ [۸]، در حالتی هم‌که شرط گویا بودن عددهای s و s' و e را حذف کنیم، به قوت خود باقی است و اثبات به‌همان ترتیب، انجام می‌شود.

---

*) برای حالت $\alpha<1$، می‌توان مثلاً فرض کرد، $\alpha^\beta=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$

سپس، از یک نابرابری بسیار ساده، ولی با اهمیت، که گاهی نابرابری برنولی (Jac Bernoulli) نامیده می‌شود، نام می‌بریم. اگر n عدد طبیعی وبزرگتر از ۱ و $\gamma > -1$ باشد، داریم:

$$\gamma^n \geq 1 + n(\gamma - 1) \qquad (۲)$$

در واقع، اگر فرض کنیم $\gamma = 1 + \lambda$ و $\lambda > -1$، بنابر رابطهٔ دو جمله‌ای نیوتون داریم:

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots$$

از آن جا که جمله‌های نوشته نشده، مثبت‌اند، به‌دست می‌آید:

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda$$

که هم‌ارز نابرابری (۲) است.

اگر در این‌جا $\gamma = \alpha^{\frac{1}{n}}$ را قرار دهیم $(\alpha > 1)$، به این نابرابری می‌رسیم:

$$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n} \qquad (۳)$$

و از همین نابرابری است که استفاده خواهیم کرد.

می‌دانیم، عددهای b و b' را می‌توان طوری انتخاب کرد که تفاضل $b' - b$، برای هرعدد طبیعی n، که از قبل داده شده است، کوچکتر از $\frac{1}{n}$ باشد. در این صورت، بنابر نابرابری (۳):

$$\alpha^{b'} - \alpha^b = \alpha^b(\alpha^{b'-b} - 1) < \alpha^b(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha^b \cdot \frac{\alpha - 1}{n}$$

چون b از هرعدد دلخواه (ولی ثابت) b'_0 کوچکتر است، کافی است داشته باشیم:

$$n > \frac{\alpha_0^{b'}(\alpha - 1)}{\varepsilon}$$

(که در آن، ε عبارت است از عددی مثبت و به اندازهٔ دلخواه کوچک)، تا بتوانیم بنویسیم:

$$\alpha^{b'} - \alpha^b < \varepsilon$$

در چنین حالتی، باتعمیم پیش‌قضیهٔ ۲، بین مرزهای α^b و $\alpha^{b'}$، دوعدد مختلف γ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

در حالت گویا بودن عدد β، تعریفی که در بالا دادیم، منجر به مفهوم عادی علامت α^{β} می‌شود.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که برای توان‌های با نمای هرعدد حقیقی، همهٔ قانون‌های معمولی توان درست است. به عنوان نمونه، قانون جمع نماها در ضرب را، ثابت می‌کنیم،

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

عددهای b، b' و c، c' را عددهایی می‌گیریم که به ازای آن‌ها داشته باشیم:

$$b<\beta<b', \qquad c<\gamma<c'$$

بنا بر تعریف جمع [۲]:

$$b+c<\beta+\gamma<b'+c'$$

و بنا بر تعریف توان:

$$\alpha^{b}<\alpha^{\beta}<\alpha^{b'}, \quad \alpha^{c}<\alpha^{\gamma}<\alpha^{c'} \text{ و } \alpha^{b+c}<\alpha^{\beta+\gamma}<\alpha^{b'+c'}$$

دو نابرابری مضاعف اول را در هم ضرب می‌کنیم (با توجه به این‌که، قانون جمع نماها برای حالتی که این نماها گویا باشند، ثابت شده است)، به دست می‌آید:

$$\alpha^{b+c}<\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}<\alpha^{b'+c'}$$

به این ترتیب، دو عدد $\alpha^{\beta+\gamma}$ و $\alpha^{\gamma} \cdot \alpha^{\beta}$ در محدودهٔ α^{b+c} و $\alpha^{b'+c'}$ (که می‌توانند به اندازهٔ کافی به هم نزدیک شوند) قرار می‌گیرند. از آن‌جا [بنا بر تعمیم پیش قضیهٔ ۲]، برابری دو عدد نتیجه می‌شود.

همچنین، تحقیق می‌کنیم که به ازای $\alpha>1$، توان α^{β}، با صعودی‌بودن نمای حقیقی β، صعودی است. اگرداشته باشیم $\beta<\beta$، دراین صورت، باقراردادن عددگویای r در بین آن‌ها $(\beta<r<\beta)$، بنابر تعریف توان با نمای حقیقی، خواهیم داشت:

$$\alpha^{\beta}<\alpha^{r} \text{ و } \alpha^{r}<a^{\beta} \Rightarrow \alpha^{\beta}<\alpha^{\beta}$$

۲۰. لگاریتم. با استفاده از تعریف توان با هر نمای حقیقی، می‌توانیم وجودلگاریتم را برای هرعدد حقیقی و مثبت γ، در مبنای مثبت $\alpha \neq 1$، ثابت کنیم (در این‌جا، به عنوان نمونه، $\alpha>1$ می‌گیریم).

اگر عددگویای r وجود داشته باشد، به نحوی که

$$\alpha^{r}=\gamma$$

در این صورت، r همان لگاریتم مورد جست‌وجو است. حالا فرض می‌کنیم، چنین عدد گویایی وجود داشته باشد. برش $B|B'$ را در حوزهٔ همهٔ عددهای گویا، به‌این ترتیب به‌وجود می‌آوریم. در طبقهٔ پایین B، عددهای گویای b را قرار می‌دهیم که برای آن‌ها، داشته باشیم $\alpha^b<\gamma$؛ و در طبقهٔ بالای B'، عددهای گویای b' را، که برای آن‌ها داشته باشیم $\alpha^{b'}>\gamma$.

ثابت می‌کنیم، طبقه‌های B و B' تهی نیستند، با توجه به نابرابری (۲) داریم:

$$\alpha^n>1+n(\alpha-1)>n(\alpha-1)$$

وکافی است، n را به این ترتیب انتخاب کنیم:

$$n>\frac{\gamma}{\alpha-1}$$

تا داشته باشیم $\alpha^n>\gamma$. این‌عددهای‌طبیعی n، متعلق به‌طبقهٔ B' هستند. درعین حال داریم:

$$\alpha^{-n}=\frac{1}{\alpha^n}<\frac{1}{n(\alpha-1)}$$

و کافی است انتخاب کنیم:

$$n>\frac{1}{\gamma(\alpha-1)}$$

تا داشته باشیم $\alpha^{-n}<\gamma$ و عدد $-n$ در طبقهٔ B قرار گیرد.

بقیهٔ شرط‌هایی هم‌که برای یك برش لازم است، در این‌جا وجود دارد.

برش $B|B'$، معرف عدد حقیقی γ است‌که‌بین عددهای دو طبقهٔ این برش‌قرار گرفته است. بنابر تعریف توان داریم:

$$\alpha^b<\alpha^\beta<\alpha^{b'} \qquad (b<\beta<b')$$

ضمناً، α عدد منحصربه‌فردی است‌که درهمهٔ نابرابری‌های مشابه صدق می‌کند. ولی، برای عدد γ داریم (بنابر خود ساختمان برش):

$$\alpha^b<\gamma<\alpha^{b'}$$

و بنابراین $\alpha^\beta=\gamma$ و $\beta=\log_\alpha\gamma$

وجود لگاریتم ثابت شد.

۲۱. اندازه‌گیری پاره‌خطها. یکی دیگر از دلیل‌های مهم به وجود آمدن عددهای گنگ، عدم امکان بیان طول همهٔ پاره خطها، در حوزهٔ عددهای گویا است. حالا ثابت می‌کنیم، این گسترش حوزهٔ عددی، برای حل مسالهٔ اندازه‌گیری پاره‌خطها کافی است.

ابتدا خود مساله را تنظیم کنیم.*

می‌خواهیم به‌هر پاره‌خط راست A، عدد مثبت وحقیقی مانند $l(A)$، که آن را «طول پاره‌خط A» می‌نامیم، نسبت دهیم، به‌نحوی‌که:

۱) پاره‌خط دلخواه E را، که قبلاً انتخاب کرده‌ایم (واحد طول)، طولی برابر ۱ داشته باشد: $l(E)=1$.

۲) پاره‌خطهای برابر، طول‌های برابر داشته باشند،

۳) درجمع پاره‌خطها، همیشه طول مجموع پاره‌خطها، برابر مجموع طول‌های پاره‌خطها باشد:

$$l(A+B)=l(A)+l(B)$$

این شرطها، منجر به‌وجود تنها یك جواب برای مسأله می‌شود.

ازشرطهای ۲) و ۳) نتیجه می‌شودکه، اگر واحد طول را به q قسمت برابرتقسیم کنیم، هر قسمت آن، طولی برابر $\frac{1}{q}$ دارد، و اگر از این قسمت‌ها p مرتبه تکرار کنیم، پاره‌خطی به‌دست می‌آیدکه طول آن، برابر $\frac{p}{q}$ است. بنابراین، اگربخواهیم پاره‌خط A را، که باواحد E مقیاس‌مشترك دارد، اندازه بگیریم وبدانیم که مقیاس مشترك پاره‌خطهای A و E، به‌ترتیب p و q مرتبه درآن‌ها جا بگیرد. لازم است داشته باشیم:

$$l(A)=\frac{p}{q}$$

به‌سادگی معلوم می‌شودکه این عدد، ارتباطی به‌مقیاس مشترك انتخاب شده ندارد. اگر پاره‌خطی‌که اندازه می‌گیریم، با واحد طول، مقیاس مشترك داشته باشد، بااین روش، به‌وسیلهٔ عددی گویا بیان می‌شود و، دراین‌صورت (برای چنین پاره‌خط‌هایی)، مسالهٔ اندازه‌گیری، به‌طورکامل، حل شده است.

اگر پاره‌خط A بزرگتراز پاره‌خط B باشد، به‌نحوی‌که داشته باشیم $A=B+C$ ــ که درآن، C نیز یك‌پاره‌خط است ــ باتوجه به‌شرط ۳) باید داشته باشیم:

$$l(A)=l(B)+l(C)$$

وچون $l(C)>0$، بنابراین به‌دست می‌آید: $l(A)>l(B)$، به‌این‌ترتیب، پاره‌خطهای

---

*) ما دراین‌جا، از آگاهی‌هایی‌که از هندسهٔ دبیرستانی داریم، استفاده کرده‌ایم و اصل‌مربوط به‌آن را، مرتب نکرده‌ایم.

نابرابر، طول‌های نابرابر دارند و، به‌ویژه، پاره‌خطی که بزرگتر است، طول بزرگتر دارد.

چون هر عدد گویای مثبت $\frac{p}{q}$، عبارت است از طول پاره‌خطی که با واحد E مقیاس مشترک داشته باشد، ضمناً، این مطلب روشن می‌شود که اگر پاره‌خطی با واحد، مقیاس مشترک نداشته باشد، نمی‌تواند طولی گویا داشته باشد.

فرض کنید Σ چنین پاره‌خطی باشد که با E مقیاس مشترک ندارد. مجموعهٔ نامتناهی از پاره‌خط‌های S و S' پیدا می‌شود که با E مقیاس مشترک داشته باشند و، به‌ترتیب، کوچکتر و بزرگتر از Σ باشند.* اگر طول این پاره‌خط‌ها را s و s' بگیریم: $l(S)=s$ و $l(S')=s'$، در این‌صورت، طول موردنظر $l(\Sigma)$، باید در نابرابری‌های زیر صدق کند:**

$$s<l(\Sigma)<s'$$

اگر همهٔ عددهای گویا را، به دو طبقهٔ $\mathbf{S}$ و $\mathbf{S'}$ تقسیم کنیم، به‌نحوی که در طبقهٔ پایین $\mathbf{S}$، عددهای s (وعلاوه بر آن، همهٔ عددهای منفی وصفر)، و در طبقهٔ بالای $\mathbf{S'}$، همهٔ عددهای s' قرار گرفته باشند، آنگاه برشی در حوزهٔ عددهای گویا به‌دست می‌آید. از آن‌جا که در طبقهٔ پایین، بزرگترین عدد و در طبقهٔ بالا، کوچکترین عدد، وجود ندارد، بنابراین، با این برش، عدد گنگ σ تعریف می‌شود. این، یک عدد منحصر به‌فرد حقیقی است که در نابرابری‌های $s<\sigma<s'$ صدق می‌کند. وهمین عدد هم، باید برابر طول $l(\Sigma)$ پذیرفته شود.

حالا فرض می‌کنیم، طول هر پاره‌خطی را ــ چه با E مقیاس مشترک داشته باشد و چه نداشته باشد ــ با این روش شرح دهیم. برقراری شرط‌های ۱) و ۲) روشن است. دو پاره‌خط P و Σ را با این طول‌ها درنظر می‌گیریم:

$$\rho=l(\mathrm{P}),\sigma=l(\Sigma)$$

مجموع این دو پاره‌خط را، پاره‌خط $T=\mathrm{P}+\Sigma$ می‌گیریم، که طول آن به‌وسیله $\tau=l(T)$ نشان‌داده شده باشد. عددهای مثبت r، r' و s، s' را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$r<\rho<r', \qquad s<\sigma<s'$$

پاره‌خط‌های R، R' و S، S' را چنان می‌سازیم که این عددها، طول‌های آن‌ها باشند.

---

*) این مطلب را می‌توان به‌سادگی و باتوجه به اصل ارشمیدس (البته، از نظر هندسی، که در شمارهٔ ۵ از آن صحبت کردیم)، ثابت کرد.

**) یادآور می‌شویم که این نابرابری‌ها، برای حالتی هم که Σ با واحد طول مقیاس مشترک دارد، درست است.

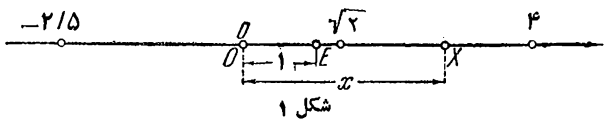
پاره‌خط $R+S$ (به‌طول $r+s$) کوچکتر از T، و پاره‌خط $R'+S'$ (به‌طول $r'+s'$) بزرگتر از T است. بنابراین

$$r+s<\tau<r'+s'$$

ولی [شمارهٔ ۱۲ را ببینید]، عدد حقیقی منحصربه‌فردی که بین عددهای به‌صورت $r+s$ و $r'+s'$ قرار گرفته است، عبارت‌است‌از مجموع $\rho+\sigma$ و ازآن‌جا $\tau=\rho+\sigma$.

درستی ویژگی اخیر، برای حالتی که تعداد جمله‌های جمع متناهی باشد، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود.

اگر روی محور (خط راست جهت‌دار) مبداء O و واحد OE را انتخاب کنیم (شکل ۱)، دراین‌صورت: هرنقطهٔ X از این‌خط، متناظر است بایك عددحقیقی وطول‌آن،



شکل ۱

برابر است باانداز‌هٔ طول پاره‌خط OX. این عدد وقتی مثبت است‌که X درطرف مثبت نقطه O قرار داشته باشد و وقتی منفی است‌که درطرف مخالف آن باشد.

طبیعی است‌که این پرسش پیش آید: آیا هرعدد حقیقی x هم، متناظر با نقطه‌ای‌از این خط است؟ درهندسه، به‌این پرسش جواب مثبت داده می‌شود. درآن‌جا، برای اثبات این حکم، از اصل مربوط به‌پیوستگی خط راست (شبیه به‌پیوستگی حوزهٔ عددهای‌حقیقی) کمك گرفته می‌شود.

به‌این‌ترتیب می‌توان، بین همهٔ عددهای حقیقی، از یك‌طرف، همهٔ نقطه‌های واقع برخط راست جهت‌دار (محور)، ازطرف دیگر، تناظر یك به‌یك برقرارکرد. عددهای حقیقی را می‌توان، به‌وسیلهٔ نقطه‌های واقع بریك محور، بیان‌کرد و ، به‌همین مناسب‌است که، آن را محور عددی نامند.

MATH75.IR

فصل اول

نظریهٔ حد

§۱. واریانت و حدآن

۲۲. کمیت متغیر. واریانت. در فیزیك ودیگر دانش‌های مربوط به‌طبیعت، به‌مجموعه‌ای ازکمیت‌های مختلف برمی‌خوریم: زمان، طول، حجم، وزن و غیره. این کمیت‌ها، بسته به‌وضع و موقعیت خود، می‌توانند مقادیرمختلف، یا یك مقدارمنحصر را بپذیرند. درحالت اول، با کمیت متغیر و در حالت دوم با مقدار ثابت سروکار داریم.

با وجود این، در ریاضیات، از معنای فیزیکی کمیت‌های مورد نظر چشم می‌پوشیم و تنها به‌عددهایی توجه داریم، که معرف آن‌ها هستند. معنای فیزیکی کمیت‌ها، تنها وقتی کسب اهمیت می‌کنندکه با ریاضیات کار بسته سروکار داشته باشیم. به‌این ترتیب، برای ما، کمیت متغیر (یا به طور ساده، متغیر)، عبارت است از متغیر انتزاعی یا عددی، که با یك نماد (و مثلاً، حرف x) نشان داده می‌شود و می‌توان مقداری عددی، به آن نسبت داد.

متغیر، وقتی مفروض به‌حساب می‌آید، که مجموعهٔ $\{x\}=\mathfrak{M}$، مجموعهٔ مقدارهایی که این متغیر می‌تواند اختیارکند، مفروض باشد. بهتر است که کمیت ثابت (یا به‌طور ساده، ثابت) را هم، همچون حالت خاصی ازمتغیر، در نظر بگیریم که، در واقع، نظیراین فرض است که مجموعهٔ $\{x\}=\mathfrak{M}$، تنها یك عضو داشته باشد.

برای این که مفهوم حد متغیر x روشن شود، تنها این آگاهی که، متغیرمقادیر خود را ازکدام مجموعهٔ عددی $\mathfrak{M}$ به‌دست می‌آورد، کافی‌نیست. لازم است بدانیم که، به‌خصوص، کدام مقادیر را (که در بین آن‌ها، ممکن است مقادیر تکراری هم وجود داشته باشد)، و به چه ترتیبی، اختیار می‌کند. بحث مربوط به متغیر سمت‌دار و حدآن را به بعد، در طرح کلی پایان جلد دوم*، موکول می‌کنیم (تا خواننده، تجربهٔ لازم را، دراین زمینه، اندوخته باشد) و در این فصل، تنها به آموزش یکی از ساده‌ترین و، در عین حال، مهم‌ترین نوع

*) درآن‌جا، بخش تکمیلی «نقطه‌نظرکلی دربارهٔ حد» را ببینید.

خاص چنین کمیت متغیری، اکتفا می کنیم.

از مفهوم دنبالهٔ عددی، آغاز می کنیم، رشتهٔ عددهای طبیعی را در نظر می گیریم:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, n', \ldots \qquad (1)$$

که در آن، عددها، به ترتیب صعودی قرار گرفته‌اند. بنابراین، عدد بزرگتر n' بعد از عدد کوچکتر n می آید (یا عدد کوچکتر n پیش از عدد بزرگتر n' قرار دارد). حالا، اگر در رشتهٔ (۱)، طبق قانون، هر عدد طبیعی n را با عدد حقیقی x_n جای گزین کنیم، به دنبالهٔ عددی زیر می‌رسیم:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \qquad (2)$$

دراین دنبالهٔ عددی، همهٔ جمله‌ها یا عضوها، به‌کمك عددهای طبیعی، شماره گذاری شده‌اند و به ترتیب صعودی شماره‌ها، قرار گرفته‌اند: به ازای $n' > n$، جملهٔ $x_{n'}$ بعد از جملهٔ x_n (x_n پیش از $x_{n'}$) واقع شده است؛ و این، بدون ارتباط با این واقعیت است که خود عدد $x_{n'}$، بزرگتر یا کوچکتر از عدد x_n، و یا حتی با آن برابر، باشد.*

وقتی که متغیر x، مقادیر یك دنبالهٔ عددی (۲) را اختیار کند ــ به‌تبعیت از نام گذاری «مه‌رای» (*Ch. Meray*) ــ آن را واریانت (*variante*) می نامیم؛ واین، آن گونه متغیری است که ما در این‌جا، به بررسی آن اکتفا می کنیم.

در دورهٔ درس ریاضی دبیرستانی هم: متغیر نوع واریانت، طرح شده است، مثلاً، در دنباله به‌صورت

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{a+d}, \underset{3}{a+2d}, \ldots, \underset{n}{a+(n-1)d}, \ldots$$

(تصاعد حسابی) و یا به‌صورت

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{aq}, \underset{3}{aq^2}, \ldots, \underset{n}{aq^{n-1}}, \ldots$$

(تصاعد هندسی). جملهٔ متغیر این یا آن تصاعد، واریانت است.

معمولاً، برای تعیین طول محیط دایره، محیط متغیر چندضلعی منتظم محاط در دایره را در نظر می گیرند، به‌این ترتیب که، از شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره آغاز می کنند و با دو برابر کردن پی‌درپی تعداد ضلع‌های آن، به دوازده‌ضلعی، بیست‌وچهارضلعی و غیره

---

*) به‌همین ترتیب، می‌توان مفهوم دنبالهٔ نقطه‌های واقع بر یك پاره‌خط، یا چیزهایی باسرشت دیگر، را تعریف کرد.

می‌رسند. این واریانت، دنبالهٔ مقادیر زیر را اختیار می‌کند:

$$p_{۶} = ۶R, \qquad p_{۱۲} = ۱۲R\sqrt{۲-\sqrt{۳}},$$
$$\underset{۱}{} \qquad \underset{۲}{}$$

$$p_{۲۴} = ۲۴R\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}, \quad p_{۴۸}, \cdots$$
$$\underset{۳}{} \qquad \underset{۴}{}$$

تقریب‌های دهدهی $\sqrt{۲}$ (در این‌جا، تقریب‌های نقصانی را می‌گیریم) را به خاطر آوریم. اگر این تقریب‌ها را به‌ترتیب صعودی بنویسیم، دنبالهٔ مقادیر زیر به‌دست می‌آید:

$$\underset{۱}{۱/۴}, \quad \underset{۲}{۱/۴۱}, \quad \underset{۳}{۱/۴۱۴}, \quad \underset{۴}{۱/۴۱۴۲}, \cdots$$

که بازهم نمایشگر یك واریانت است.

متغیر x که دنبالهٔ (۲) را می‌پیماید، غالباً، به وسیلهٔ x_n نشان داده می‌شود و آن را «جملهٔ عمومی» همان دنباله گویند.

گاهی، واریانت x، مستقیماً و به‌وسیلهٔ عبارتی که x_n را معین می‌کند، داده شده‌است. در تصاعدهای حسابی و هندسی، به‌ترتیب، داریم: $x_n = a+(n-۱)d$ و $x_n = aq^{n-۱}$. با استفاده ازچنین عبارتی، می‌توان مقدار دلخواه واریانت را، از روی شمارهٔ ردیف آن، و بدون محاسبهٔ مقادیر قبلی، حساب کرد.

برای محیط چندضلعی منتظم محاطی، جملهٔ عمومی، تنها با وارد کردن عدد π پیدا می‌شود. محیط p_m، mضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع R، ازاین دستور به‌دست‌می‌آید:

$$p_m = ۲mR\sin\frac{\pi}{m}$$

درسایر حالت‌ها، ممکن است جملهٔ عمومی x_n از دنبالهٔ (۲)، برای ما معلوم نباشد. با وجود این، دنبالهٔ (۲)، و همراه با آن واریانت نظیرش، وقتی معلوم به حساب می‌آید که بتوانیم، طبق قاعدهٔ مشخصی، مقدار واریانت را، تنها از روی شمارهٔ ردیف آن، محاسبه کنیم. مثلاً، با دانستن قاعدهٔ محاسبهٔ تقریبی جذر، می‌توانیم همهٔ دنبالهٔ مقادیر تقریبی و دهدهی $\sqrt{۲}$ را، معلوم به‌حساب آوریم، ولو این‌که عبارت جملهٔ عمومی آن را نمی‌دانیم.

اگر واریانت، به‌معنایی که آوردیم، معلوم باشد، در آن صورت، نه تنها همهٔ مجموعهٔ مقادیری که اختیار می‌کند، کاملاً، معلوم است، بلکه، ردیف هر مقدار هم معین است. هر شماره ردیفی، نظیر مقدار واریانت خودش می‌باشد و از دو مقدار واریانت، هرکدام که شمارهٔ ردیفش بزرگتر است، مقدار بعدی به‌حساب می‌آید.

یك بار دیگر تاکید می‌کنیم: لزومی ندارد که مقادیر واریانت متفاوت باشد. مثلاً،

اگر واریانت با یکی از دستورهای زیر داده شده باشد:

$$x_n = 1^n, \quad x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$$

درآن صورت، دنباله‌های نظیر، چنین خواهند بود:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{3}, \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

در حالت اول، به‌طور ساده، مقداری ثابت داریم. همهٔ عضوهای مجموعه‌ای که واریانت درنظر گرفته شده، برابر ۱ است. در حالت دوم، این مجموعه، از دو مقدار ۱ و ۱ −، که به‌نوبت می‌آیند، تشکیل شده است. بالاخره در حالت سوم، مجموعهٔ مقادیرمتغیر نامتناهی است، ولی این، مانع ازآن نشده است که مقادیر متغیر، یك‌درمیان، برابره باشد. دراین حالت، باید صفری را که در ردیف پنجم قرار گرفته است، نه تنها بعد از مقدار۱، در ردیف دوم، بلکه ضمناً بعد از مقدار صفر، در ردیف اول، به‌حساب آوریم.

۲۳. حد واریانت. خواننده با این مفهوم نیز، از سال‌های دبیرستان، آشناست. اینك تعریف دقیق آن:

عدد ثابت a را، حد واریانت $x = x_n$ نامند، وقتی که برای هر عدد مثبت و به قدر کافی کوچك ε، شمارهٔ ردیفی مانند N وجود داشته باشد، به نحوی که همهٔ مقادیر x_n، که در مورد آن‌ها $n > N$ است، در نابرابری زیر صدق کنند:

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (۳)$$

این واقعیت که a حد واریانت است، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x = a \text{ حد } \quad \text{یا} \quad x_n = a \text{ حد}$$

(می‌توان به‌جای «x حد» نوشت «$\lim x$»؛ «$\lim$»، خلاصهٔ واژهٔ لاتینی «$limes$»، به‌معنای حد است). می‌توان گفت که: متغیر به‌سمت a میل می‌کند و نوشت:

$$x_n \to a \quad \text{یا} \quad x \to a$$

همچنین، می‌گویند، عدد a، حددنبالهٔ (۲) است و، دراین‌صورت، دنباله را متقارب یاهم‌گرا

نامند و می‌گویند که: دنبالهٔ (۲) به‌سمت a متقارب است (یا به‌سمت a می‌گراید).

این تعریف را، به‌طور اختصار، می‌توان به‌این‌ترتیب، تنظیم کرد:

عدد a، حد واریانت $x=x_n$ است، اگر تفاضل مقادیر واریانت (با شروع ازجایی به‌بعد) با a، به‌قدرکافی کوچك باشد.

نابرابری (۳)، که درآن مقدار ε اختیاری است، ضبط دقیق این بیان است که x_n و a «تفاضل به‌قدرکافی کوچك دارند» و شمارهٔ ردیف N، درست «جایی را که با شروع از آن»، این کیفیت به‌وجود می‌آید، نشان می‌دهد. ذکر این مطلب مهم است که عدد N را، به‌طور کلی و یك‌بار برای همیشه، نمی‌توان مشخص کرد؛ این عدد، بستگی به‌انتخاب عدد ε دارد. برای تأکید بر این مطلب، بهتر است به‌جای N، عدد N_ε را بنویسیم. درحالت کلی، با کوچکتر شدن عدد ε، شمارهٔ نظیر آن $N=N_\varepsilon$، بزرگتر می‌شود.

هرقدر نزدیکی مقدار واریانت x_n به a بیشتر باشد، به‌همان نسبت، باید آن را در دنبالهٔ (۲)، دورتر گرفت. استثنا، موقعی است که همهٔ مقادیر واریانت x_n، برابر عدد ثابت a باشند و روشن‌است که دراین‌صورت: x_n حد $=a$. ولی، دراین‌حالت، نابرابری (۳)، به‌ازای هرمقدار دلخواه $\varepsilon>0$، برای همهٔ مقادیر x_n درست است.*

همان‌طور که می‌دانیم [۱۷]، نابرابری (۳) با این نابرابری هم‌ارز است:

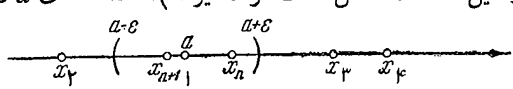
$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

و یا

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \qquad (۴)$$

و اغلب، ازهمین نابرابری، در دنباله‌ها، استفاده خواهیم کرد.

اگر عدد a، ε و مقدار x_n واریانت را، به‌وسیلهٔ نقطه‌هایی، روی محور عددی [۲۱] نمایش دهیم، (شکل ۲)، به‌تعبیر عینی و هندسی حد واریانت می‌رسیم. هر قدر، پاره‌خط به‌مرکز نقطهٔ a (به‌طول 2ε) کوچك اختیارشود باید همهٔ نقطه‌های x_n، با شروع از یکی ازآن‌ها، در درون این پاره‌خط قرار گیرند (بنابراین، دربیرون این پاره‌خط، تنها تعدادی متناهی از این نقطه‌ها، ممکن است قرار گیرند). نقطهٔ حدی a را، می‌توان به‌عنوان



شکل ۲

* به طرز مشابهی، این کیفیت، برای واریانت x_n، که با شروع از جایی به بعد، برابر a می‌شود، برقرار است.

مرکز تراکم نقطه‌های نمایندهٔ مقادیر واریانت در نظر گرفت.

۲۴. کمیت‌های بی‌نهایت کوچک. حالتی که واریانت به‌سمت صفر میل کند: $x_n \to 0$، به‌خصوص، جالب است. واریانت x_n، اگر دارای حد صفر باشد، کمیت بی‌نهایت کوچک یا، به‌طور ساده، بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود.

اگر در تعریف حد واریانت [۲۳]، $a = 0$ فرض شود، در آن صورت، نابرابری (۳)، چنین می‌شود:

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon \text{ به‌ازای})$$

به‌این ترتیب، تعریف قبلی بی‌نهایت کوچک را، بدون یاری جستن از واژهٔ «حد»، می‌توان تنظیم کرد:

واریانت x_n را بی‌نهایت کوچک نامند، وقتی که با آغاز از جایی، از لحاظ قدر مطلق، از عدد مفروض به‌قدر کافی کوچک $\varepsilon > 0$ کوچکتر باشد و کوچکتر بماند.

واژهٔ «کمیت بی‌نهایت کوچک» (که در طول زمان شکل گرفته است و، شاید هم، کاملاً به‌جا، انتخاب نشده باشد)، نباید موجب این اشتباه شود که: اگر هم مقدار انتخاب شدهٔ این کمیت ــ که به‌طور جداگانه اختیار می‌شود ــ صفر نباشد، نمی‌تواند مانند «کوچک» در نظر گرفته شود. واقع این است که این کمیت متغیر*، تنها در جریان تغییرهای خود می‌تواند از عدد دلخواه و مفروض $\varepsilon > 0$ کوچکتر شود.

اگر به‌حالت کلی واریانت x_n با حد a برگردیم، در آن صورت، تفاضل

$$\alpha_n = x_n - a$$

بین متغیر و حد آن، به‌روشنی، یك بی‌نهایت کوچک است، زیرا بنابر (۳)

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon \text{ به‌ازای})$$

برعکس، اگر α_n بی‌نهایت کوچک باشد، و در آن صورت $x_n \to a$ و، از آن، حکم زیر حاصل می‌شود:

برای آن که واریانت x_n دارای حد ثابت a باشد، لازم و کافی است که تفاضل آن‌ها $\alpha_n = x_n - a$، بی‌نهایت کوچک باشد.

در این مورد، برای مفهوم «حد»، می‌توان تعریف دیگری (هم‌ارز تعریف قبلی) ارائه داد: عدد ثابت a را حد واریانت x_n نامند، اگر تفاضل آن‌ها، بی‌نهایت کوچک باشد. روشن است که، اگر تعریف حد را، به‌صورت اخیر، بپذیریم، باید برای بی‌نهایت

*) به‌استثنای حالت بی‌معنی اتحاد با صفر.

کوچك، ازمیان تعریف‌های قبلی، دومی را مورداستفاده قرار دهیم، وگرنه دچار دوربا‌طل می‌شویم: تعریف حد از روی بی‌نهایت‌کوچك وتعریف بی‌نهایت‌کوچك از روی‌حد.

بنا براین، اگر واریانت $x_n \to a$، می‌توان آن را به‌صورت

$$x_n = a + \alpha_n$$

نوشت، که در آن، α_n یك بی‌نهایت‌کوچك است، برعکس، اگر واریانت x_n بتواند به‌آن‌صورت درآید، دارای حدی برابر a است. از این مطلب، در عمل، برای تعیین حد متغیر استفاده می‌شود.

۲۵. چندمثال. ۱) واریانت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad x_n = -\frac{1}{n}, \qquad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

که دنبالهٔ مقادیر متناظر آن‌ها، چنین است:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ldots$$

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \ldots$$

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \ldots$$

هرسه متغیر، بی‌نهایت‌کوچك‌اند و دارای حد ۰ هستند. درواقع، برای آن‌ها داریم:

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

(تنها برای $n > \frac{1}{\varepsilon}$). به‌این‌ترتیب، به‌عنوان N_ε، می‌توان مثلاً بزرگترین عدد درست موجود در $\frac{1}{\varepsilon}$، یعنی $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$* را اختیار کرد.

توجه کنیم که در دنبالهٔ اول، متغیر همواره‌ازحد خود ۰ بزرگتر و در دومی، همواره

---

*) به‌طور کلی، بزرگترین‌عدد درستی را، که از p تجاوزنکند، یا به‌طور ساده‌تر، بخش‌درست عدد p را با $E(p)$ نشان می‌دهند. E، حرف‌اول واژهٔ فرانسوی *Entier*، به‌معنای «درست»است.

از آن کوچکتر است. در دنبالهٔ سوم، مقدار متغیر، به‌ترتیب بزرگتر و کوچکتر از حد خود می‌شود.

۲) اگر فرض شود

$$x_n = \frac{۲+(-۱)^n}{n}$$

در آن‌صورت، متغیر، دنبالهٔ این مقدارها را می‌پیماید:

$$۱,\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \frac{۳}{۴},\ \frac{۱}{۵},\ \frac{۳}{۶},\ \ldots$$

در این‌حالت نیز $x_n \to ۰$، زیرا برای $n > \frac{۳}{\varepsilon}$

$$|x_n| \leqslant \frac{۳}{n} < \varepsilon$$

پس، برای N_ε، می‌توان $E\left(\frac{۳}{\varepsilon}\right)$ را اختیار کرد.

در این‌جا، با ویژگی جالبی روبه‌رو هستیم: متغیر به‌نوبت به‌حد خود ۰ نزدیک و از آن دور می‌شود.

۳) حالا فرض می‌کنیم:

$$x_n = \frac{۱+(-۱)^n}{n}$$

با این واریانت قبلاً، در انتهای شمارهٔ ۲۲، سر و کار داشتیم. در این‌جا هم $x_n \to ۰$، زیرا به‌ازای $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{۲}{\varepsilon}\right)$ داریم:

$$|x_n| \leqslant \frac{۲}{n} < \varepsilon$$

می‌بینیم که به‌ازای همهٔ مقادیر فرد n، متغیر با حد خودش برابر می‌شود. این مثال‌ها، از آن جهت جالب‌اند، که امکان‌های مختلفی را، که شامل تعریف‌های قبلی واریانت می‌شوند، مشخص می‌کنند.

مهم این نیست که، آیا مقدارهای متغیر در یک‌طرف حد قرار دارند یا در دو طرف

آن؛ یا این‌که، در هر گام به‌حد خود نزدیك می‌شود یا نه؛ و یا این‌که بالاخره، متغیر به‌حد خودش می‌رسد، یعنی مقداری برابر حد اختیار می‌کند یا نه! تنها چیزی که مهم است، همان چیزی است که در تعریف آورده می‌شود: اختلاف متغیر و حد، در نهایت، یعنی به‌ازای مقدارهای به‌قدر کافی دور آن، باید به‌قدر کافی کوچك باشد.

۴) واریانت بغرنج‌تری را انتخاب می‌کنیم:

$$x_n=\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$$

و ثابت می‌کنیم که حد آن، برابر است با عدد $\frac{1}{3}$.

برای این‌منظور، تفاضل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x_n-\frac{1}{3}=\frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}$$

و قدرمطلق آن را برآورد می‌کنیم. به‌ازای $n>2$ داریم:

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}<\frac{5n}{3(3n^2-4)}<\frac{5n}{3.2n^2}<\frac{1}{n}$$

بنابراین، اگر داشته باشیم $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$، عبارت $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|$ کوچکتر از ε می‌شود

و، درنتیجه، ثابت می‌شود: $x_n\to\frac{1}{3}$.

۵) این واریانت را درنظر می‌گیریم:

$$x_n=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\qquad(a>1)$$

و ثابت می‌کنیم $x_n\to 1$.

اگر نابرابری (۳) شمارهٔ ۱۹ را به‌کار ببریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$|x_n-1|=\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}<\varepsilon\quad\left[\text{به‌ازای } n>N_\varepsilon=E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)\right]$$

باوجود این، به‌نحو دیگری هم می‌توان استدلال کرد، نابرابری

$$|x_n-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$$

هم‌ارز است با

$$\frac{1}{n}<log_a(1+\varepsilon) \Rightarrow n>\frac{1}{log_a(1+\varepsilon)}$$

بنابراین، نابرابری به‌ازای $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{1}{log_a(1+\varepsilon)}\right)$ برقرار است.

برحسب روش‌های مختلفی که انتخاب کردیم، به‌عبارت‌های مختلفی برای N_ε رسیدیم. مثلاً، به‌ازای $a=10$، $\varepsilon=0/01$، با روش اول $N_{0/01}=\frac{9}{0/01}=900$ و با روش دوم $N_{0/01}=E\left(\frac{1}{0/00432\ldots}\right)=231$ به‌دست می‌آید. با روش دوم، کوچکترین مقدار از مقدارهای ممکن برای $N_{0/01}$ پیدا می‌شود، زیرا $10^{\frac{1}{231}}=1/010017\ldots$، که اختلافش با ۱ بیشتر است تا $\varepsilon=0/01$. درحالت کلی نیز همین‌طور است، زیرا به‌سادگی دیده‌می‌شود که به‌ازای $n\leqslant\frac{1}{log_a(1+\varepsilon)}$، لازم است که $\varepsilon\geqslant 1-a^{\frac{1}{n}}$.

با توجه به‌این استدلال معلوم‌می‌شود که، وقتی صحبت تنها درباره‌ٔ گرایش به‌حد است، مسأله‌ٔمربوط به‌کوچک‌ترین مقدارممکن N_ε اهمیتی ندارد؛ آن‌چه اهمیت دارد، این است که‌نابرابری (۳)، با آغاز از جایی، و بی‌توجه به‌دور یا نزدیک‌بودن آن، تأمین شود.

۶) مثال مهم بی‌نهایت‌کوچک، عبارت است‌از $\alpha_n=q^n$، که در آن $|q|<1$

برای اثبات این‌که $\alpha_n\to 0$، نابرابری

$$|\alpha_n|=|q|^n<\varepsilon$$

را درنظر می‌گیریم که هم‌ارز است با *

$$n\cdot log|q|<log\varepsilon \Rightarrow n>\frac{log\varepsilon}{log|q|}$$

به‌این‌ترتیب، اگر (با درنظرگرفتن $\varepsilon<1$) فرض کنیم:

---

*) دراین‌جا (و از این به‌بعد)، منظور از $log x$، همان $log^{10}x$ است. باید توجه داشت $|q|<1$ و $log|q|<0$ و، بنابراین، درتقسیم‌دوطرف نابرابری به‌این عدد، جهت‌نابرابری عوض می‌شود.

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{log\varepsilon}{log|q|}\right)$$

در آن‌صورت، برای $n > N_\varepsilon$، مسلماً نابرابری موردنظر، برقرار می‌شود.

به‌ترتیب مشابهی، و به‌سادگی، ثابت می‌شود که واریانت

$$\beta_n = A.q^n$$

نیز، که در آن بازهم $|q|<1$ و A عدد ثابتی است، بی‌نهایت کوچك است.

۷) حالا، تصاعد هندسی نامتناهی نزولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \qquad (|q|<1)$$

و پرسش مربوط به‌مجموع آن را پیش می‌کشیم.

معلوم است که منظور از مجموع تصاعد نـامتناهی، عبارت است از تعیین حدی که مجموع S_n ــ مجموع n جملهٔ آن ــ وقتی n به‌طور نامحدود ترقی کند، به سمت آن میل کند. می‌دانیم

$$S_n = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}.q^n$$

بنابراین، تفاضل واریانت S_n و مقدار ثابت $\frac{a}{1-q}$، عبارت‌است از کمیت $\alpha_n = \frac{a}{1-q}q^n$ که، به‌طوری که دیدیم، یك بی‌نهایت کوچك است. درنتیجه از روی تعریف دوم حد، مجموع موردنظر تصاعد عبارت است‌از

$$S = \text{حد}\ S_n = \frac{a}{1-q}$$

به‌این‌ترتیب، این عدد، عبارت است از مجموع عضوهای بی‌شمار تصاعد، که چنین نوشته می‌شود:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots = \frac{a}{1-q}$$

۸) فرض‌می‌کنیم $x_0 = a$ و $x_1 = b$ (a و b، دوعدد مفروض‌اند) و،ضمناً،مقدارهای بعدی واریانت x_n با این تساوی به‌دست می‌آیند:

$$x_n=\frac{x_{n-۲}+x_{n-۱}}{۲} \qquad (n\geqslant ۲)$$

این واریانت واقعاً داده شده است، زیرا بافرض $n=۲،۳،۴،\ldots$، می‌توان، پشت سرهم، همهٔ مقدارهای آن را تا هرجملهٔ دلخواه پیدا کرد.

اگر از دوطرف برابری مربوط به x_n، مقدار $x_{n-۱}$ را کم کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$x_n-x_{n-۱}=-\frac{۱}{۲}(x_{n-۱}-x_{n-۲}) \qquad (n=۲،۳،۴،\ldots)$$

به‌این‌ترتیب، در ردیف تفاضل‌های

$$x_۱-x_۰=b-a،\ x_۲-x_۱،\ \ldots،\ x_{n-۱}-x_{n-۲}،\ x_n-x_{n-۱}،\ldots$$

با شروع ازجملهٔ دوم، می‌توان هرجمله‌را ازضرب جملهٔ قبلی در $-\frac{۱}{۲}$ به‌دست‌می‌آید. یعنی، دراین‌جا، با یك تصاعد هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۲}$ سروکارداریم وچون، مجموع n جملهٔ آن برابر x_n-a است، با استفاده از رابطهٔ معلوم مربوط به‌مجموع جمله‌های تصاعد هندسی، نتیجه می‌شود:

$$\text{حد}\ (x_n-a)=\frac{b-a}{۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۲}{۳}(b-a)$$

و از آن‌جا، به‌سادگی، نتیجه می‌شود:

$$\text{حد}\ x_n=a+\frac{۲}{۳}(b-a)=\frac{a+۲b}{۳}$$

۹) مانند تصاعد هندسی، می‌توان دنبالهٔ عددی دلخواه

$$a_۱،\ a_۲،\ a_۳،\ \ldots،\ a_n،\ \ldots$$

را درنظرگرفت و از روی جمع تدریجی آن‌ها، مجموع‌های جزئی را تشکیل داد:

$$A_۱=a_۱،\qquad A_۲=a_۱+a_۲،\qquad A_۳=a_۱+a_۲+a_۳،\ \ldots$$

اگر، با ترقی نامحدود n، مقدار A_n به سمت حد A (متناهی یا نامتناهی) میل کند، درآن‌صورت، این عدد را مجموع عددهای اختیارشدهٔ a_n می‌نامند ومی‌نویسند:

$$a_۱+a_۲+\ldots+a_n+\ldots=A$$

سمت چپ برابری را، رشتهٔ نامتناهی و عدد A را مجموع آن می‌نامند. وقتی که یك رشته دارای مجموع متناهی باشد، گویند که این رشته متقارب (همگرا) است.

به‌عنوان مثال، رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}+\cdots$$

در این‌جا داریم:

$$a_۱=\frac{۱}{۱\times۲}=۱-\frac{۱}{۲},\qquad a_۲=\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱},\ \cdots$$

به‌نحوی که، در این حالت

$$A_n=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)=۱-\frac{۱}{n+۱}$$

روشن است که $A_n\to ۱$ و، بنابراین، این رشته متقارب است و به‌سمت ۱ میل می‌کند.

اگر، رشته مجموعی متناهی نداشته باشد، آن را رشته متباعد (واگرا) گویند، مثل رشتهٔ

$$۱+۱+۱+\cdots+۱+\cdots$$

۲۶. چند قضیه دربارهٔ واریانتی که دارای حد است. اگر واریانت x_n، حدی برابر a داشته باشد، به‌ازای مقدار دلخواه $p<a$ (یا $q>a$)، عدد $\varepsilon>۰$ را می‌توان به‌سادگی طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$a-\varepsilon>p\ (\text{یا } a+\varepsilon<q)$$

برای این منظور، کافی است که ε کمتر از تفاضل $a-p$ (یا $q-a$) اختیار شود؛ ولی، بنا به تعریف حد [۲۳]، می‌توان عددی مانند N پیدا کرد که برای $n>N$، نابرابری [(۴) را ببینید] زیر برقرار باشد:

$$x_n>a-\varepsilon\qquad (x_n<a+\varepsilon)$$

و در نتیجه، نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$x_n>p\quad (\text{یا } x_n<q)$$

۱°. اگر واریانت x_n به‌سمت‌حدa میل‌کند و $a>p$ (یا $a<q$)، دراین‌صورت،همهٔ مقدارهای متغیر نیز، باشروع ازمقداری، بزرگتراز p (یا کوچکترازq) خواهد بود.

این گزارهٔ ساده، یك سلسله نتیجه‌های مهم به‌دنبال دارد.

۲°. اگر واریانت x_n به‌سمت$a>0$ (یا $a<0$) میل‌کند، درآن‌صورت، با شروع از جایی، خود x_n مقداری مثبت (یا منفی) خواهد بود.

برای اثبات،کافی است، درحکم‌قبلی $p=0$ (یا $q=0$) گرفته شود.

می‌توان نتیجهٔ دقیق زیر را هم اثبات‌کرد:

۳°. اگر واریانت x_n به‌سمت $a\neq 0$ میل‌کند، درآن‌صورت، دست‌کم، مقدارهای به‌قدرکافی دور x_n، ازلحاظ قدرمطلق، از عدد مثبتی مثل r تجاوزمی‌کنند:

$$|x_n|>r>0 \qquad (\text{به‌ازای } n>N)$$

زیرا به‌ازای $a>0$ (یا $a<0$) می‌توان

$$0<p<a \quad \text{یا} \quad (a<q<0)$$

اختیار و فرض‌کرد $r=p$ (یا $r=|q|$).

۴°. از طرف دیگر، اگر واریانت x_n، دارای حد a باشد، در آن‌صورت کران‌دار خواهدبود؛ یعنی، همهٔ‌مقدارهای‌آن، ازلحاظ قدرمطلق، ازیك‌کران‌متناهی تجاوزنمی‌کنند:

$$|x_n|\leqslant M \qquad (M=\text{const.}, \quad n=1,2,3,\ldots)$$

عدد $M'>|a|$ را درنظرمی‌گیریم. چون‌داریم $M'<a<M'$ —، فرض‌می‌کنیم $p=-M'$ و $q=M'$. عددی مانند N پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که به‌ازای $n>N$ داشته باشیم:

$$-M'<x_n<M' \qquad \text{یا} \qquad |x_n|<M'$$

این نابرابری، به‌ازای $n=N+1$، $n=N+2$،... برقرار است، به‌نحوی‌که ممکن است، تنها N مقدار اول واریانت (یا چندتا از آن‌ها) درآن صدق نکنند.

بنابراین، اگر M را بزرگترین عدد ازعددهای

$$|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, M'$$

فرض‌کنیم، درآن‌صورت، به‌ازای همهٔ مقدارهای x_n، خواهیم داشت: $|x_n|\leqslant M$.

یادداشت‌ها: I. کران‌دار بودن‌متغیر x_nرا، به‌صورت‌هم‌ارز آن،صادق‌بودن‌نابرابری‌های

$$k\leqslant x_n\leqslant g \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

هم می‌توان تعریف کرد (k و g دوعدد متناهی هستند)، زیرا، اگر M را برابر بزرگترین دو مقدار $|k|$ و $|g|$ بگیریم، از این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود: $|x_n| \leqslant M$ و، برعکس، اگر نابرابری آخری محقق باشد، می‌توان آن را به‌صورت $-M \leqslant x_n \leqslant M$ نوشت که، درآن، M — نقش k و M نقش g را به‌عهده دارد.

II. عکس حکم ۴° درست نیست، زیرا هر واریانت کران‌دار، ممکن است دارای حدی نباشد. به‌عنوان‌مثال، اگر فرض کنیم $x_n = (-1)^{n+1}$، دراین‌صورت، واریانت x_n به‌روشنی کران‌دار است: $|x_n| \leqslant 1$، ولی دارای‌حدی نیست و همیشه‌از $+1$ به -1، و برعکس، نوسان می‌کند.

در پایان، باتوجه به‌حکم ۱°، منحصر به‌فردبودن حد را ثابت می‌کنیم.

۵°. واریانت x_n نمی‌تواند، درعین‌حال، به‌سمت دو حد مختلف میل کند.

در واقع، اگر خلاف این حکم را بپذیریم و، در عین‌حال، داشته باشیم: $x_n \to a$ و $x_n \to b$ و، ضمناً، $a < b$، مقدار دلخواه r، واقع بین a و b، را اختیار می‌کنیم:

$$a < r < b$$

از آن‌جا که $x_n \to a$ و $a < r$، عددی مانند N' پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که به‌ازای $n > N'$ نابرابری $x_n < r$ صادق باشد. ازطرف دیگر، چون $x \to b$ و $b > r$، عددی مانند N'' پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که به‌ازای $n > N''$ داشته باشیم $x_n > r$. اگر n را ازهر دو عدد N' و N'' بزرگتر اختیارکنیم، دراین‌صورت، مقدار نظیر x_n، درعین‌حال، هم کوچکتر و هم بزرگتر از r خواهد شد. و این غیرممکن است. اثبات قضیه هم، از وجود همین تناقض، نتیجه می‌شود.

۲۷. کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ. درمقابل مقدارهای بی‌نهایت کوچك، به‌مفهومی، مقدارهای بی‌نهایت بزرگ (یا به‌طور ساده، بی‌نهایت بزرگ‌ها) قرار دارند.

واریانت x_n را بی‌نهایت بزرگ نامند، اگر — با شروع از جای معینی — ازلحاظ قدرمطلق، از مقدار به قدر دلخواه بزرگ ازپیش داده شدهٔ $E > 0$، بزرگتر باشد:

$$|x_n| > E \qquad (\text{به‌ازای } n > N_E)$$

همان‌طورکه درحالت بی‌نهایت کوچك‌ها بود، دراین‌جا نیز لازم است خاطر نشان شودکه، یکی از مقدارهای بزرگ اختیار شده را، نمی‌توان به حساب بی‌نهایت بزرگ گذاشت. دراین‌جا، با مقدار متغیری سروکار داریم، که تنها در جریان تغییرهای خودش، از مقدار مفروض E بزرگتر می‌شود.

واریانت‌های

$$x_n = n, \qquad x_n = -n, \qquad x_n = (-1)^{n+1}.n$$

را می‌توان نمونه‌هایی از بی‌نهایت بزرگ‌ها به‌حساب آورد که دنبالهٔ طبیعی عددها را می‌پیمایند: اولی باعلامت مثبت، دومی باعلامت منفی وسومی با تناوب علامت.

اینك مثال دیگری از بی‌نهایت بزرگ

$$x_n = Q^n \qquad (|Q| > ۱ \text{ به‌ازای})$$

در واقع، $E > ۰$ هرچه باشد، نابرابری

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

تنها برای

$$n > \frac{logE}{log|Q|} \quad \text{یا} \quad n.log|Q| > logE$$

($|Q| > ۱$ و بنابراین $log|Q| > ۰$) برقرار است و برای N_E می‌توان عدد زیر را انتخاب کرد:

$$E\left(\frac{loaE}{log|Q|}\right)$$

اگر واریانت x_n بی‌نهایت بزرگ باشد (دست‌کم، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ n) وعلامت ثابتی را ($+$ یا $-$) حفظ کند، دراین‌صورت، بسته به‌علامتی که اختیار کرده است، گویند که واریانت x_n، دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ است و می‌نویسند:

$$\text{حد } x_n = +\infty, \qquad x_n \to +\infty$$

یا

$$\text{حد } x_n = -\infty, \qquad x_n \to -\infty$$

می‌شد برای هرکدام از این‌حالت‌ها، تعریف مستقلی ارائه داد و نابرابری $|x_n| > E$ را با نابرابری‌های

$$x_n > E \quad \text{یا} \quad x_n < -E$$

عوض کرد. ازهمین‌جا، به‌ترتیب، نتیجه می‌شود: $x_n > ۰$ یا $x_n < ۰$.

روشن است که مقدار بی‌نهایت بزرگ x_n، درحالت کلی، بارابطهٔ $|x_n| \to +\infty$ مشخص می‌شود.

از مثال‌هایی که برای بی‌نهایت بزرگ آوردیم، روشن است که واریانت $x_n = n$ به $+\infty$ و واریانت $x_n = -n$ به $-\infty$ میل می‌کند؛ ولی در مورد مثال

$x_n=(-1)^{n+1}.n$، نمی‌توان گفت که به‌سمت $+\infty$ یا به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند.

بالاخره، درمورد $x_n=Q^n$، می‌توان گفت که به ازای $Q>1$ به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند؛ ولی، به‌ازای $Q<-1$، دارای حدی نیست.

درشمارهٔ ۱۰هم، با این‌عددهای ناویژهٔ $\pm\infty$ برخورد داشتیم. یادآوری می‌کنیم که کاربرد این «عددها»، شرایط خاصی دارد و نمی‌توان عمل‌های حساب را، روی آن‌ها، انجام داد. به‌جای $+\infty$، غالباً، به‌طور ساده ∞ می‌نویسند.

ورود حدهای نامتناهی، قضیهٔ مربوط به‌منحصربه‌فرد بودن حد را، ازاعتبار نمی‌اندازد، زیرا ــ همان‌طور که در ۴° روشن شد ــ واریانتی که حد متناهی دارد، کران‌دار است و، درنتیجه نمی‌تواند، درعین‌حال، به‌سمت حد نامتناهی میل کند.

درپایان، رابطهٔ ساده‌ای را، که بین مقدارهای بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک وجود دارد، یادآوری می‌کنیم:

اگر واریانت x_n بی‌نهایت بزرگ باشد، درآن‌صورت، مقدار عکس‌آن $\alpha_n=\frac{1}{x_n}$ یک بی‌نهایت‌کوچک است.

عدد دلخواه $\varepsilon>0$ را اختیار می‌کنیم. چون $|x_n|\to\infty$، برای $E=\frac{1}{\varepsilon}$ می‌توان عددی مانند N را پیدا کرد، که باشرط $x>N$ داشته باشیم:

$$|x_n|>\frac{1}{\varepsilon}$$

آن‌گاه، برای همان مقدارهای n، به‌روشنی خواهیم داشت:

$$|\alpha_n|<\varepsilon$$

به‌ترتیب مشابهی، عکس قضیه را هم می‌توان ثابت کرد.

اگر واریانت α_n (مخالف‌صفر) بی‌نهایت‌کوچک باشد، درآن‌صورت، مقدارعکس‌آن $x_n=\frac{1}{\alpha_n}$ یک بی‌نهایت بزرگ است.

§۲. قضیه‌های مربوط به‌حد. راه‌های سادهٔ تعیین حد

۲۸. گذر به‌حد در برابری‌ها و نابرابری‌ها. وقتی که دو واریانت x_n و y_n را، با علامت‌های برابری یانابرابری، به‌هم مربوط کرده باشیم، همیشه به‌معنای مقدارهای متناظر

آن‌هاست، یعنی مقدارهایی که متناظر با شماره ردیف‌های یکسان n، در x_n و y_n باشند.

۱°. اگردو واریانت x_n و y_n، به‌ازای تمامی تغییرهای خود، برابرباشند: $y_n = x_n$، ضمناً، هر کدام از آن‌ها، حدی متناهی داشته باشد:

$$\text{حد } x_n = a, \quad \text{حد } y_n = b$$

آن گاه، این حدها، برابرند: $a = b$.

اثبات این حکم، مستقیماً، ازقضیهٔ منحصر به‌فردبودن حد، نتیجه می‌شود [۲۶، ۵°].

از این قضیه، معمولاً، به‌صورت‌گذر به حد دربرابری، استفاده می‌شود: از $y_n = x_n$، نتیجه می‌شود: $\text{حد } y_n = \text{حد } x_n$.

۲°. اگر برای دو واریانت x_n و y_n، همواره نابرابری $x_n \geqslant y_n$ برقرارباشد و،ضمناً، هر کدام ازآن‌ها، حدی متناهی داشته باشد:

$$\text{حد } x_n = a, \quad \text{حد } y_n = b$$

آن‌گاه داریم: $a \geqslant b$.

اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم $a < b$، مثل ۲۶، ۵°، عدد r را بین a و b در نظر می‌گیریم. از آن جا که داریم: $a < r < b$، از یك طرف، شمارهٔ N' پیدا می‌شود، به‌نحوی که برای $n > N'$ داشته باشیم $x_n < r$؛ از طرف دیگر، شمارهٔ N'' پیدا می‌شود، به‌نحوی‌که به‌ازای $n > N''$ داشته باشیم: $r < y_n$. حالا، اگر N را بزرگتر از هر دو عدد N' و N'' انتخاب کنیم، درآن صورت، به‌ازای $n > N$، دو نابرابری

$$x_n < r, \qquad y_n > r$$

به‌طور هم‌زمان، برقرارند و از آن‌جا نتیجه می‌شود $x_n < y_n$، که متناقض فرض است.

این قضیه، امکان گذر به حد را در نابرابری‌های دوام با برابری، فراهم می‌آورد. از $x_n \geqslant y_n$، می‌توان نتیجه گرفت: $\text{حد } x_n \geqslant \text{حد } y_n$.

روشن است‌که علامت $>$، همواره می‌تواند به $<$ تبدیل شود.

توجه خوانندگان را، به‌این نکته جلب می‌کنیم که از نابرابری اکید $x_n > y_n$، در حالت‌کلی، نابرابری اکید $\text{حد } x_n > \text{حد } y_n$ نتیجه نمی‌شود و تنها مثل گذشته: $\text{حد } x_n \geqslant \text{حد } y_n$. مثلاً، به‌ازای همهٔ مقدارهای n داریم: $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$، با وجود این

$$\text{حد}\left(-\frac{1}{n}\right) = \text{حد}\,\frac{1}{n} = 0$$

قضیهٔ زیر، اغلب در مورد وجود حد به‌کار می‌رود:

۳°. اگر، برای واریانت‌های x_n، y_n و z_n، همواره داشته باشیم:

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

و، ضمناً، واریانت‌های x_n و z_n، حد مشترکی برابر a داشته باشند:

$$\text{حد } x_n = \text{حد } z_n = a$$

آن‌گاه، واریانت y_n هم، دارای همان حد است:

$$\text{حد } y_n = a$$

عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را درنظرمی گیریم. به‌ازای این ε، می‌توان شمارهٔ N' راطوری پیدا کرد که به‌ازای $n > N'$ داشته باشیم:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

سپس، شمارهٔ N'' را، به قسمی که به‌ازای $n > N''$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

حالا فرض می کنیم که N ازهردو عدد N' و N'' بزرگتر باشد در آن صورت برای $n > N$، هر دو نابرابری قبل، برقرارند و خواهیم داشت:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$$

یعنی به‌ازای $n > N$، داریم:

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

یا

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

و به این ترتیب

$$\text{حد } y_n = a$$

از این قضیه، در حالت خاص، نتیجه می‌شود که اگر به‌ازای همهٔ مقدارهای n داشته باشیم:

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

و ضمناً بدانیم که $z_n \to a$، آن‌گاه $y_n \to a$. اثبات مستقیم این قضیه نیز، به سادگی، ممکن است.

قضیه‌های ۱°، ۲° و ۳° را می‌توان، به‌سادگی، درمورد حدهای نامتناهی هم به‌کار برد.

۲۹. پیش قضیه‌های مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها. در قضیه‌های بعدی، پیش می آید

که دو (یا چند) واریانت را، بـه طور همزمان، در نظر بگیریم و آن‌ها را با علامت‌های عمل‌های حساب، به هم مربوط کنیم. ضمناً، همچون‌قبل، این علامت را، به مقدارهای‌نظیر واریانت‌ها، نسبت می‌دهیم. مثلاً، وقتی ازمجموع دو واریانت x_n و y_n صحبت می کنیم، که جدا جدا، دنبالهٔ مقدارهای

$$x_۱ , x_۲ , x_۳, \dots, x_n, \dots$$

$$y_۱ , y_۲ , y_۳, \dots, y_n, \dots$$

را می‌پیمایند، منظور از واریانت x_n+y_n، واریانتی است کـه دنبالهٔ مقدارهای زیر را اختیار کند:

$$x_۱+y_۱, x_۲+y_۲, x_۳+y_۳, \dots, x_n+y_n, \dots$$

برای اثبات قضیه‌های مربوط به نتیجه‌های عمل‌های حساب روی متغیرها، دوپیش‌قضیهٔ زیر ــ که به‌بی‌نهایت کوچک‌ها مربوط می‌شوند ــ نقش مهمی را ایفا می کنند.

پیش‌قضیهٔ ۱. مجموع چند بی‌نهایت‌کوچک، به‌تعدادمتناهی، یك بی‌نهایت‌کوچک‌است.

اثبات‌را درمورد دو بی‌نهایت کوچک، α_n و β_n می‌دهیم. (درحالت کلی هم،استدلال به همین ترتیب است). عدد دلخواه $\varepsilon>۰$ را درنظرمی گیریم. طبق‌تعریف مقدار بی‌نهایت کوچك، برای بی‌نهایت کوچك α_n، می‌توان عـدد N' را طوری پیدا کرد کـه به ازای $n>N'$ داشته باشیم:

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

به همین‌ترتیب، برای بی‌نهایت‌کوچك β_n هم، عدد N'' پیدا می‌شود، به نحوی‌که به‌ازای $n>N''$ داشته باشیم

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

اگرعدد طبیعی N را بزرگتراز N' و N'' انتخاب‌کنیم، به‌ازای $n>N$، هردو نابرابری به طور هم‌زمان، برقرار می‌شوند و از آن‌جا که

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

بنابراین، مقدار $\alpha_n+\beta_n$، یك بی‌نهایت‌کوچك است.

پیش‌قضیهٔ ۲. حاصل ضرب متغیرکران‌دار x_n در بی‌نهایت کوچک α_n، یك بی‌نهایت کوچك است.

اگر به ازای همهٔ مقدارهای n داشته باشیم:

$$|x_n| \leqslant M$$

اگرعدد دلخواه $\varepsilon > 0$ مفروض‌باشد، آن‌گاه، برای بی‌نهایت‌کوچك α_n می‌توان عدد Nرا طوری پیداکردکه به ازای $n > N$ داشته باشیم:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

آن‌گاه، به‌ازای همان مقدارهای n

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

و از این‌جا، نتیجه می‌شودکه $x_n \cdot \alpha_n$ یك بی‌نهایت‌کوچك است.

۳۰. عمل‌های حساب روی متغیرها. قضیه‌های زیر، ازاین جهت‌مهم‌اندکه، بااستناد به‌آن‌ها، دربسیاری موارد، دیگر نیازی به‌آن نیست‌که، هربار، برای تعیین حد، به‌جست‌وجوی N مربوط از روی ε مفروض بپردازیم. با توجه به‌این قضیه‌ها، تعیین حد، به طور قابل ملاحظه‌ای، ساده می‌شود.

۱°. اگر واریانت‌های x_n و y_n دارای حدهای متناهی باشند

$$\text{حد}\, x_n = a, \qquad \text{حد}\, y_n = b$$

آن گاه، مجموع (یا تفاضل) آن‌ها هم، دارای حد متناهی است و ضمناً

$$\text{حد}\, (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

از فرض‌های قضیه نتیجه می‌شودکه اگر

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n \qquad (1)$$

که در آن، α_n و β_n بی‌نهایت‌کوچك‌اند، آن‌گاه

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$$

که، بنابر پیش قضیهٔ ۱، $\alpha_n \pm \beta_n$ یك بی‌نهایت‌کوچك است. درنتیجه، با استفاده ازتعریف دوم حد، می‌توان گفت‌که واریانت $x_n \pm y_n$ دارای حد $a \pm b$ است.

این قضیه و اثبات آن، در مورد چند واریانت (به تعداد متناهی) هم، صادق است.

۲°. اگر واریانت‌های x_n و y_n، دارای حدهای متناهی باشند

$$\text{حد}\, y_n = b \qquad \text{حد}\, x_n = a;$$

آن گاه، حاصل ضرب آن‌هاهم، دارای حد متناهی است و

$$\text{حد}\, (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

این بار، با توجه به رابطه‌های (۱)، داریم:

$$x_n \cdot y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$$

عبارت داخل پرانتز، بنابر پیش‌قضیه‌های ۱ و ۲، بی‌نهایت‌کوچك است. از این‌جا نتیجه می‌شودکه واریانت $x_n y_n$ دارای حد است.

این قضیه را در مورد چند واریانت، بـه تعداد متناهی، هم (مثلاً با روش استقرای ریاضی) می‌توان ثابت‌کرد.

۳°. اگرواریانت‌های x_n و y_n دارای حدهای متناهی باشند:

$$\text{حد}\, y_n = b \qquad \text{حد}\, x_n = a,$$

و ضمناً b مخالف صفر باشد، آن گاه، نسبت آن‌ها هم دارای حد متناهی است و داریم:

$$\text{حد}\, \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

چون داریم $b \neq 0$، بنابر آن‌چه در۳° از شمارهٔ **۲۶** گفتیم، با شروع ازجایی، نه‌تنها $y_n \neq 0$، بلکه حتی

$$|y_n| > r > 0$$

که در آن، r عددی است ثابت. بـه ازای مقدارهایی از n، کـه این وضع برقرار باشد، نسبت $\frac{x_n}{y_n}$ هم دارای معنا خواهد بود.

در نتیجه، با در نظرگرفتن برابری‌های (۱)، داریم:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

عبارت داخل پرانتز، بنابر پیش قضیه‌های ۱و۲، یك بی‌نهایت‌کوچك است،وضریب آن، بنابرآن‌چه در ابتدا گفته شد، یك متغیر کران‌دار است:

$$\frac{1}{|by_n|}=\frac{1}{|b||y_n|}<\frac{1}{|b|r}$$

درنتیجه، بنابر پیش‌قضیهٔ ۲، تمامی حاصل ضرب سمت راست، یك بی‌نهایت کوچك است، که معرف تفاضل بین واریانت $\frac{x_n}{y_n}$ وعدد $\frac{a}{b}$ است. بنابراین، حد $\frac{x_n}{y_n}$ برابر است با $\frac{a}{b}$.

۳۱. عبارت‌های مبهم. تا این‌جا، عبارت‌های

$$x_n\pm y_n, \qquad x_n\cdot y_n, \qquad \frac{x_n}{y_n} \tag{۲}$$

را در حالتی در نظر گرفتیم که واریانت‌های x_n و y_n، حد متناهی داشته باشند (و ضمناً، در حالت تقسیم، حد y_n مخالف صفر باشد) و آن وقت، حد هرکدام از این عبارت‌ها را پیدا کردیم.

حالا می‌خواهیم به بررسی حالت‌هایی بپردازیم که در آن‌ها، حد متغیرهای x_n و y_n (یکی یا هردو)، بی‌نهایت شود و یا، در حالت تقسیم، حد مخرج برابر صفر شود. از این حالت‌ها، چهارحالتی را مورد بحث قرار می‌دهیم، که ویژگی‌های مهم وجالب‌تری دارند.

۱°. ابتدا، حالت $\frac{x_n}{y_n}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که هر دو متغیر x_n و y_n به طور همزمان، به طرف صفر میل کنند. در این‌جا، برای نخستین بار، با وضع کاملاً خاصی روبه‌رو هستیم: باوجودی که حد متغیرهای x_n و y_n را می‌دانیم، نمی‌توانیم دربارهٔ حد نسبت این متغیرها اظهار نظر کنیم. این حد، در موارد مختلف، متفاوت است و بستگی به نوع تغییر متغیرهای x_n و y_n دارد. مثال‌های سادهٔ زیر، مطلب را روشن می‌کند:

فرض کنید $x_n=\frac{1}{n^2}$ و $y_n=\frac{1}{n}$. هر دو متغیر به‌سمت صفر میل می‌کنند؛ نسبت آن‌ها $\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}$ هم به سمت صفر میل می‌کند. ولی اگر، برعکس، $x=\frac{1}{n}$ و $y=\frac{1}{n^2}$ باشد، با وجودی که بازهم هر دو متغیر به سمت صفر میل می‌کنند، نسبت آن‌ها $\frac{x_n}{y_n}=n$ به سمت ∞ میل می‌کند. با انتخاب عدد مخالف صفر a و تشکیل دو بی‌نهایت کوچك $x_n=\frac{a}{n}$ و $y_n=\frac{1}{n}$، می‌بینیم که حد نسبت آن‌ها، برابر a می‌شود (زیرا، این نسبت، متحد با a است).

بالاخره، اگر $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ و $y_n = \frac{1}{n}$ (حد هر دو متغیر، صفر است)، نسبت آن‌ها $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ اصلاً حدی ندارد.

به این ترتیب، تنها با دانستن حد واریانت‌های x_n و y_n، نمی‌توان دربارهٔ روند نسبت آن‌ها، داوری کرد. لازم است که خود این واریانت‌ها شناخته شوند، یعنی قانون تغییر هرکدام از آن‌ها معلوم باشد و، سپس، نسبت $\frac{x_n}{y_n}$ را، مستقیماً، موردبررسی قرارداد. برای این‌که، این ویژگی را مشخص کنند، می‌گویند: وقتی‌که $x_n \to 0$ و $y_n \to 0$، عبارت $\frac{x_n}{y_n}$، به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید.

۲°. درحالتی هم که، به طور هم زمان، $x_n \to \pm\infty$ و $y_n \to \pm\infty$، وضع مشابهی وجود دارد. اگر خود واریانت‌ها معلوم نباشند، نمی‌توان دربارهٔ روند نسبت آن‌ها اظهار نظر کرد. این واقعیت را، با مثال‌هایی، شبیه مثال‌های ۱°، روشن می‌کنیم:

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = n^2 \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$

$$x_n = an \to \pm\infty (a \neq 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$

$$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]n \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$$

که هیچ حدی ندارد.

در این حالت می‌گویند که عبارت $\frac{x_n}{y_n}$ به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید.

۳°. اگر x_n به سمت صفر و، درهمان حال، y_n به‌سمت $\pm\infty$ میل کند، با بررسی رفتار حاصل ضرب $x_n y_n$، به همان ویژگی‌های ۱° و ۲° برخورد می‌کنیم. مثال‌های زیر گواه این مطلب است:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n=\frac{1}{n}\to 0\,,\qquad y_n=n^2\to\infty\,,\qquad x_ny_n=n\to\infty\,;$$

$$x_n=\frac{a}{n}\to 0\,;\ (a\neq 0)\,,\qquad y_n=n\to\infty\,,\qquad x_ny_n=a\to a\,;$$

$$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\to 0\,,\quad y_n=n\to\infty,\quad x_ny_n=(-1)^{n+1}$$ (دارای حد نیست)

در این حالت، یعنی وقتی که $x_n\to 0$ و $y_n\to\infty$، گویند عبارت x_ny_n به صورت مبهم $0.\infty$ درمی‌آید.

بالاخره، مجموع x_n+y_n را در نظر می‌گیریم.

۴°. در این‌جا، وقتی حالت خاصی پیش می‌آید که x_n و y_n به سمت بی‌نهایت‌های با علامت‌های مختلف میل کنند، در این حالت هم، بدون اطلاع از خود واریانت‌های x_n و y_n، نمی‌توان دربارهٔ مجموع x_n+y_n اظهارنظر قطعی کرد. حالت‌های مختلف ممکن را، با مثال روشن می‌کنیم.

$$x_n=2n\to+\infty\,,\qquad y_n=-n\to-\infty\,,\qquad x_n+y_n=n\to+\infty\,;$$

$$x_n=n\to+\infty,\qquad y_n=-2n\to-\infty\,,\quad x_n+y_n=-n\to-\infty\,;$$

$$x_n=n+a\to+\infty,\qquad y_n=-n\to-\infty\,,\qquad x_n+y_n=a\to a\,;$$

$$x_n=n+(-1)^{n+1}\to+\infty,\ y_n=-n\to-\infty,\ x_n+y_n=(-1)^{n+1}$$ (حد ندارد)

به این علت است که وقتی $x_n\to+\infty$ و $y_n\to-\infty$، گویند که عبارت x_n+y_n به صورت مبهم $\infty-\infty$ درمی‌آید.

به‌این ترتیب، وقتی با عبارت‌های حسابی (۲) سر وکار داشته باشیم، به‌چهار حالت برمی‌خوریم که، تنها با در دست داشتن حد واریانت‌های x_n و y_n (که عبارت‌های (۲) از آن‌ها تشکیل شده‌اند)، می‌توان حد آن‌ها را مشخص کرد، و این‌ها، همان صورت‌های مبهم‌اند*.

$$\frac{0}{0}\,,\qquad \frac{\infty}{\infty}\,,\qquad 0.\infty,\qquad \infty-\infty$$

در این حالت‌ها، می‌توان عبارت مورد نظر را به طور مستقیم، و با توجه به قانون تغییر

---

*) روشن است که این نمادها، هیچ‌گونه معنای عددی ندارند. هرکدام از آن‌ها را، تنها باید به عنوان یك علامت شرطی کوتاه، برای یکی از چهارگونه عبارت مبهم، در نظر گرفت.

واریانت‌های x_n و y_n، بررسی کرد. این بررسی‌را رفع‌ابهام می‌نامند که،البته، همیشه مثل نمونه‌های قبل، ساده نیست. در این‌جا مثال‌هایی از رفع ابهام می‌آوریم.

۳۲. مثال‌هایی برای پیدا کردن حد. ۱) $p(n)$ را چند جمله‌ای صحیح نسبت به n و با ضریب‌های ثابت، در نظر می‌گیریم:

$$p(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k.$$

ومسالهٔ مربوط‌به حدآن‌را مطرح می‌کنیم. روشن است که، اگرهمهٔ ضریب‌های چندجمله‌ای مثبت (یامنفی) باشند، حد$p(n)$ برابر $+\infty$ (یا $-\infty$) خواهد بود. ولی، اگرضریب‌ها علامت‌های متفاوتی داشته باشند، بعضی جمله‌ها بـه سمت $+\infty$ و بعضی دیگر به سمت $-\infty$ میل می‌کنند و با صورت مبهم $\infty-\infty$ روبه‌رو می‌شویم.

برای رفع ابهام، $p(n)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$p(n)=n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}\right)$$

چون همهٔ جمله‌های داخل‌پرانتز، باشروع ازدومی، با ترقی n، بی‌نهایت‌کوچك می‌شوند، بنابراین، حد عبارت درون پرانتز، برابر است با a_0. عامل اول قبل از پرانتز هم به سمت $+\infty$ میل می‌کند. در نتیجه، تمامی عبارت‌برحسب علامت a_0، به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد. از بین بردن «ابهام» (همان‌طورکه در این‌جا عمل‌کردیم)، غالباً ازطریق تبدیل عبارت انجام می‌شود.

۲) اگر $q(n)$ یك چند جمله‌ای، شبیه چند جمله‌ای قبل، باشد:

$$q(n)=b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l,$$

در آن صورت، نسبت $\frac{p(n)}{q(n)}$، با بزرگ شدن n، بـه صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید. با تبدیل هرکدام از چند جمله‌ای‌ها، همان‌طورکه در مثال ۱) عمل‌کردیم، به دست می‌آید:

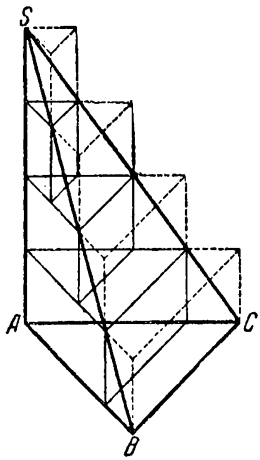
$$\frac{p(n)}{q(n)}=n^{k-l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_l}{n^l}}$$

در این جا، عامل دوم (کسر)، دارای حد متناهی $\frac{a_0}{b_0}$ است. اگر درجهٔ دوچندجمله‌ای یکی

باشد، $k=l$، حد نسبت $\frac{p(n)}{q(n)}$ همان $\frac{a_0}{b_0}$ خواهد بود*؛ به‌ازای $k>l$، عامل اول به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند و، بنابراین، عبارت مورد نظر هم به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند (علامت آن، بستگی به علامت $\frac{a_0}{b_0}$ دارد)؛ بالاخره، به‌ازای $k<l$، عامل اول، وهمراه با آن، تمامی عبارت به سمت صفر میل می‌کند.

۳) مطلوب است تعیین حجم V، هرم مثلث القاعدهٔ $SABC$ (شکل ۳).

ارتفاع H هرم را، به n بخش برابر، تقسیم وازنقطه‌های تقسیم، صفحه‌هایی موازی صفحهٔ قاعده رسم می‌کنیم. در مقطع‌ها، مثلث‌های متشابه‌مثلث قاعده، به‌دست می‌آید. روی این مقطع‌ها منشورهای‌درونی‌وبیرونی‌را بنامی‌کنیم. ازمنشورهای درونی، جسم به حجم V_n و از منشورهای بیرونی جسم به‌حجم V'_n را تشکیل‌می‌دهیم. ضمناً روشن‌است که



شکل ۳

$$V_n<V<V'_n$$

ولی، تفاضل V'_n-V_n، درواقع، برابراست باحجم منشور بیرونی پایین به‌قاعدهٔ ABC (به‌مساحت Q) و ارتفاع $\frac{H}{n}$. بنابراین

$$V'_n-V_n=Q.\frac{H}{n}\to 0$$

وقتی‌که n، به اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، طبعاً، تفاضل‌های $V-V_n$ و V'_n-V هم به سمت صفر میل می‌کنند و داریم:

$$V=\text{حد}\,V_n=\text{حد}\,V'_n$$

حالا، مقدار V'_n را معین می‌کنیم. در این‌جا، جسمی داریم که از ردیف منشورهای بیرونی تشکیل شده است و قاعده‌های آن‌ها، به‌ترتیب، برابرند با

---

*) به‌همین‌ترتیب، حد $\frac{1}{3}$ را در مثال ۴) از شمارهٔ ۲۵ به‌دست آوردیم.

$$\frac{1^2}{n^2}Q,\ \frac{2^2}{n^2}Q,\ \ldots,\ \frac{i^2}{n^2}Q,\ \ldots,\ \frac{n^2}{n^2}Q=Q$$

و چون ارتفاع همهٔ آن‌ها، برابر $\frac{H}{n}$ است، بنابراین:

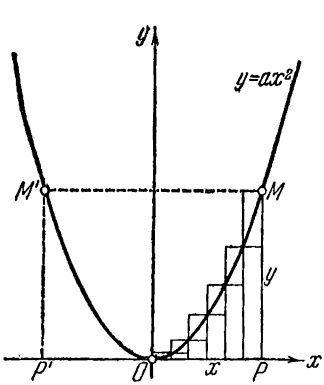
$$V'_n=\frac{Q}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\cdot\frac{H}{n}=\frac{QH}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{Q\cdot H}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

(با استفاده از دستور مجموع مجذورهای عددهای طبیعی). در نتیجه

$$V=\lim V'_n=\frac{Q\cdot H}{3}$$

۴) مطلوب‌است تعیین مساحت Q، مربوط به شکل OPM، که محدود است به بخش OM از سهمی $y=ax^2$ $(a>0)$، پاره‌خط OP از محور xها و پاره‌خط PM (شکل ۴).



شکل ۴

پاره‌خط OP را به n بخش برابر تقسیم، و روی آن‌ها، ردیف مستطیل‌های درونی و بیرونی را می‌سازیم. اگر Q_n و Q'_n را، به‌ترتیب، مساحت کل مستطیل‌های درونی و بیرونی بگیریم، تفاضل آن‌ها با مساحت بزرگترین مستطیل بیرونی، یعنی $y\cdot\frac{x}{n}$، برابر است. از این‌جا، شبیه‌مثال ۳)، تفاضل $Q'_n-Q_n\to 0$. چون

$$Q_n<Q<Q'_n$$

روشن است که

$$Q=\lim Q_n=\lim Q'_n$$

ارتفاع‌های مستطیل‌ها، برابراست باعرض‌های نقطه‌هایی از سهمی، که طول‌های آن‌ها

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x,\ \ldots,\ \frac{i}{n}x,\ \ldots,\ \frac{n}{n}x=x$$

هستند؛ از روی معادلهٔ منحنی، مقدارهای این عرض‌ها، به‌ترتیب، چنین می‌شود:

$$a\cdot\frac{1}{n^2}x^2,\ a\cdot\frac{2^2}{n^2}x^2,\ \ldots,\ a\frac{i^2}{n^2}x^2,\ \ldots,\ a\cdot x^2$$

در نتیجه، برای Q'_n، این عبارت به‌دست می‌آید:

$$Q'_n=\frac{ax^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+n^2).\frac{x}{n}=\frac{ax^3}{6}.\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

و از آن‌جا

$$Q=\text{حد}\ Q'_n=\frac{ax^3}{3}=\frac{x\cdot ax^2}{3}=\frac{xy}{3}$$

با تکیه بر این نتیجه، به‌سادگی معلوم می‌شود که مساحت قطعهٔ سهموی $M'OM$ برابر است با $\frac{4}{3}xy$، یعنی دوسوم مساحت مستطیل محیطی این قطعهٔ سهموی* (نتیجه‌ای که «ارشمیدس» هم آن را به‌دست آورده بود).

۵) ثابت کنید، به‌ازای $0<k<1$ داریم:

$$\text{حد}\ [(n+1)^k-n^k]=0$$

در این جا، با شکل مبهم $\infty-\infty$ سروکار داریم، عبارت را با درآوردن n^k از کروشه، تبدیل می‌کنیم.

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]<n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-k}}$$

و چون $0\to\frac{1}{n^{1-k}}$، بنابراین $(n+1)^k-n^k\to 0$.

۶) مطلوب است تعیین حد

$$x_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

که به‌صورت مبهم $0.\infty$ درمی‌آید.

با ضرب و تقسیم عبارت مفروض بر مجموع $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$، آن را به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آوریم:

---

*) تعریف کلی مساحت شکل‌های منحنی‌الخط، در فصل دهم (جلد دوم) خواهد آمد. در آن‌جا، روشی را که برای حل این مساله به‌کار بردیم، برای محاسبهٔ دیگر شکل‌های منحنی‌الخط تعمیم خواهیم داد.

$$x_n=\sqrt{n}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

و بالاخره، صورت ومخرج را بر $\sqrt{n}$ تقسیم می‌کنیم:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

روشن است که

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$$

وچون عبارت سمت راست، به‌سمت ۱ میل می‌کند، حد ریشه نیز برابر ۱ است ودرنتیجه

$$\text{حد}\ x_n=\frac{1}{2}$$

۷) مطلوب است حد واریانت‌های

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},\quad y_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

و بالاخره

$$z_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

واریانت‌های x_n و y_n، به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آیند (زیرا هردو ریشه از n بزرگترند و به سمت ∞ میل می‌کنند). آن‌ها را، با تقسیم صورت ومخرج بر n، تبدیل می‌کنیم:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\quad y_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

چون هر دو ریشه به سمت ۱ میل می‌کنند (مثال قبل را ببینید)، بنابراین $x_n\to 1$ و $y_n\to 1$.

عبارت z_n شکل ویژه‌ای دارد: هرکدام ازجمله‌های این مجموع وابسته به n است، ولی تعداد آن‌ها هم، با ترقی n، افزایش می‌یابد*. چون، هرجمله، ازجملهٔ اول کوچکتر و

*) همین ویژگی را، برای عبارت‌های V_n' و Q_n' درمثال‌های ۴) و ۵) هم داشتید.

از جملهٔ آخر بزرگتر است، داریم:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow x_n < z_n < y_n$$

ولی، می‌دانیم، x_n و y_n، حد مشترکی برابر ۱ دارند، در نتیجه، بنابر پیش قضیهٔ ۳° از شماره **۲۸** z_n نیز به‌سمت همان حد میل می‌کند.

۸) m عدد مثبت

$$a_1, a_2, \cdots, a_m$$

که بزرگترین آن‌ها را A می‌نامیم، داده شده‌اند. ثابت کنید

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = A$$

اثبات، از نابرابری‌های روشن زیر، نتیجه می‌شود:

$$A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} \leqslant A\cdot\sqrt[n]{m}$$

[۵،۲۵ را ببینید].

۹) درشمارهٔ **۲۷** دیدیم که به‌ازای $a>1$ (باترقی n)، $a^n \to +\infty$. حالا روندنسبت

$$\frac{a^n}{n^k}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم که برای $k>0$، به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید.

یك نابرابری کمکی را ثابت می‌کنیم [با نابرابری برنولی در شمارهٔ **۱۹** مقایسه کنید]. با فرض $a=1+\lambda$ و $\lambda>0$، ازروی دستور دوجمله‌ای نیوتون داریم:

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

وچون، به‌ازای $n>2$ روشن است که $n-1>\frac{n}{2}$، در آن صورت، بالاخره داریم:

$$a^n>\frac{(a-1)^2}{4}n^2$$

که به‌ازای $k=1$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^n}{n}>\frac{(a-1)^2}{4}n$$

و در نتیجه:

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty$$

چون این نتیجه، برای هرعددلخواه $a>1$ درست است، بااختیار $k>1$ می‌توانیم بنویسیم (دست‌کم، برای مقدارهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ n):

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n}\right]^k > \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n}$$

و ازآن جا

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad (a>1)$$

این نتیجه، که برای $k>1$ حاصل شد، طبعاً برای $k<1$ هم درست است.

۱۰) از نابرابری (۳)، برای اثبات

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

می‌توان استفاده کرد.

اگر درآن نابرابری $a=\sqrt[n]{n}$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$n > \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

و ازآن‌جا $$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

که منجر به‌نتیجهٔ مطلوب می‌شود.

۱۱) حالا می‌توانیم به‌حکم جالبی درزمینهٔ حد بپردازیم:

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a>1)$$

که بازهم، باصورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ سروکارداریم، زیرا به‌سادگی دیده می‌شود $\log_a n \to \infty$.

درواقع، اگر عدد دلخواه $\varepsilon>0$ را اختیارکنیم، مادام‌که داریم $a^\varepsilon>1$، به‌ازای مقدارهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ n [۲۶، ۱°] خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}$$

که اگر از دوطرف، در پایهٔ a لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon$$

۳۳. قضیهٔ شتولتس و کاربردآن. برای تعیین حد عبارت‌های مبهم $\frac{x_n}{y_n}$، از گونهٔ $\frac{\infty}{\infty}$، اغلب قضیهٔ زیر، که متعلق به شتولتس (O. Stolz) است، می‌تواند مفید واقع شود*.

هرگاه واریانت $y_n \to +\infty$ و، ضمناً، ولو با شروع از جایی، y_n همراه n ترقی کند: $y_{n+1}>y_n$، آنگاه

$$\text{حد}\frac{x_n}{y_n}=\text{حد}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

تنها به‌شرطی که حد سمت راست (متناهی یا نامتناهی) وجود داشته باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم که این حد، برابر عدد متناهی l باشد:

$$\text{حد}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$$

دراین صورت، به‌ازای عدد دلخواه $\varepsilon>0$، می‌توان عدد N را طوری پیدا کرد که برای $n>N$ داشته باشیم:

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

یا

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<l+\frac{\varepsilon}{2}$$

یعنی، وقتی $n>N$ باشد، همهٔ کسرهای

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\ \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\ \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

بین این حدها قراردارند. چون مخرج این کسرها ــ با توجه به‌این که y_n همراه با n ترقی

---

*) درحالت خاص $y_n=n$، همین قضیه را، کوشی (*A. L. Cauchy*) هم‌آورده است.

می‌کند ــ مثبت می‌باشند، در آن صورت، کسر

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}$$

هم، بین همان حدها قرار خواهد گرفت. صورت این کسر برابر است با مجموع صورت‌های همهٔ کسرهای مذکور و مخرج آن نیز، برابر مجموع همهٔ مخرج‌هاست. بنابراین، برای $n > N$ داریم:

$$\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

حالا، اتحاد زیر را (که به‌سادگی ومستقیماً قابل تحقیق است) می‌نویسیم:

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_N - l y_N}{y_n} + \left(۱ - \frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right)$$

و از آن‌جا

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| \leqslant \left|\frac{x_N - l y_N}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right|$$

همان‌طور که دیدیم، جملهٔ دوم سمت راست، به‌ازای $n > N$، کمتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ باقی می‌ماند وعامل اول نیز، با توجه به $y_n \to +\infty$، کمتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ است (مثلاً، برای $n > N'$)، اگر $N' > N$ بگیریم، در آن صورت روشن است که، به ازای $n > N'$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| < \varepsilon$$

یعنی، حد $\frac{x_n}{y_n}$ برابر است با l.

حالتی هم که کسر، حدی نامتناهی داشته باشد، به حالت قبل منجر می‌شود. مثلاً فرض کنید

$$\text{حد} \quad \frac{x_n - x_{n-۱}}{y_n - y_{n-۱}} = +\infty$$

ازاین‌جا، قبل ازهرچیز، نتیجه می‌شود (برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n):

$$x_n - x_{n-۱} > y_n - y_{n-۱}$$

در نتیجه، همراه با y_n، $x_n \to +\infty$. ضمناً، واریانت x_n با بزرگ شدن n، ترقی می‌کند. در این حالت، قضیه‌ای را که ثابت کردیم، می‌توان در مورد نسبت عکس $\frac{y_n}{x_n}$ به‌کار برد:

$$\text{حد } \frac{y_n}{x_n} = \text{حد } \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = ۰$$

(زیرا، دراین‌جا، با حد متناهی سروکارداریم)، از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\text{حد } \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

چند مثال می‌آوریم.

۱۲) درمثال ۹) دیدیم که برای $a > ۱$:

$$\text{حد } \frac{a^n}{n} = +\infty$$

این‌نتیجه را، به‌کمك قضیهٔ شتولتس، می‌توان به‌راحتی به‌دست آورد:

$$\text{حد } \frac{a^n}{n} = \text{حد } (a^n - a^{n-۱}) = \text{حد } a^n\left(۱ - \frac{۱}{a}\right) = +\infty$$

(درمورد مثال ۱۱) هم، می‌توان به‌همین ترتیب، عمل کرد).

۱۳) قضیهٔ شتولتس را، برای گزارهٔ جالب زیر (که متعلق به‌کوشی است)، به‌کار می‌بریم:

اگر واریانت a_n دارای حدی (متناهی یا نامتناهی) باشد، درآن صورت،واریانت زیر هم، همان حد را دارد:

$$b_n = \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n}$$

(«واسطهٔ حسابی» n مقدار اولیه واریانت a_n).

در واقع، با فرض $x_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ و $y_n = n$ و استفاده از قضیهٔ شتولتس، داریم:

$$\text{حد } b_n = \text{حد } \frac{x_n}{y_n} = \text{حد } \frac{x_n - x_{n-۱}}{y_n - y_{n-۱}} = \text{حد } a_n$$

مثلا، اگر بدانیم [۱۵] $\sqrt[n]{n}\to ۱$، در آن‌صورت

$$\frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}\to ۱$$

۱۴) حالا، واریانت

$$z_n=\frac{۱^k+۲^k+\dots+n^k}{n^{k+۱}}$$

را (برای عدد طبیعی k) در نظر می‌گیریم که به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید.

با توجه به قضیهٔ شتولتس و با فرض $x_n=۱^k+۲^k+\dots+n^k$ و $y_n=n^{k+۱}$، داریم:

$$\text{حد } z_n=\text{حد }\frac{n^k}{n^{k+۱}-(n-۱)^{k+۱}}$$

ولی $$(n-۱)^{k+۱}=n^{k+۱}-(k+۱)n^k+\dots$$

و بنابراین $$n^{k+۱}-(n-۱)^{k+۱}=(k+۱)n^k+\dots$$

و [با توجه به مثال ۲]:

$$\text{حد } z_n=\text{حد }\frac{n^k}{(k+۱)n^k+\dots}=\frac{۱}{k+۱}$$

۱۵) در پایان، به این حد می‌پردازیم:

$$u_n=n\left(z_n-\frac{۱}{k+۱}\right)=\frac{۱^k+۲^k+\dots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+۱}$$

که در شکل اول خود به‌صورت $۰\times\infty$ و در شکل دوم خود، به‌صورت $\infty-\infty$ درمی‌آید. اگر کسرها را از هم کم کنیم، به‌عبارت مبهمی به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم:

$$u_n=\frac{(k+۱)(۱^k+۲^k+\dots+n^k)-n^{k+۱}}{(k+۱)n^k}$$

اگر صورت کسر را x_n و مخرج آن‌را y_n بگیریم، با استفاده از قضیهٔ شتولتس، داریم:

$$\text{حد } u_n=\text{حد }\frac{(k+۱)n^k-[n^{k+۱}-(n-۱)^{k+۱}]}{(k+۱)[n^k-(n-۱)^k]}$$

$$(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]=\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots$$ ولی

$$n^k-(n-1)^k=kn^{k-1}+\cdots$$

به‌نحوی که سرانجام [مثال ۲] را ببینید]:

$$\text{حد } u_n=\text{حد }\frac{\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots}{(k+1)kn^{k-1}+\cdots}=\frac{1}{2}$$

§۳. واریانت یکنوا

۳۴. حد واریانت یکنوا. قضیه‌هایی که تا این‌جا، دربارهٔ وجود حد متغیرها آورده شد، دارای این مشخصه بودند که: با فرض وجود حد برای بعضی واریانت‌ها، وجود حد را برای بعضی دیگر (که به نحوی، با اولی‌ها مربوط بودند) ثابت می‌کردیم. ولی مسألهٔ مربوط به‌وجود حد متناهی برای یك واریـانت مفروض، بدون ارتباط با سایـر متغیرها، همچنان روبه‌روی ماست. حل این مساله را درشکل کلی خود، به‌بعد وامی‌گذاریم [§۴، شماره‌های ۳۹ تا ۴۲] و دراین‌جا، تنها به‌طبقه‌ای ساده و بسیار مهم از متغیرها می‌پردازیم که، درمورد آن‌ها، می‌توان مساله را به‌سادگی حل کرد.

واریانت x_n را صعودی گویند، وقتی که داشته باشیم:

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots$$

یعنی از $n'>n$ نتیجه می‌شود $x_{n'}>x_n$. واریانت را غیرنزولی نامند، وقتی که‌داشته‌باشیم:

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}<\cdots$$

یعنی از $n'>n$ نتیجه شود: $x_{n'}\geqslant x_n$. اگراصطلاح «صعودی بودن» را به‌معنای‌وسیع‌تر خود به‌کار بریم، درحالت اخیر هم می‌توان، متغیر را صعودی نامید.

به‌همین‌ترتیب، مفهوم واریانت نزولی را هم ــ چه درمعنای اکید آن و چه به‌مفهوم وسیع‌تر آن ــ می‌توان توضیح داد. برای چنین متغیری، باید به‌ترتیب، داشته‌باشیم:

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots$$

و یا

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$$

بنابراین از $n'>n$ (برحسب حالت خود) نتیجه می‌شود: $x_{n'}<x_n$ یا $x_{n'}\leqslant x_n$.

همهٔ متغیرهای از این گونه (چه‌صعودی و چه نزولی)، دریك جهت تغییر می‌کنند و

با یک نام یکنوا نامیده می‌شوند. معمولاً، دربارهٔ این متغیرها می‌گویند: «یکنوا صعودی کنند» یا «یکنوا نزول می‌کنند».

قضیهٔ زیر، دربارهٔ واریانت‌های یکنوا، اهمیت جدی دارد.

قضیه. واریانت صعودی یکنوای x_n را در نظر می‌گیریم. اگر این واریانت از طرف بالا کران‌دار باشد

$$x_n \leqslant M \quad (M=\text{const.}, \quad n=1,2,3,\ldots)$$

در این صورت، الزاماً دارای حد متناهی است؛ و در غیر این صورت، به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

درست به همان نحو، واریانت نزولی یکنوای x_n همیشه دارای حد است. این حد، به شرطی متناهی است که از پایین کران‌دار باشد:

$$x_n \geqslant m \quad (m=\text{const.}, \quad n=1,2,3,\ldots)$$

در غیر این صورت حد واریانت $-\infty$ است.

اثبات. تنها به حالت صعودی واریانت x_n ـ ولو به مفهوم وسیع آن ـ می‌پردازیم (حالت واریانت نزولی را هم، به ترتیب مشابهی، می‌توان مورد بررسی قرار داد).

ابتدا فرض می‌کنیم، این واریانت، از بالا کران‌دار باشد. در این صورت، با توجه به قضیه‌ای که در شمارهٔ ۱۱ آوردیم، برای مجموعهٔ $\{x_n\}$ ـ مجموعهٔ مقدارهای واریانت ـ یک کران دقیق (یا مرز) بالایی (متناهی) وجود دارد:

$$a=\sup\{x_n\}$$

ثابت می‌کنیم که همین عدد a، حد واریانت x_n است.

ویژگی مشخصهٔ مرز بالا [شمارهٔ ۱۱] را به یاد بیاوریم. اولاً برای همهٔ مقدارهای n:

$$x_n \leqslant a$$

ثانیاً، عدد $\varepsilon>0$ هرچه باشد، می‌توان N را طوری پیدا کرد که

$$x_N > a-\varepsilon$$

و با توجه به یکنوائی واریانت، برای $n>N$ داریم $x_n \geqslant x_N$، یعنی طبعاً $x_n > a-\varepsilon$. در نتیجه، برای این مقدارهای n، نابرابری‌های

$$0 \leqslant a-x_n < \varepsilon \qquad \text{یا} \qquad |x_n-a|<\varepsilon$$

برقرار می‌شود و از آن‌جا: $x_n=a$ حـــد

حالا فرض‌می‌کنیم، واریانت x_n از بالا کران‌دار نباشد. دراین‌صورت، عدد $E>0$ هرقدر هم بزرگ باشد، می‌توان مقداری از متغیر را پیدا کرد که از E بزرگتر شود. این‌مقدار را x_N می‌گیریم: $x_N>E$. باتوجه‌به‌یکنوابودن واریانت x_n، برای $n>N$ داریم:

$$x_n>E$$

و این، به‌معنای آن است که: $x_n=+\infty$ حـــد

به‌سادگی معلوم است کـه همهٔ این نتیجه‌گیری‌ها، برای متغیرهایی هم که با شروع از جایی به‌بعد، یکنوا هستند، معتبر است (زیرا، بدون این‌که روی حد متغیر اثری داشته باشد، می‌توان از هرتعداد دلخواه مقدارهای اولیهٔ آن، صرف‌نظر کرد).

مثال‌های زیر، نمونه‌هایی ازکاربرد این قضیه است.

۳۵. چند مثال. ۱) بافرض $c>0$، این واریانت را درنظر می‌گیریم:

$$x_n=\frac{c^n}{n!}$$

که در آن $n!=1\times2\times3\times\dots\times n$. (این واریانت، برای $c>1$ به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید.

چون داریم:

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{c}{n+1}$$

بنابراین، متغیر تنها به‌ازای $n>c-1$ نزولی‌می‌شود و،درعین‌حال، ازپایین ومثلاً باصفر، کران‌دار است. درنتیجه، واریانت x_n، بنابرقضیهٔ دارای یك حد متناهی است که آن را a می‌نامیم.

برای به‌دست‌آوردن این حد، در برابری فـوق، حالت حدی را درنظر می‌گیریم. x_{n+1}، همان مقدارهای x_n را می‌پیماید و، بنابراین، دارای همان حد است و داریم:

$$a=a\cdot0$$

و ازآن‌جا $a=0$ و بالاخره

$$\frac{c^n}{n!}\text{ حـــد}=0$$

۲) بافرض $c>0$، مطلوب است تعیین واریانت x_n، به‌نحوی که

$$x_1=\sqrt{c},\quad x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}},\quad x_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\ \ldots$$

و به‌طور کلی

$$x_n=\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}_{n\text{رادیکال}}$$

به‌این‌ترتیب، x_{n+1} از x_n و با دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$$

روشن است که واریانت x_n صعودی یکنوا است و، درعین‌حال از بالا، و مثلاً به‌وسیلهٔ عدد $\sqrt{c}+1$ کران‌دار است، زیرا $x_1=\sqrt{c}$ به‌روشنی از عدد فوق کوچکتر است؛ حال اگر فرض کنیم، برای مقدار نامشخصی از واریانت داشته باشیم $x_n<\sqrt{c}+1$ خواهیم داشت:

$$x_{n+1}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1$$

و به‌این ترتیب، کران‌دار بودن x_n، با روش استقرای ریاضی، ثابت می‌شود.

بنا بر قضیهٔ اساسی، واریانت x_n دارای یک حد متناهی a است. برای تعیین این حد، رابطهٔ

$$x_{n+1}^2=c+x_n$$

را به‌صورت حدی می‌نویسیم. معلوم می‌شود که a، باید در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$a^2=c+a$$

وچون حد موردنظر ما نمی‌تواند منفی باشد، ریشهٔ مثبت این معادله، مقدار a را به‌دست می‌دهد:

$$a=\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$$

۳) $0<x_0<1$ را درنظر می‌گیریم و واریانت x_n را، با رابطهٔ برگشتی

$$x_{n+1}=x_n(2-x_n)$$

تعریف می‌کنیم. با فرض $0<x_n<1$ (این شرط به‌ازای $n=0$ برقرار است)، ثابت می‌کنیم

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

در واقع، چون $2-x_n>1$، پس $x_{n+1}>x_n$، ولی داریم:

$$x_n(2-x_n)=1-(1-x_n)^2$$

و از آن جا $x_{n+1}<1$. به‌این‌ترتیب، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود که واریانت

x_n صعودی یکنوا و همواره کوچکتر از واحد است و در نتیجه دارای حد $a\neq 0$ است. ضمن گذر به حد، در رابطهٔ برگشتی، معلوم می‌شود که $a=1$ و بنابراین $x_n \to 1$.

از خواننده می‌خواهیم روشن کند. درحالتی که x_n در بیرون فاصلهٔ $(0,1)$ قراردارد، چه‌وضعی پیش می‌آید!

یادداشت. اگر c عددی مثبت و دلخواه باشد و فرض کنیم $x_n = cy_n$، رابطهٔ برگشتی قبل، به‌این صورت درمی‌آید:

$$y_{n+1} = y_n(2 - cy_n)$$

اگرمقدار اولیهٔ y_0 را باشرط $0 < y_0 < \frac{1}{c}$ درنظر بگیریم، نتیجه می‌شودکه y_n صعودی یکنواست و بـه‌سمت $\frac{1}{c}$ میل می‌کند. درماشین‌های‌حساب، با استفاده ازهمین‌طرح، عکس عدد c را محاسبه می‌کنند.

۴) دوعدد مثبت a و b $(a>b)$ را درنظر می‌گیریم. واسطهٔ حسابی وهندسی این دوعدد، چنین است:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

می‌دانیم که واسطهٔ حسابی بزرگتر از واسطهٔ هندسی است* و، درعین‌حـال، هردو واسطه، بین عددهای اصلی قرار دارند:

$$a > a_1 > b_1 > b$$

واسطه‌های حسابی وهندسی را، مجدداً برای دوعدد a_1 و b_1 تشکیل می‌دهیم:

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

ضمناً

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1$$

وهمین‌طور تا آخر. اگرعددهای a_n و b_n معلوم باشند، آنگاه a_{n+1} و b_{n+1} ازروی‌دستورهای

---

*) درستی این‌حکم، از نابرابری زیر روشن می‌شود (برابری $a\neq b$):

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\ ,\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

معین می‌شوند و مانند قبل

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n$$

به‌این‌ترتیب، دو واریانت a_n و b_n بدست می‌آید که از آن‌ها، اولی نزولی ودومی صعودی است (و مثل این است که به‌سمت یکدیگر می‌روند) و ، درعین‌حال، داریم:

$$a>a_n>b_n>b$$

بنابراین،هردو واریانت کران‌دارهستند و، درنتیجه،هردو به‌سمت‌حدهای‌متناهی میل‌می‌کنند:

$$\alpha=\text{حد}\ a_n,\qquad \beta=\text{حد}\ b_n$$

اگر در برابری

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

به‌سمت حالت حدی برویم، به‌دست می‌آید:

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow\alpha=\beta$$

به‌این‌ترتیب، هر دو دنباله ــ هم واسطه‌های حسابی a_n و هم واسطه‌های هندسی b_n به‌سمت حد مشترک $\mu=\mu\ (a\ ,\ b)$ میل می‌کنند که، به پیروی از گوس (C. F. Gauss)، آن‌را «واسطهٔ حسابی ــ هندسی»، دوعدد a و b می‌نامیم. ما نمی‌توانیم، در اینجا عبارت $\mu(a\ ,\ b)$ را برحسب a و b محاسبه کنیم. برای این منظور، به اصطلاح انتگرال‌های بیضوی نیاز داریم [جلد دوم را ببینید].

۵) دوباره، عددهای‌مثبت a و b $(a>b)$ را درنظرمی‌گیریم واین‌بار، پشت‌سرهم، واسطه‌های حسابی و توافقی* را تشکیل می‌دهیم:

---

*) عدد c را واسطهٔ توافقی دوعدد مثبت a و b گوییم، وقتی‌که عکس‌آن $\frac{1}{c}$ ، واسطهٔ حسابی عکس‌های a و b (یعنی $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$) باشد:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Rightarrow c=\frac{2ab}{a+b}$$

$$a_1=\frac{a+b}{2}, \qquad b_1=\frac{2ab}{a+b}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$$

. . . . . .

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, \qquad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

. . . . . .

از نابرابری معلوم $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ (برای $a\neq b$) نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$$

بنابراین، واسطهٔ حسابی بزرگتر از واسطهٔ توافقی است و هر دو مقدار، بین دوعدد a و b قرار دارند. با به‌کاربردن این نابرابری درمورد a_n و b_n داریم:

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n$$

شبیه مثال قبل، می‌توان ثابت کرد که هر دو واریانت a_n و b_n به‌سمت حد مشترک c میل می‌کنند، که می‌توان آن‌را «واسطهٔ حسابی ـ توافقی» دوعدد a و b نامید. ولی در این‌جا، c به‌سادگی برحسب a و b قابل محاسبه است. به‌سادگی دیده می‌شود:

$$a_1b_1=ab$$

و به‌همین ترتیب $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$. از این‌جا، نتیجه می‌شود که به‌ازای همهٔ مقدارهای n داریم:

$$a_nb_n=ab$$

که با گذر به‌حد، به‌دست می‌آید:

$$c=\sqrt{ab}$$

یعنی «واسطهٔ حسابی ـ توافقی» دوعدد، برابر است با «واسطهٔ هندسی» آن‌ها.

۶) درپایان، مثال پیچیده‌تری را مطرح می‌کنیم.

با شروع از یک‌عدد حقیقی c، فرض می‌کنیم $x_1=\frac{c}{2}$ و مقدارهای بعدی واریانت x_n

را با رابطهٔ برگشتی زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{x_n^2}{2} \qquad (1)$$

و می‌خواهیم مسالهٔ حد این‌واریانت را، برای دوحالت مختلف c، مورد بررسی‌قراردهیم، اگر بدانیم‌که این واریانت، دارای حد متناهی است:

$$a=\lim x_n \qquad (2)$$

درآن‌صورت، تعیین این‌حد مشکلی ایجاد نمی‌کند.کافی است، در رابطهٔ (۱)، واریانت‌را مشخص‌کنیم و به‌حالت حدی برویم:

$$a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2-2a+c=0$$

از این معادلهٔ درجه دوم، می‌توان بدست‌آورد:

$$a=1\underset{(+)}{-}\sqrt{1-c} \qquad (3)$$

و ازاین‌جا معلوم‌می‌شود که‌واریانت x_n، به‌ازای $c>1$، نمی‌تواند دارای حدمتناهی باشد.

الف) ابتدافرض‌می‌کنیم $0<c\leqslant 1$. دراین‌صورت، روشن‌است‌که $x_n>0$. برابری

$$x_n=\frac{c}{2}+\frac{x_{n-1}^2}{2}$$

را، که شبیه رابطهٔ (۱) است، عضو به‌عضو از خود رابطهٔ (۱)کم می‌کنیم:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2-x_{n-1}^2}{2}$$

روشن است‌که $x_1=\frac{c}{2}<x_2$ و از برابری اخیر نتیجه می‌شود کـه اگـر داشته بـاشیم $x_{n-1}<x_n$، داریم $x_n<x_{n+1}$. به‌این‌ترتیب، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود که واریانت x_n، صعودی یکنواست.

به‌طرز مشابهی، کران‌دار بودن (ازبالا) این واریانت، ثابت می‌شود:

$$x_n<1$$

این نابرابری برای $n=1$ روشن‌است و، ضمناً، اگر به‌ازای مقدار دلخواهی از n درست باشد، بنابر رابطهٔ (۱)، برای $n+1$ هم درست خواهد بود. یعنی حد (۲) واقعاً

وجود دارد. این حد، با دستور (۳) بیان می‌شود. که باید علامت منفی را در جلو رادیکال درنظر گرفت، زیرا مقدار حد نمی‌تواند بزرگتر از ۱ باشد.

ب) حالا فرض می‌کنیم $0 > c \geqslant -3$. بدیهی است که برای همهٔ مقدارهای n داریم:

$$x_n \geqslant \frac{c}{2}$$

ثابت می‌کنیم که در این حالت داریم: $x_n < 0$. این حکم برای $n = 1$ روشن است و اگر برای مقدار نامشخص n درست باشد، در آن صورت

$$|x_n| \leqslant \frac{|c|}{2}, \qquad x_n^2 \leqslant \frac{|c|^2}{4} < |c| \qquad \left(\text{زیرا } \frac{|c|}{4} < 1\right)$$

و x_{n+1} دارای همان علامت $\frac{c}{2}$، یعنی منفی، می‌شود.

این بار، واریانت x_n یکنوا نیست. با وجود این، اگر در (۱) فرض کنیم: $n = 2k$، $2k-2$ و سپس: $n = 2k+1$، $2k-1$، و در هر دو حالت، عضو به عضو از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_{2k+1} - x_{2k-1} = \dfrac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2} \\ x_{2k+2} - x_{2k} = \dfrac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2} \end{cases} \tag{۴}$$

از این‌جا، با روش استقرای ریاضی، می‌توان نتیجه گرفت که همواره

$$x_{2k+1} > x_{2k-1} \qquad \text{و} \qquad x_{2k+2} < x_{2k}$$

در واقع، $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$، آنگاه $|x_3| < |x_1|$ و $x_3^2 < x_1^2$ و از روی دستور دوم (۴) (به‌ازای $k = 1$) خواهیم داشت: $x_4 < x_2$ و در نتیجه $|x_4| < |x_2|$ و $x_4^2 < x_2^2$ و، با توجه به‌دستور اول (۴) (به‌ازای $k = 2$)، داریم $x_5 > x_3$ و به‌همین ترتیب تا آخر.

به‌این ترتیب، در این حالت، هر کدام از واریانت‌های x_{2k-1} و x_{2k} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ یکنوا هستند؛ و چون بین کران‌های متناهی $\frac{c}{2}$ و 0 قرار گرفته‌اند، هر دو دارای حدهای متناهی هستند.

$$a' = \text{حد}\ x_{2k-1}, \qquad a'' = \text{حد}\ x_{2k}$$

حالا ثابت می‌کنیم $a' = a''$. برای این مقصود، علامت n را در (۱)، ابتدا از طریق مقدارهای زوج، و سپس، ازطریق مقدارهای فرد، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم؛ درحد دو رابطه به‌دست می‌آید:

$$a' = \frac{c}{2} + \frac{a''^2}{2}, \qquad a'' = \frac{c}{2} + \frac{a'^2}{2} \qquad (۵)$$

با کم‌کردن آن‌ها از یکدیگر، c حذف می‌شود:

$$(a' - a'')(a' + a'' + 2) = 0$$

پرانتز دوم نمی‌تواند برابر صفر شود (زیرا $c > -3$) و، بنابراین، باید داشته باشیم: $a' = a''$. در واقع، اگر خلاف آن را در نظر بگیریم و $a'' = -a' - 2$ را در دستور اول (۵) بگذاریم، به‌معادلهٔ درجه دوم

$$a'^2 + 2a' + (4 + c) = 0$$

برحسب a' می‌رسیم که برای $c > -3$، ریشهٔ‌حقیقی ندارد. بالاخره، به‌ازای $c = -3$، هر دو پرانتز باهم برابر صفر می‌شوند، زیرا دراین‌حالت به‌دست می‌آید: $a' = -1$ و $a'' = -1$.

بنابراین، درهمهٔ حالت‌ها داریم $a' = a''$. اگر مقدار مشترك این‌حدها را a بنامیم، برای مقدار a عبارت (۳) را داریم و روشن است‌که باز هم علامت منفی جلو رادیکال‌را باید درنظرگرفت، زیرا حد واریانت x_n نمی‌تواند مثبت باشد.

این مثال‌ها، دستاویزی برای یادداشت زیر به‌دست می‌دهد. قضیه‌ای را که ثابت کردیم، نوعی «قضیهٔ وجود» است و، به‌کمك‌آن، می‌توان وجود حد را ثابت کرد، ولی هیچ روشی برای تعیین این‌حد به‌دست نمی‌دهد. با همهٔ این‌ها، این قضیه، اهمیت زیادی دارد. از یك طرف، دربسیاری از مسأله‌ها، تنها اثبات «وجود» حد مورد نیاز است. از طرف دیگر، در اغلب موردها، حصول اطمینان قبلی به «وجود» حد، می‌تواند راه‌گشای محاسبهٔ آن باشد. مثلاً، در مثال‌های ۱)، ۲)، ۳)، ۵)، ۶)، دانستن حقیقت وجود حد، به‌کمك گذر به‌حد در بعضی رابطه‌ها، امکان‌محاسبهٔ مقدار حد را به‌دست داد. دراین‌مورد، به‌خصوص، مثال ۶) آموزنده است. عبارت (۳)، به‌ازای $c > -3$، معنا دارد. ولی، این به‌هیچ‌وجه، به‌معنای‌آن نیست‌که واریانت، دراین حالت هم، حدی داشته باشد. و در واقع، دراین‌جا، حد وجودندارد. مثلاً، به‌ازای $c = -4$، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد

که واریانت، دنبالهٔ مقدارهای

$$\ldots\ ,\ -۲{,}۵\ ,\ -۲{,}۵\ ,\ \ldots$$

را می‌پیماید و دارای هیچ‌حدی نیست.

درمثال ۴)، برای حد، عبارتی نداریم، ولی بـا اطلاع براین مطلب که حد وجود دارد، به‌سادگی می‌تـوانیم آن را، بـا تقریب دلخواه، حساب کنیم ، زیـرا این حد بین واریانت‌های a_n و b_n قرار دارد که از دوطرف، به‌سمت آن میل می‌کنند.

در شمارهٔ بعدی، بازهم بایکی از مهم‌ترین مثال‌های کاربرد قضیهٔ مربوط به‌واریانت یکنوا، آشنا خواهیم شد.

۳۶. عدد e. با استفادهٔ از حد، عدد جدیدی را پیدا می‌کنیم که، تاکنون، برخوردی با آن نداشته‌ایم. واریانت

$$x_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

را درنظر می‌گیریم و می‌کوشیم قضیهٔ شمارهٔ **۳۴** را برای آن به‌کاربریم.

چون با ترقی‌نمای n، پایهٔ توان نزول می‌کند، یکنوایی واریانت، مستقیماً، به چشم نمی‌خورد. برای اثبات مطلب، می‌توان از دستور دوجمله‌ای، استفاده کرد:

$$x_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۱+n.\frac{۱}{n}+\frac{n(n-۱)}{۱.۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱.۲.۳}\cdot\frac{۱}{n^۳}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-۱)\ldots(n-k+۱)}{۱.۲.۳\ldots k}\cdot\frac{۱}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-۱)\ldots(n-n+۱)}{۱.۲.۳\ldots n}\cdot\frac{۱}{n^n}=$$

$$=۱+۱+\frac{۱}{۲!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)+\frac{۱}{۳!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)+\ldots+\frac{۱}{k!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(۱-\frac{k-۱}{n}\right)+\ldots+\frac{۱}{n!}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\ldots\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right)\qquad(۶)$$

حالا اگر از x_n به $x_{n+۱}$ برویم، یعنی n را یك واحد افزایش بدهیم، قبل از همه، عضو $(n+۱)$ام (مثبت) اضافه می‌شود و هرکدام از $(n+۱)$ جملهٔ قبلی هم، بزرگ‌می‌شود، زیرا درون هر یك از پرانتزها از شکل $\left(۱-\frac{s}{n}\right)$ به‌شکل جملهٔ بزرگتر $\left(۱-\frac{s}{n+۱}\right)$ تبدیل می‌شود و از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$x_{n+1} > x_n$$

یعنی واریانت x_n، صعودی است.

اکنون ثابت می‌کنیم که x_n از بالا کران‌دار است.

اگر در رابطهٔ (۶)، از همهٔ پرانتزها صرف‌نظر کنیم، مقدار عبارت بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین

$$x_n < ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} = y_n$$

اگر در مخرج‌ها، با شروع از جملهٔ سوم، همهٔ عامل‌ها را به ۲ تبدیل کنیم، باز هم عبارت بزرگ‌تر می‌شود:

$$y_n < ۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

ولی این تصاعد (با جملهٔ اول $\frac{۱}{۲}$)، مجموعی بزرگ‌تر از ۱ دارد و بنابراین $y_n < ۳$ و بدیهی است که $x_n < ۳$. از این‌جا، بنابر قضیهٔ شمارهٔ ۳۴، معلوم می‌شود که واریانت x_n دارای حد متناهی است. به‌پیروی از اولر (L. Euler)، این حد را با حرف e نشان می‌دهیم:

$$e = \text{حد} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$$

این عدد، چه درخود آنالیز و چه در زمینه‌های وابسته به‌آن، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد و مقدار آن، تا ۱۵ رقمی دهدهی، چنین است:

$$e = ۲/۷۱۸۲۸\ ۱۸۲۸۴\ ۵۹۰۴۵\ldots$$

در شمارهٔ بعد، روش سادهٔ محاسبهٔ تقریبی عدد e را ارائه می‌دهیم و، درضمن، ثابت می‌کنیم که e، عددی گنگ است.

بعضی ویژگی‌های عدد e، که بعداً [۵۴، (۱۳)] ثابت می‌کنیم، انتخاب این عدد را به‌عنوان پایه‌ای برای دستگاه لگاریتمی، به‌خصوص، مفید می‌کند، لگاریتم با پایهٔ e، لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود و آن را با نماد ln ــ بدون نوشتن پایه، نمایش می‌دهند. در بررسی‌های نظری، منحصراً از لگاریتم طبیعی استفاده می‌شود.*

---

*) این لگاریتم را گاهی، به مناسبت نام ریاضی‌دان اسکاتلندی نپر (*J.Napier*، سده‌های شانزدهم و هفدهم) مخترع لگاریتم، لگاریتم نپری می‌نامند. خود نپر از پایهٔ این دستگاه لگاریتمی، اطلاعی نداشت (زیرا، آن را، به‌سلیقهٔ خود، برمبنای دیگری ساخت)، ولی لگاریتم او، با پایه‌ای نزدیک به $\frac{۱}{e}$ ساخته شده است. معاصر او بورگی (*J.Burgi*). دستگاه لگاریتمی نزدیک به‌پایهٔ e ساخت.

یادآوری می‌کنیم که لگاریتم معمولی دهدهی، یا لگاریتم طبیعی، به‌وسیلهٔ دستور

$$\log x = \ln x \cdot M$$

مربوط می‌شوند، که در آن، M مدول تبدیل لگاریتم و برابر است با

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0/434294\ldots$$

که، درواقع، می‌توان آن‌را، با لگاریتم گرفتن در پایهٔ ۱۰، از اتحاد $x = e^{\ln x}$ به‌دست آورد.

۳۷. محاسبهٔ تقریبی عدد e. برمی‌گردیم به‌رابطهٔ (۶). اگر k را تثبیت و $n > k$ فرض کنیم و از همهٔ جمله‌های بعد از جملهٔ $(k+1)$ام صرف‌نظر کنیم، مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

اگر n را به‌سمت بی‌نهایت میل دهیم، چون همهٔ پرانتزها دارای حد ۱ می‌باشند، داریم:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k$$

این نابرابری به‌ازای هر عدد طبیعی k برقرار است. به‌این‌ترتیب: خواهیم داشت:

$$x_n < y_n \leqslant e$$

از آن‌جا [بنا به‌قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۳۸] روشن است که

$$y_n = e \quad \text{حد}$$

یادآوری می‌کنیم که y_n عبارت است از مجموع جزئی $(n+1)$ام در رشتهٔ نامتناهی

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

رابطهٔ حدی که هم‌اکنون نوشتیم، نشان می‌دهد که e برابر مجموع این رشته است؛ همچنین می‌توان گفت که e به‌این رشته، بسط داده می‌شود و می‌نویسند:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

واریانت y_n، برای محاسبهٔ مقدار تقریبی عدد e، به‌مراتب مناسب‌تر از x_n است،

درجهٔ نزدیکی y_n به e را برآورد می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا تفاضل بین مقدار دلخواه y_{n+m} ($m = ۱,۲,۳,\ldots$)، که بعداز y_n قرار گرفته است، را با خود y_n در نظر می‌گیریم:

$$y_{n+m} - y_n = \frac{۱}{(n+۱)!} + \frac{۱}{(n+۲)!} + \cdots + \frac{۱}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{۱}{(n+۱)!}\left[۱ + \frac{۱}{n+۲} + \frac{۱}{(n+۲)(n+۳)} + \cdots + \frac{۱}{(n+۲)(n+۳)\cdots(n+m)}\right]$$

اگر درمخرج کسرهای داخل کروشه، همهٔ عامل‌ها را به $(n+۲)$ تبدیل کنیم، نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$y_{n+m} - y_n < \frac{۱}{(n+۱)!}\left[۱ + \frac{۱}{n+۲} + \frac{۱}{(n+۲)^۲} + \cdots + \frac{۱}{(n+۲)^{m-۱}}\right]$$

که اگر داخل کروشه را مجموع یک تصاعد هندسی نامتناهی در نظر بگیریم، نابرابری باز هم تقویت می‌شود:

$$y_{n+m} - y_n < \frac{۱}{(n+۱)!} \cdot \frac{n+۲}{n+۱}$$

در این جا، n را ثابت نگاه می‌داریم و m را تا بی‌نهایت افزایش می‌دهیم، در این صورت، واریانت y_{n+m} (که دارای اندیس m است)، دنبالهٔ مقدارهای زیر را اختیار می‌کند:

$$y_{n+۱}, y_{n+۲}, y_{n+۳}, \cdots, y_{n+m}, \cdots$$

و روشن است که به‌سمت e میل می‌کند، یعنی درحد داریم:

$$e - y_n \leqslant \frac{۱}{(n+۱)!} \cdot \frac{n+۲}{n+۱}$$

و یا سرانجام

$$۰ < e - y_n < \frac{۱}{n!n}$$

(زیرا، نابرابری $\frac{n+۲}{(n+۱)^۲} < \frac{۱}{n}$ به‌سادگی قابل تحقیق است).

اگر نسبت تفاضل $e - y_n$ را بر عدد $\frac{۱}{n!n}$ برابر θ بگیریم (و روشن است که این

نسبت بین ۰ و ۱ قرار دارد)، می‌توانیم بنویسیم:

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!n}$$

و اگر به‌جای y_n، عبارت گستردهٔ آن را بگذاریم، دستور بسیار مهم زیر به‌دست می‌آید:

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{n!}+\frac{\theta}{n!n} \qquad (۷)$$

که نقطهٔ آغازی برای محاسبه e است. باحذف جملهٔ «متمم» و جای‌گزین‌کردن‌هر کدام از جمله‌های دیگر، بامقدار دهدهی تقریبی آن، مقدار تقریبی عدد e به‌دست می‌آید.

اگر بخواهیم، مثلاً، عدد e را از روی‌دستور (۷) با تقریب $\frac{۱}{۱۰^۷}$ محاسبه‌کنیم، قبل‌از هرچیز باید معلوم‌کنیم‌که عدد n را چقدر باید بگیریم (n موجود دربسط)، تا این تقریب حاصل شود؟

با محاسبهٔ عددهای متوالی عکس فاکتوریل‌ها، می‌بینیم‌که به‌ازای $n=۱۰$، جملهٔ «متمم» دستور (۷)، چنین می‌شود:

$$\frac{\theta}{n!n}=\frac{\theta}{۱۰!۱۰}<۰/۰۰۰۰۰۰۰۳$$

به‌نحوی که باحذف آن، مرتکب اشتباهی‌کمتر از میزان موردنظر می‌شویم، بنابراین، می‌توانیم در همین مقدار توقف‌کنیم. هرکدام از جمله‌های دیگر به‌کسر دهدهی تبدیل و آن‌ها را روی رقم هشتم دهدهی گرد می‌کنیم، تا این‌که مقدار مطلق خطا،کمتر از نصف واحد مرتبهٔ هشتم، یعنی‌کمتراز $\frac{۱}{۲\times۱۰^۸}$، باشد. نتیجه محاسبه‌ها را در جدول مجاور آورده‌ایم. درکنار عددهای تقریبی علامت (+ یا −) وجود دارد و به‌معنای آن است‌که باید چیزی به‌عدد اضافه، یا ازآن‌کم شود، تا عدد واقعی به‌دست آید.

	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰
$\frac{۱}{۲!}=$	۰/۵۰۰۰۰۰۰۰
$\frac{۱}{۳!}=$	۰/۱۶۶ ۶۶۶ ۶۷−
$\frac{۱}{۴!}=$	۰/۰۴۱ ۶۶۶ ۶۷−

بنابراین، همان‌طور که می‌بینیم،اصلاح مربوط به‌حذف جملهٔ متمم، از $\frac{۳}{۱۰^۸}$ کمتر است. حالا، با به‌حساب آوردن گردکردن‌ها (با توجه به‌علامت‌ها) به‌سادگی معلوم می‌شود که‌کل اصلاح، که درمقدار تقریبی e به دست آمده است، بین عددهای

$\frac{۳}{۱۰^۸}$ — و $\frac{۵}{۱۰^۸}$ قرار دارد. ازآن‌جا، معلوم می‌شود که خود عدد e، بین مقدارهای زیر واقع است:

۲/۷ ۱۸ ۲۸۱ ۸۶

و

۲/۷ ۱۸ ۲۸۱ ۷۸

که می‌توان فرض کرد:

$$e = ۲/۷۱۸\ ۲۸۱ \pm ۰/۰۰۰\ ۰۰۰۱$$

یادآوری می‌کنیم که از همین دستور (۷)، می‌توان برای اثبات گنگ بودن عدد e هم، استفاده کرد.

$$\frac{۱}{۵!} = ۰/۰۰۸\ ۳۳۳\ ۳۳ +$$

$$\frac{۱}{۶!} = ۰/۰۰۱\ ۳۸۸\ ۸۹ -$$

$$\frac{۱}{۷!} = ۰/۰۰۰\ ۱۹۸\ ۴۱ +$$

$$\frac{۱}{۸!} = ۰/۰۰۰\ ۰۲۴\ ۸۰ +$$

$$\frac{۱}{۹!} = ۰/۰۰۰\ ۰۰۲\ ۷۶ -$$

$$\frac{۱}{۱۰!} = ۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۲۸ -$$

۲/۷۱۸۲۸۱۸۱

اثبات را، به‌طریق برهان خلف می‌دهیم. فرض کنیم که e برابر عدد گویای $\frac{m}{n}$ باشد.

اگر به‌ازای همین مقدار n، دستور (۷) را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{m}{n} = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \dots + \frac{۱}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \qquad (۰ < \theta < ۱)$$

دوطرف این برابری را در $n!$ ضرب می‌کنیم، بعداز ساده‌کردن کسرها، معلوم می‌شود که در سمت چپ تساوی، یك عدد درست و درسمت راست تساوی، یك عدد درست وکسر $\frac{\theta}{n}$ به‌دست می‌آید و این، ممکن نیست. همین تناقض نشان می‌دهد که e، عددی است گنگ.

۳۸. پیش قضیه دربارهٔ بازه‌های (فاصله‌های) تودرتو. در پایان این‌قسمت، که به بحث دربارهٔ واریانت‌های یکنوا مربوط می‌شد، به دو واریانتی توجه می‌کنیم که ضمن تغییر خود، هرکدام به‌طرف دیگری برود، مثل این که «به‌ملاقات» یکدیگر می‌آیند:

واریانت صعودی x_n و واریانت نزولی y_n را درنظر می‌گیریم، که درضمن

$$x_n < y_n \qquad (۸)$$

اگر تفاضل $y_n - x_n$ آن‌ها، به‌سمت صفر میل کند، درآن صورت، دو واریانت، حد مشترکی دارند:

$$c = \text{حد}\ x_n = \text{حد}\ y_n$$

درواقع، به‌ازای همهٔ مقدارهای n داریم $y_n \leqslant y_1$، یعنی بنا به (۸): $x_n < y_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ومتغیر صعودی x_n، از بالا کران‌دار و دارای یك حد متناهی است.

$$c = \text{حد}\ x_n$$

به‌همین‌ترتیب، برای متغیر نزولی y_n خواهیم داشت:

$$y_n > x_n \geqslant x_1$$

بنابراین، این متغیر هم دارای یك حد متناهی است:

$$c' = \text{حد}\ y_n$$

ولی، بنا به‌قضیه ۱° ازشمارهٔ ۳۰، تفاضل دو حد

$$c' - c = \text{حد}\ (y_n - x_n)$$

بنابرفرض، برابر صفر است و درنتیجه $c' = c$.

این حکم را، به‌صورت دیگری هم (که غالباً درعمل مورد استفاده قرار می‌گیرد)، می‌توان ثابت کرد.

مجموعهٔ همهٔ عددهای x (یا به‌اصطلاح «نقطه‌ها»)، که در نابرابری

$$a \leqslant x \leqslant b$$

صدق کنند، بازهٔ $[a\ ,\ b]$ (که در آن $a < b$) نامیده می‌شود.

عددهای (یا «نقطه‌های») a و b را، به‌ترتیب، انتهای چپ و انتهای راست بازه و تفاضل $b - a$ را درازای بازه می‌نامیم. به‌سادگی دیده می‌شود که، روی محور عددی، هر بازه، نظیر یك پاره‌خط (به‌همان درازا) است.

قرار می‌گذاریم که بازهٔ $[a'\ ,\ b']$ مشمول بازهٔ $[a\ ,\ b]$ باشد، یعنی در داخل آن قرار گیرد، وقتی که همهٔ نقطه‌های بازهٔ اول، به بازهٔ دوم تعلق داشته باشد، به‌زبان دیگر

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b$$

که معنای هندسی روشنی دارد.

هرگاه، دنباله‌ای نامتناهی از بازه‌های تودرتو (یکی در درون دیگری) وجود داشته باشد

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ldots$$

به‌نحوی‌که هربازه در درون بازهٔ پیش ازخود باشد و ، ضمناً، درازای این بازه‌ها،باافزایش n، به‌سمت ۰ میل‌کند:

$$\lim (b_n - a_n) = 0$$

آن‌گاه، دو انتهای a_n و b_n بازه‌ها (از دوجهت مختلف)، به‌سمت حدمشترکی میل‌می‌کنند:

$$b = \lim a_n = \lim b_n$$

این نقطه منحصر به‌فرد است و همان نقطهٔ مشترك همهٔ پاره‌خطهاست.

این حکم، با اندکی تفاوت، همان حکم قضیه‌ای است‌که، هم‌اکنون، ثابت‌کردیم، طبق شرط

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$$

دراین‌جا، نقش واریانت‌های x_n و y_n، بـه عهدهٔ انتهای چپ a_n و انتهای راست b_n، از بازهٔ nام، است.

چون a_n، به‌طور صعودی، به‌سمت c میل می‌کند و b_n نزولی است، بنابراین

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

یعنی، نقطهٔ c واقعاً به همهٔ بـازه‌ها تعلق دارد. در ضمن، نقطهٔ دیگری مانند c' (و غیر از c) نمی‌تواند دارای همین ویژگی باشد، زیرا درغیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$b_n - a_n \geqslant |c' - c| > 0$$

و درنتیجهٔ بازهٔ n ام، نمی‌تواند به‌سمت صفر میل‌کند.

در آینده، بارها، به این‌گزاره ــ که آن را «پیش قضیه دربارهٔ بازه‌های تو در تو» می‌نامیم ــ استناد خواهیم‌کرد.

§۴. اصل تقارب. حدهای جزیی

۳۹. اصل تقارب (هم‌گرائی). فـرض‌کنید: واریـانت x_n، دنبالهٔ مقدارهـای زیر را بپیماید:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots \qquad (1)$$

می‌خواهیم، مسالهٔ مربوط به معیارکلی وجود حد متناهی، برای این واریـانت را، مورد بررسی قرار دهیم. خود تعریف حد، نمی‌تواند برای این‌منظور، مورد استفاده قرارگیرد،

زیرا درآن‌جا پای حدی درمیان است که هنوز باید دربارهٔ وجود آن صحبت کرد. ما به نشانه‌ای احتیاج داریم که تنها به‌مفروض‌های ما، یعنی به‌مقدارهای دنبالهٔ (۱)، مربوط شود.

این مساله را، قضیهٔ مهم زیر حل می‌کند. قضیه متعلق است به‌بولزانو (B. Bolzano)، ریاضی‌دان چك و کوشی (A. L. Cauchy)، ریاضی‌دان فرانسوی است. این قضیه، به اصل تقارب (یا اصل همگرائی) معروف شده است.

قضیه: برای آن‌که واریانت x_n، به‌طورکلی، دارای حد متناهی باشد، لازم وکافی است که برای هرعدد $\varepsilon>0$، عدد N به‌قسمی وجود داشته باشد که نابرابری

$$|x_n-x_{n'}|<\varepsilon \qquad (۲)$$

تنها وقتی صادق باشد که $n>N$ و $n'>N$.

همان‌طور که می‌بینیم، اصل مطلب دراین است که باید، مقدارهای متغیر، با بالارفتن شمارهٔ آن‌ها، بین خودشان، به‌هم نزدیك شوند. به‌اثبات قضیه می‌پردازیم.

شرط لازم است. اگر واریانت x_n، دارای حد متناهی a باشد، بنابه تعریف حد [۲۳]، برای عدد دلخواه $\varepsilon>0$، می‌توان N را طوری پیدا کرد که به‌ازای $n>N$، همواره داشته باشیم:

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

حالا دو شمارهٔ دلخواه $n>N$ و $n'>N$ را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که برای آن‌ها، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم:

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{۲} \quad و \quad |a-x_{n'}|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

از آن‌جا

$$|x_n-x_{n'}|=|(x_n-a)+(a-x_{n'})|\leqslant|x_n-a|+|a-x_{n'}|<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

و به‌این ترتیب، لزوم شرط ثابت می‌شود.

شرط کافی است. اگر شرط قضیه برقرار باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که، درآن‌صورت، برای واریانت x_n، یك حد معین متناهی وجود دارد. برای این‌منظور، در حوزهٔ عددهای حقیقی، برشی به‌این‌صورت، به‌وجود می‌آوریم: درطبقهٔ پایین A، هر عدد حقیقی α را

قرار می‌دهیم که درمورد آن، باشروع از شماره‌ای به‌بعد، داشته باشیم:

$$x_n > \alpha$$

و درطبقهٔ بالای A' نیز، بقیهٔ عددهـای حقیقی α' را (یعنی ، آن‌هایی را که در A قرار ندارند)، قرار می‌دهیم.

قبل از هرچیز، ثابت می‌کنیم که این طبقه‌هـا تهی نیستند. و، برای این منظور، از شرط‌های قضیه استفاده می‌کنیم. اگر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، شمارهٔ N نظیر آن را (به‌مفهومی که در آن‌جا گفته شده است)، اختیار می‌کنیم. اگر داشته باشیم: $n > N$ $n' > N$، آن‌گاه نابرابری (۲) برقرار است، و از آن‌جا

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon \qquad (۳)$$

حالا می‌بینیم که هرعدد $x_{n'} - \varepsilon$ $(n' > N)$ بـه‌خودی خود، درطبقهٔ A قرار دارد، زیرا برای مقادیر به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ n (به‌خصوص برای $n > N$)، x_n از آن تجاوز می‌کند. از طرف دیگر، از آن‌جا که (برای همان مقدارهای n)، x_n کوچکتر از هرعدد به‌صورت $x_{n'} + \varepsilon$ $(n' > N$ به‌ازای) درمی‌آید، بنابراین، حتی یکی از این‌عددها، نمی‌تواند به A تعلق داشته باشد و، بنابراین، به‌طبقهٔ A' مربوط می‌شود.

خود تعریف طبقه‌های A و A'، مستقیماً، نشان می‌دهد که هرعدد حقیقی، در یکی و تنها یکی ازاین طبقه‌ها قرار دارد و، ضمناً، هرعدد α (از A)، کوچکتر است ازهرعدد α' (از A')؛ زیرا اگر فرض کنیم $\alpha > \alpha'$، واریانت x_n، با شروع از جایی، از α' تجاوز می‌کند، که برخلاف تعریف عددهای α' است. به‌این‌ترتیب، تقسیمی که درحوزهٔ عددهای حقیقی به‌وجود آوریم، در واقع، یك‌برش است.

براساس قضیهٔ ددکیند [۱۰]، عـددی حقیقی مثل a* وجود دارد، به‌نحوی که بین عددهای دوطبقه محصور باشد:

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$$

ولی، همان‌طور که دیدیم، برای هر $n' > N$، عـدد $x_{n'} - \varepsilon$ یکی‌از عددهای α، و عدد $x_{n'} + \varepsilon$ یکی‌از عددهای α' است. به‌این‌ترتیب، برای هر $n' > N$.

$$x_{n'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{n'} + \varepsilon$$

یا

$$|a - x_{n'}| = |x_{n'} - a| \leqslant \varepsilon$$

---

*) درقضیهٔ نامبرده، این عدد را β نامیده‌ایم.

که بنابه تعریف حد [۲۳]، به معنای آن است که

$$a = \text{حـــد}\ x_n$$

و قضیه ثابت شده است. در بحث‌های بعدی، بارها از این قضیه استفاده خواهیم کرد.

۴۰. دنباله‌های جزئی و حدهای جزئی. درکناردنبالهٔ (۱)، یك‌دنباله جزئی (یاذیر دنبالهٔ)، که از دنبالهٔ (۱) درآمده است، در نظر می‌گیریم:

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots,\ x_{n_k},\cdots \qquad (۴)$$

که درآن، $\{n_k\}$ عبارت است از دنباله‌ای صعودی از عددهای طبیعی:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \qquad (۵)$$

در این‌جا، نقش شماره‌ای کـه، پشت سرهم، در دنبالهٔ عددهای طبیعی، انتخاب شده است، نه به‌عهدهٔ n، بلکه به‌عهدهٔ k است، وواریانت n_k است که‌مقدارهای طبیعی‌را اختیارمی‌کند و باترقی k، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

اگردنبالهٔ (۱)،دارای حد معین a (متناهی‌یانامتناهی) باشد، آن‌گاه دنبالهٔجزئی (۴) هم دارای همان حد است

به‌عنوان‌نمونه، به‌حالتی می‌پردازیم‌که a متناهی باشد. فرض‌کنید، برای‌عدد مفروض $\varepsilon > 0$، شماره‌ای مانند N پیدا شودکه به‌ازای $n > N$، نابرابری

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

برقرار باشد، باتوجه به‌این‌که $n_k \to \infty$، می‌توان عدد K را طوری پیدا کردکه به‌ازای $k > K$ داشته باشیم: $n_k > N$. درآن صورت، برای همان مقدارهای k داریم:

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

که درستی گزارهٔ ما را ثابت می‌کند

[ضمناً ، توجه کنیم که در این اثبات، به نابرابری (۵) تکیه نکردیم، یعنی بررسی خودرا، بدون‌استفاده ازیکنوایی x_n، ادامه‌دادیم. به‌این‌ترتیب، واریانت n_k ــ که باعددهای صحیح درست شده است ــ به هرنحوی به‌سمت ∞ میل کند، حکـم ما به قوت خود باقی خواهد بود.]

اگر برای x_n، یا شبیه‌آن، برای دنبالهٔ (۱)، حـد معینی وجـود نداشته باشد، امکان وجود حد را برای یك دنبالهٔ جزئی (۴) و یا برای واریانت نظیر آن $x'_k = x_{n_k}$، از بین

نمی‌برد. چنین حدی را (در صورت وجود)، حد جزئی واریانت x_n یا دنبالهٔ (۱) گویند.

برای مثال فرض می‌کنیم $x_n=(-۱)^{n+۱}$. این واریانت دارای حدی نیست، ولی اگر n را وادار‌یم، تنها مقدارهای فرد یا مقدارهای زوج آن‌را بپیماید، آن‌گاه دنباله‌های جزئی

$$x_۱=۱,\ x_۳=۱,\ \dots,\ x_{۲k-۱}=۱,\ \dots$$

و

$$x_۲=-۱,\ x_۴=-۱,\ \dots,\ x_{۲k}=-۱,\ \dots$$

به ترتیب، دارای حدهای $+۱$ و -۱ خواهند بود. این عددها، حدهای جزئی واریانت x_n هستند. به همین ترتیب، واریانت $x_n=(-۱)^{n+۱}n$، دارای حدهای جزئی $+\infty$ و $-\infty$، و واریانت $x_n=n^{(-۱)^{n+۱}}$ دارای حدهای جزئی $+\infty$ و ۰ است.

به سادگی می‌توان نمونه‌هایی از واریانت‌هایی ساخت که، به‌ازای آن‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی از حدهای جزئی گوناگون، وجود داشته باشد. به‌عنوان مثال، واریانت x_n را با قاعدهٔ زیر مشخص می‌کنیم: اگر شماره n در دستگاه دهدهی با عدد $\alpha\beta\dots\nu$ نوشته شود ($\alpha,\beta,\dots,\nu$ رقم هستند)، آن‌گاه فرض می‌کنیم:

$$x_n=۰/\alpha\beta\dots\nu$$

مثلاً $x_{۱۳}=x_{۱۱_{(۱۰)}}=۰/۱۳$ و $x_{۴۰۳۵}=۰/۴۰۳۵$.

ضمناً، روشن است که در ردیف مقدارهای واریانت‌ما، هر کسر دهدهی متناهی بین ۰/۱ و ۱، بی‌نهایت بار تکرار می‌شود. مثلاً ۰/۲۱۷ در ردیف‌های ۲۱۷-ام، ۲۱۷۰-ام، ۲۱۷۰۰-ام و غیره قرار دارد.

ازهمین‌جا نتیجه‌می‌شود که هر کسر دهدهی متناهی واقع بین ۰/۱ و ۱ را، می‌توان یك حد جزئی برای این واریانت به حساب آورد. حالا، عدد حقیقی دلخواه α را، در همان فاصلهٔ ۰/۱ و ۱، در نظر می‌گیریم. باید این عدد را به‌صورت یك کسر نامتناهی دهدهی در آوریم [۹]:

$$\alpha=۰/c_۱c_۲\dots c_k\dots \qquad (c_۱\geqslant ۱)$$

تا روشن شود که دنبالهٔ جزئی

$$x_{c_۱}=۰/c_۱,\ x_{c_۱c_۲}=۰/c_۱c_۲,\ \dots,\ x_{c_۱c_۲\dots c_k}=۰/c_۱c_۲\dots c_k,\ \dots$$

حدی، برابرهمان عدد α، دارد. به این ترتیب، دراین حالت، حدهای جزئی دنباله، تمامی بازهٔ [۰/۱ ، ۱] را پرمی‌کنند.

آیا همواره، وبرای هرواریانت x_n، حدهای جزئی وجود دارد؟ به‌این پرسش، در حالتی که مجموعهٔ $\{x_n\}$ کران‌دارنباشد، می‌توان پاسخ مثبت‌داد. مثلاً، هرگاه این‌مجموعه، ازبالا کران‌دارنباشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی k، در دنبالهٔ (۱) جملهٔ x_{n_k} بزرگتر از k پیدا می‌شود:

$$x_{n_k} > k \quad (k = ۱, ۲, ۳, \dots)$$

(ضمناً و به‌سادگی می‌توان ترتیب کار راطوری‌داد که n_k و k با هم ترقی کنند). دنبالهٔ جزئی

$$x_{n_۱}, \ x_{n_۲}, \ \dots, \ x_{n_k}, \ \dots$$

به‌روشنی دارای حد $+\infty$ خواهد بود که، ضمناً، حد جزئی واریانت ماهم خواهد بود.

درحالت کران‌داربودن واریانت هم، می‌توان به‌پرسش بالا، پاسخ مثبت داد. ولی، برای رسیدن بـه ایـن نتیجه، به استدلال ظریـف‌تری نیاز داریم، کـه در زیر بـه‌آن می‌پردازیم.

۴۱. پیش قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس (B. Bolzano – C. Weierstrass). از هر دنبالهٔ‌کران‌دار (۱)، همواره می‌توان دنبالهٔ جزئی (۴) را چنان درآورد، که به‌سمت‌یك حد متناهی میل‌کند. (درتنظیم چنین دنباله‌ای، امکان برابری عددها، نفی نمی‌شود.)

اثبات. فرض‌کنیم همهٔ عددهای x_n، بین دوکران a و b باشند. بازهٔ $[a, b]$ را دو نیم می‌کنیم؛ دست‌کم، یکی از ایـن نیمه‌ها، شامل مجموعه‌ای نامتناهی ازجمله‌های دنبالهٔ مفروض خواهد بود، زیرا درغیراین صورت، تمامی بازهٔ $[a, b]$، شامل تعدادی متناهی از جمله‌های دنباله می‌شود، که مخالف فرض است. $[a_۱, b_۱]$ را، آن نیمه‌ای می‌گیریم، که شامل مجموعه‌ای‌نامتناهی‌ازعددهای x_n است (اگر، هردونیمه، شامل بی‌نهایت‌جمله باشند، یکی ازآن‌ها را انتخاب می‌کنیم).

به ترتیب مشابهی، بازهٔ $[a_۲, b_۲]$ را، نیمی از بازهٔ $[a_۱ \text{ و } b_۱]$ می‌گیریم که شامل مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای x_n باشد و همین‌طور تا آخر؛ با ادامهٔ این روش، مثلاً، در مرحلهٔ kام، نیمهٔ $[a_k, b_k]$ را از بازهٔ قبلی‌را، چنان اختیار می‌کنیم که شامل بی‌نهایت جمله، از عددهای x_n باشد.

هرکدام ازاین بازه‌های انتخابی (با آغاز از دومی)، در درون بازهٔ قبلی قراردارد ونیمی ازآن را تشکیل می‌دهد. علاوه برآن، درازای بازهٔ kام، برابراست با

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{۲^k}$$

که با ترقی k، به سمت صفرمیل می‌کند. دراین‌جا، با استفاده از پیش قضیهٔ مربوط به‌بازه‌های تودرتو [۳۸]، نتیجه می‌گیریم که a_k و b_k، به‌سمت حد مشترک c میل می‌کنند.

حالا، دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$ را به‌شیوهٔ استقرائی و به‌ترتیب زیرمی‌سازیم: به‌عنوان x_{n_1}، یك عضو دلخواه x_n از دنباله‌ای‌که در $[a_1,b_1]$ قراردارد (ومثلاً نخستین آن‌ها را) انتخاب‌می‌کنیم، به‌عنوان x_{n_2}، عضو دلخواهی از x_n که‌بعد از x_{n_1} و، ضمناً متعلق به $[a_2,b_2]$ باشد (و مثلاً، نخستین آن‌ها را) اختیارمی‌کنیم وغیره. به‌طورکلی، به‌عنوان x_{n_k}، یکی از عضوهای x_n را، که‌بعداز x_{n_1}، x_{n_2}، ...، $x_{n_{k-1}}$ قرارگرفته ومتعلق به $[a_k,b_k]$ باشد، انتخاب می‌کنیم. امکان چنین انتخاب‌هایی، به‌خصوص، به‌این‌جا مربوط می‌شودکه هرکدام از بازه‌های $[a_k,b_k]$، شامل مجموعه‌ای نامتناهی ازعددهای x_n، یعنی شامل عضوهای x_n با شماره‌های به دلخواه بزرگ، می‌باشد. ضمناً، ازآن‌جا که داریم:

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{و} \quad \text{حد}\, a_k = \text{حد}\, b_k = c$$

با توجه به قضیهٔ ۳° از ۲۸ خواهیم داشت: $\text{حد}\, x_{n_k} = c$. واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

روشی‌که دراین پیش قضیه مورد استفاده قراردادیم ومبتنی برنصف‌کردن بازه‌های موردنظر بود، به روش بولزانو مشهور است و درموارد دیگری هم ازآن استفاده خواهیم کرد.

پیش قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس، اثبات قضیه‌های دشواربسیاری را، به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای، ساده می‌کند؛ مثل‌این است‌که دشواری اصلی استدلال را، به‌دوش خودکشیده است. به‌عنوان نمونه، اصل تقارب را، دوباره و به‌کمك این پیش قضیه، ثابت می‌کنیم. به «کافی بودن» حکم توجه می‌کنیم‌که، به‌موقع خود، وبرای برآورده شدن شرطی‌که در آن بود [۳۹]، نیروی قابل توجهی صرف‌کردیم.

فرض می‌کنیم، شرط برآورده شده باشد وبرای $\varepsilon > 0$ دلخواه، چنان شماره‌ای برای N پیدا شودکه‌به‌ازای $n > N$ و $n' > N$، نابرابری (۲) یا (۳) برقرارباشد. اگر، ضمناً، n' تثبیت شود، از (۳) روشن‌که واریانت x_n، درهمهٔ حالت‌ها، کران‌دار است: مقدارهای آن، به‌ازای $n > N$، بین عددهای $x_{n'} - \varepsilon$ و $x_{n'} + \varepsilon$ قرار می‌گیرد، واین کران‌ها، به‌سادگی، طوری بازمی‌شوندکه N مقدار اولیهٔ x_1، x_2، ...، x_N را دربرگیرند.

دراین صورت، از روی قضیه‌ای‌که همین حالا ثابت‌کردیم، می‌توان دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$، متقارب به‌حد متناهی c را جداکرد:

$$\text{حد}\, x_{n_k} = c$$

ثابت می‌کنیم که، به‌طور کلی، واریانت x_n هم، به‌سمت این حد میل می‌کند. می‌توان k را آن قدر بزرگ گرفت که داشته باشیم:

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

وهم‌زمان با آن، $x_{n_k} > N$، درنتیجه در (۲) می‌توان $n' = n_k$ گرفت:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

با مقایسهٔ این دو نابرابری، سرانجام، نتیجه می‌شود:

$$|x_n - c| < ۲\varepsilon \quad (n > N \text{ به‌ازای})$$

و این، حکم ما را اثبات می‌کند.*

۴۲. بزرگترین و کوچکترین حد. به‌این ترتیب، برای واریانت دلخواه x_n — چه کران‌دار باشد و چه نباشد — حدهای جزئی وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که بین این حدهای جزئی، حتماً بزرگترین و کوچکترین، پیدا می‌شود. این بزرگترین و کوچکترین حدهای جزئی را، بزرگترین و کوچکترین حد خود واریانت x_n می‌نامند و، به‌ترتیب، به این صورت، نشان می‌دهند:

$$\text{حد}\, x_n \quad \text{و} \quad \overline{\text{حد}}\, x_n$$

قضیه. بزرگترین و کوچکترین حد، همیشه، برای واریانت x_n وجود دارد. برابری این دو حد، شرط لازم و کافی برای وجود حد واریانت (به‌معنای معمولی آن) است.**

اثبات. ابتدا، به‌بزرگترین حد می‌پردازیم. قبلاً دیدیم [۴۰]، اگر واریانت x_n، از بالا، کران‌دار نباشد، آن‌گاه می‌توان ازدنبالهٔ (۱)، مقدارهای دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$ را طوری انتخاب کرد که

$$\text{حد}\, x_{n_k} = +\infty$$

به این ترتیب، در این حالت، $+\infty$ یکی ازحدهای جزئی واریانت است و، روشن است، ازهمهٔ حدهای ممکن، بزرگتر است، یعنی

$$\overline{\text{حد}}\, x_n = +\infty$$

---

*) عدد ۲ε، به‌همان اندازه کوچک دلخواه است که ε. اگر ازابتدا، به‌جای ε، $\frac{\varepsilon}{۲}$ می‌گرفتیم، در این جا ε به‌دست می‌آمد. در آینده، اشاره‌های مشابهی نخواهیم کرد.

**) این قضیه، که در اثبات آن، از پیش قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس استفاده نمی‌شود، قضیهٔ اخیر را می‌پوشاند.

حالا، فرض می‌کنیم که واریانت x_n از بالا کران‌دار باشد:

$$x_n \leqslant M \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

مقدار دقیق کران بالای x_n را، به‌ازای $n > k$، در نظر می‌گیریم:

$$M_k = \sup_{n>k} \{x_n\} = \sup \{x_{k+۱}, x_{k+۲}, \ldots\} \leqslant M$$

با ترقی k، مقدار M_k تنها می‌تواند کاهش یابد، در نتیجه، بنابر قضیهٔ مربوط به‌واریانت یکنوا [۳۴]، در همهٔ حالت‌ها، حد وجود دارد (به‌ازای ترقی n تا بی‌نهایت) و

$$\text{حد } M_k$$

یا متناهی و یا برابر $-\infty$ است.

حالتی هم که این حد $-\infty$ است، به‌سادگی قابل حل است. برای $E > ۰$ دلخواه، چنان شمارهٔ $k = N$ پیدا می‌شود که داشته باشیم:

$$M_N < -E$$

ولی، برای $n > N$، روشن است که $x_n \leqslant M_N$، به‌نحوی که برای مقدارهای مذکور n، بی‌تردید:

$$x_n < -E$$

و این، به‌معنای آن است که حد (به‌مفهوم کلی آن) وجود دارد:

$$\text{حد } x_n = -\infty$$

که، درعین حال، هم بزرگترین و هم کوچکترین است*.

حالا، به‌مهم‌ترین حالت، وقتی که حد متناهی وجود دارد، می‌رسیم:

$$\text{حد } M_k = M^*$$

ثابت می‌کنیم که همین عدد M^*، بزرگترین حد موردنظر، برای واریانت x_n است.

برای این منظور، به‌دو ویژگی خاص عدد M^* اشاره می‌کنیم.

$\varepsilon > ۰$ را، به‌دلخواه، اختیار می‌کنیم، چنان $k = N'$ پیدا می‌شود که $M_{N'} < M^* + \varepsilon$؛ از آن‌جا که به‌ازای $n > N'$ داریم $x_n \leqslant M_{N'}$، در آن صورت، بی‌تردید $x_n < M^* + \varepsilon$.

---

*) وقتی برای واریانت، حد معمولی وجود داشته باشد، همهٔ حدهای جزئی بر آن منطبق می‌شوند [۴۰].

بنابراین داریم:

I. ویژگی عدد M^*. هرچه باشد عدد $\varepsilon>0$، چنان شمارهٔ N' وجود داردکه برای هر $n>N'$، داشته باشیم:

$$x_n<M^*+\varepsilon$$

ازطرف دیگر، برای $\varepsilon>0$ دلخواه وهر مقدار k داریم:

$$M_k\geqslant M^*>M^*-\varepsilon$$

ولی دراین صورت، بنابر ویژگی کران بالای دقیق (مرز بالا) [۱۱]، بین مقدارهای x_n با شماره‌های $k+1$، $k+2$، $k+3$،... بـرای n، چنان مقدار $x_{n'}$ پیدا می‌شود که داشته باشیم: $x_{n'}>M^*-\varepsilon$. k را، که دلخواه است، با N تعویض و مطلب را تنظیم می‌کنیم:

II. ویژگی عدد M^*. $\varepsilon>0$ وشماره N هرچه باشند، مقدار $x_{n'}$ باشمارهٔ $n'>N$، چنان پیدا می‌شودکه داشته باشیم:

$$x_{n'}>M^*-\varepsilon$$

(اختلاف بین تنظیم‌های دو ویژگی را روشن کنیم: درحالت اول، نابرابری، بدون استثنا، به‌ازای همهٔ مقدارهای x_n، با شروع ازجایی، برقراراست؛ درحالی که درحالت دوم، نابرابری تنها، به‌ازای مقدارهای جداجدای x_n ــ که بین آن‌ها، مقدارهای با شماره‌های به‌دلخواه بزرگ هم وجود دارد ــ صادق است).

قبل از همه، بااتکا به‌این دو ویژگی، ثابت می‌کنیم که عدد M^* برای واریانت x_n یك حد جزئی است. بـه‌این قصد، لازم است که دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_i}\}$ را، که به‌سمت M^* میل می‌کند، جداکنیم.

دنبالهٔ عددهای مثبت $\varepsilon_i\to 0$ را درنظر می‌گیریم. $n_1=1$ می‌گیریم و برای شماره‌های بعدی فرض می‌کنیم:

$$n_1=1<n_2<n_3<\cdots<n_{i-1}$$

و نشان می‌دهیم که n_i چگونه انتخاب می‌شود. با توجه به‌ویژگی I، به‌ازای $\varepsilon=\varepsilon_i$، شمارهٔ نظیر $N'=N_i$ راپیدامی‌کنیم، به‌قسمی که به‌ازای هر $n>N_i$ داشته باشیم: $x_n<M^*+\varepsilon_i$. حالا، به‌ویژگی II تـوجه می‌کنیم. مثل قبل $\varepsilon=\varepsilon_i$ می‌گیریم و برای N، ازمیان n_{i-1} و N_i، بزرگترین را انتخاب می‌کنیم؛ به‌این انتخاب عددهای ε و N، شمارهٔ $n'=n_i$ پاسخ می‌دهد. ازیك طرف

$$x_{n_i}>M^*-\varepsilon_i$$

وازطرف دیگر، چون $n_i > N_i$، درعین‌حال

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon_i$$

به‌جز آن، توجه داشته باشیم که $n_i > n_{i-1}$.

برای عضوهای x_{n_i} ازدنباله‌ای که با این روش ساخته شده است، خواهیم داشت:

$$|x_{n_i} - M^*| < \varepsilon_i \quad (i = ۱،۲،۳،...)$$

به‌نحوی که، در واقع $x_{n_i} \to M^*$.

بالاخره، ثابت می‌کنیم که هیچ‌کدام ازحدهای جزئی از M^* تجاوزنمی‌کنند. فرض کنیم، برای یك دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_i}\}$ داشته باشیم: $x_{n_i} \to a$، به‌نحوی که a، یکی ازحدهای جزئی باشد. با توجه به ویژگی I، به‌ازای شماره‌های به‌قدر کافی دور (بزرگتر از N') داریم:

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon$$

دراین‌جا، باگذربه‌حد، نتیجه می‌گیریم: $a \leqslant M^* + \varepsilon$ و، بالاخره، با توجه به نامشخص‌بودن ε

$$a \leqslant M^*$$

به‌این ترتیب، M^*، در واقع، بزرگترین همهٔ حدهای جزئی است، یعنی

$$M^* = \overline{\lim} x_n$$

به‌طریق مشابهی، وجود کوچکترین حد را ثابت می‌کنیم. بدون تکرار تمامی‌مطلب، دو وضع زیر را درنظرمی‌گیریم:

اگراین کوچکترین حد $+\infty$ باشد، آن‌گاه، حد به‌معنای معمولی آن وجود دارد:

$$\lim x_n = +\infty$$

اگرهم کوچکترین حد، برابرعدد متناهی M_* باشد:

$$M^* = \underline{\lim} x_n$$

آن‌گاه، این عدد، دارای دو ویژگی، شبیه ویژگی‌های M^*، می‌باشد.

I. ویژگی عدد M_*. هرچه باشد $\varepsilon > ۰$، چنان شمارهٔ N'' وجود دارد، که به‌ازای $n > N''$ داشته باشیم:

$$x_n > M_* - \varepsilon$$

II . ویژگی عدد M_*. $\varepsilon>0$ وشمارهٔ N هرچه باشند، می‌توان مقدار $x_{n''}$ را با شمارهٔ $n''>N$ پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$x_{n''}<M_*+\varepsilon$$

برگردیم به‌اثبات حکم نهائی قضیه. اگرحد، به‌معنای معمولی، وجود داشته باشد

$$\text{حد } x_n$$

(متناهی یا نامتناهی)، همهٔ حدهای جزئی ممکن، بر آن منطبق می‌شوند [۴۰]، به‌نحوی که لزوم شرط مذکور دربالا، روشن است.

حالا فرض می‌کنیم

$$\overline{\text{حد}}\, x_n=\underline{\text{حد}}\, x_n$$

اگر، مقدارمشترك آن‌ها $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، همان‌طور که دیدیم، حد واریانت، به‌معنای معمولی؛ وجود دارد وبرابر با همان مقداراست.

بالاخره، فرض می‌کنیم، هردوحد، متناهی باشند:

$$M^*=M_*=a$$

آن‌وقت، ضمن‌مقایسهٔ‌ویژگی I با ویژگی عددهای M^* و M_*، برای عدد مفروض $\varepsilon>0$، چنان شماره‌ای برای N پیدا می‌کنیم که به‌ازای $n>N$ داشته باشیم:

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$$

واین، به‌معنای آن است که a، حد واریانت x_n، به‌مفهوم عادی‌آن، است. قضیه ثابت شد.

یادآوری می‌کنیم که به‌کمك این قضیه، اثبات‌کفایت شرط بولزانو-کوشی [۳۹]، خیلی ساده می‌شود. به‌خصوص (اگرعلامت‌های قبلی را حفظ‌کنیم)، ازنابرابری

$$x_{n'}-\varepsilon<x_n<x_{n'}+\varepsilon \qquad (\text{برای } n,n'>N)$$

مستقیماً می‌بینیم که‌بزرگترین وکوچکترین حد واریانت x_n، متناهی هستندو، ضمناً، اختلافی بیشتر از 2ε ندارند. درنتیجه، به‌دلیل دلخواه بودن ε، برهم منطبق می‌شوند و، ازاین‌جا، وجود حد متناهی (درمعنای معمولی خود)، نتیجه می‌شود.

MATH75.IR

فصل دوم

تابع با یك متغیر

§ ۱. مفهوم تابع

۴۳. متغیر و حوزهٔ مقدارهای آن. در شمارهٔ ۲۲، مفهوم کلی متغیر را شرح دادیم. متغیر x، به‌وسیلهٔ مجموعهٔ $\mathfrak{X}=\{x\}$ داده می‌شود که شامل آن مقدارهایی است که این متغیر می‌تواند قبول کند. این مجموعه $\mathfrak{X}$ را، که در آن، به‌هر مقدار x تنها یك بار برخورد می‌کنیم، حوزهٔ تغییر متغیر x نامند. در حالت کلی، حوزهٔ تغییر متغیر، می‌تواند هر مجموعهٔ عددی دلخواهی باشد.

قبلاً هم گفته‌ایم که عددها را می‌توان به‌صورت هندسی و همچون نقطه‌های واقع بر یك محور عددی، تعبیر کرد. حوزهٔ $\mathfrak{X}$ (که معرف تغییرهای متغییر x است)، بر این محور، به‌صورت مجموعه‌ای از نقطه‌ها در می‌آید. به این‌علت است که، معمولاً خود مقدار عددی متغیر را، «نقطه» می‌نامند.

پیش‌می‌آید که با متغیر n سروکار داشته باشیم، در چنین صورتی، حوزهٔ تغییر متغیر، عبارت است از مجموعهٔ $\mathfrak{N}$ همهٔ عددهای طبیعی. برای واریانت $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$، حوزهٔ تغییر، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ کسرهای به‌صورت $\frac{1}{2m}$ $(m=1, 2, 3, \dots)$ به‌اضافه عدد ۰؛ برای عدد ثابت، هر حوزهٔ تغییری، منجر به همان عدد ثابت می‌شود.

با وجود این، در آنالیز ریاضی، معمولاً، متغیرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که، به‌اصطلاح، تغییرهایی پیوسته (متصل) داشته باشند. نمونهٔ چنین متغیرهایی، عبارت است از کمیت‌های فیزیکی: زمان، مسافت، حرکت نقطهٔ متحرك و غیره. حوزهٔ تغییر این گونه متغیرها، یك بازهٔ عددی را تشکیل می‌دهد. اغلب، این بازه متناهی است و به‌دو عدد حقیقی a و b $(a<b)$ محدود می‌شود، که دو انتهای آن (یعنی خود عددهای a و b) ممکن است جزو بازه باشند یا نباشند. به همین مناسبت، بهتر است، بازه‌ها را از هم جدا کنیم:

بازهٔ بسته $[a,b]$: $a \leqslant x \leqslant b$ (هردوانتها، جزو بازه‌اند)؛

بازهٔ نیم‌باز $(a,b]$: $a < x \leqslant b$ (تنها، یکی از دوانتها، جزوبازه است)؛
$[a,b)$: $a \leqslant x < b$

بازهٔ باز (a,b): $a < x < b$ (هیچ‌کدام ازدوانتها، جزو بازه نیست).

درهمهٔ این حالت‌ها، عدد $b-a$ را طول یا درازای بازه گویند.

تعبیرهندسی این‌گونه‌های بازه، به‌سادگی، قابل‌فهم است: هربازهٔ عددی، به‌صورت پاره‌خطی ازمحورعددی در می‌آید، که، بسته به‌نوع بازه، دوانتهای آن، می‌تواند جزو پاره‌خط به‌حساب آید یا نیاید.

پیش‌می‌آید با بازه‌های نامتناهی سر وکارداشته‌باشیم که، دراین‌صورت، یکی‌از دو انتهایا هردوی آن‌ها، $-\infty$ ، $+\infty$ هستند. دراین‌حالت هم، شکل‌نمایش‌آن‌ها، به‌همان وضعی است‌که در حالت بازه‌های متناهی گفتیم. مثلاً $(+\infty, -\infty)$ مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی است؛ $(a, +\infty)$ مجموعهٔ همهٔ عددهای x است‌که درنابرابری $x > a$ صدق‌کنند؛ $[-\infty, b]$ معرف نابرابری $x \leqslant b$ است. بازه‌های نامتناهی، درتعبیرهندسی خود، به‌صورت خط‌راست نامتناهی ویا نیم‌خط راست درمی‌آیند.

۴۴. بستگی تابعی بین متغیرها. مثال‌ها. کارآنالیز ریاضی این نیست که یك‌متغیر را، که به‌خودی‌خود تغییرمی‌کند، موردمطالعه قراردهد. دراین‌جا، قبل ازهرچیز، سروکار ما، بابستگی دویا چند متغیر به‌یکدیگراست، یعنی متغیرهایی‌که درارتباط باهم تغییرمی‌کنند. دراین‌جا، به‌حالت ساده‌تر دومتغیر می‌پردازیم.

در زمینه‌های گوناگون دانش و زندگی—در خود ریاضی، درفیزیك و در صنعت— بارهاوبارها، به‌متغیرهایی برمی‌خوریم که‌درارتباط باهم تغییرمی‌کنند، یعنی‌تغییرهایی توأم دارند. این‌ها، نمی‌توانند، به‌طور هم‌زمان، یك زوج مقدار دلخواه را (از حوزهٔ تغییر خودشان) اختیارکنند، اگربه‌یکی از این متغیرها (که آن را متغیر مستقل می‌نامیم) مقدار مشخصی داده شود، مقدار متغیر دیگر را (که متغیر نامستقل یا تابع نامیده می‌شود) باید به‌کمك آن به‌دست آورد. چند مثال می‌آوریم.

۱) مساحت دایره را Q می‌گیریم. این مساحت تابعی است ازشعاع آن، یعنی R و مقدار آن، از روی مقدار مفروض شعاع، به‌یاری این دستور، پیدا می‌شود:

$$Q = \pi R^2$$

۲) درحالت سقوط آزاد جسم مادی وزین، اگر از مقاومت صرف‌نظرکنیم، زمان t (برحسب ثانیه) که از آغازحرکت محاسبه می‌شود و مسافت طی شدهٔ s (برحسب متر)،

درمدت حرکت، به‌وسیلهٔ برابری زیر به‌هم مربوط‌اند:

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

که درآن $g=9/81\left(\frac{M}{s^2}\right)$، شتاب نیروی ثقل است. دراین‌جا، مقدار s، از روی لحظهٔ مفروض زمان، پیدا می‌شود، یعنی مسافت s، تابعی است از زمان t.

۳) جرم (ایده‌آل) گازی را درنظرمی‌گیریم، که دراستوانهٔ پیستون‌داری نگه‌داشته شده است. بنابرقانون بویل–ماریوت، بین حجم (لیتر) وفشار p (جو–اتمسفر) این جرم گاز – به‌شرط ثابت‌بودن درجهٔ حرارت – این رابطه برقراراست: $pV=c=\text{const}$. اگر V به‌دلخواه تغییرکند، آن‌گاه، p مانند تابعی از V، وهربار به‌صورت یك ارزشی، ازدستور زیرمعین می‌شود:

$$p=\frac{c}{V}$$

۴) بالاخره، به‌رابطهٔ فشارهوا p (آتمسفر)وارتفاع مکان آن h (متر) ازسطح دریا توجه می‌کنیم. درفیزیك از دستورهواسنجی (بارومتری)

$$p=p_0\cdot e^{-kh}$$

استفاده می‌کنند، که در آن، p_0 فشاردرسطح دریا و k مقداری ثابت است. از روی این دستور، مقدار p، مانند تابعی از k – وتنها وقتی‌که مقدار h معلوم باشد – تعیین می‌شود.

درهمین‌جا یادآوری کنیم که، انتخاب متغیرمستقل–از بین دومتغیری که به‌هم مربوط‌اند– گاهی بی‌تفاوت، یا بسته به‌ملاحظه‌های ساده‌ای است. دربیشتر موارد هم، هدفی‌که مساله دنبال می‌کند، این انتخاب را به‌ما دیکته می‌کند.

به‌عنوان مثال، اگر در مثال اخیر، دربارهٔ رابطهٔ بین فشار p و ارتفاع h، هدف این باشد که خلبان بتواند از روی فشاری که مشاهده می‌کند، از ارتفاع خود اطلاع پیدا کند، طبیعی است‌که نقش متغیرها عوض می‌شود و رابطهٔ هواسنجی، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$h=\frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}$$

۴۵. تعریف مفهوم تابع. حالا، طبق معمول، ازمعنای فیزیکی کمیت‌ها، می‌گذریم و

به تعریف دقیق و کلی مفهوم تابع، که یکی از مفهوم‌های بنیادی آنالیز ریاضی است، می‌پردازیم.

دومتغیر x و y را، با حوزه‌های تغییر $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم، متغیر x بتواند ازحوزهٔ $\mathfrak{X}$، هرمقدار دلخواهی را، بی‌هیچ محدودیتی، انتخاب کند. دراین صورت، متغیر y را تابع متغیر x درحوزهٔ تغییر $\mathfrak{X}$ نامند، وقتی‌که بتوان، از روی قاعده‌یا قانونی، به‌هر x (از $\mathfrak{X}$) یك مقدار معین y (از $\mathfrak{Y}$) متناظرکرد.

متغیرمستقل x را، آوند (یا آرگومان) تابع نیز گویند.

دراین تعریف، دوجنبهٔ مهم وجود دارد: اولاً مشخص‌کردن حوزهٔ $\mathfrak{X}$ تغییرآوند x (که‌آن‌را حوزهٔ تعریف یادامنهٔ تعریف تابع گویند)، ثانیاً برقرارکردن قاعده یاقانون‌تناظر بین مقدارهای x و y. (حوزهٔ $\mathfrak{Y}$ تغییرتابع، معمولاً مشخص نمی‌شود، چرا که خود قانون تناظر، مجموعهٔ مقدارهای قابل انتخاب y را نشان می‌دهد.)

درتعریف مفهوم تابع، می‌توان از دید وسیع‌تروکلی‌تری آغاز کرد، به‌این ترتیب که فرض‌کنیم، به‌هرمقدار xاز $\mathfrak{X}$، نه‌تنهایکی، بلکه چند مقدار y (حتی‌یك‌مجموعهٔ‌نامتناهی ازآن‌ها) نظیرباشد. درچنین حالتی، تابع را چند ارزشی گویندکه با تابع یك ارزشی ــ که دربالا تعریف شد ــ فرق‌داشته‌باشد. با وجود این،در دوره‌ای‌ازآنالیزکه با متغیرهای حقیقی سروکار دارد، کمتر به‌تابع‌های چند ارزشی می‌پردازد. به‌همین مناسبت، هرجابعد ازاین، به‌طورمطلق، ازتابع صحبت‌کنیم، منظورتابع یك ارزشی است، مگراین‌که برچند ارزشی بودن‌آن تاکیدکرده باشیم.

برای نشان دادن این حقیقت‌که y تابع x است، می‌نویسند:

$$y=f(x),\ y=\varphi(x),\ y=F(x),\dots$$

حرف‌های f، φ، F وغیره، معرف چنان قانونی هستند که از روی‌آن بتوان مقدار y را، که متناظربا مقدار x است، به‌دست آورد. بنابراین، اگرچند تابع مختلف ازیك‌آوند x، دریك زمان، مورد مطالعه قرارگیرند وبدانیم کــه متناظربا قانون‌های مختلفی هستند، نباید آن‌ها را با یك حرف نشان دهیم.

هر چند حرف f به‌این مناسبت انتخاب شده است که به‌واژهٔ fonction (تابع) مربوط می‌شود، ولی برای نشان دادن بستگی تابعی، می‌توان ازهرحرف دلخواهی‌استفاده کرد ومثلاً نوشت: $y=y(x)$.

در بعضی مــوردها، آوند را همچون نشانه‌ای برای تابع می‌نویسند، مثل y_x. ما به واریانت x_n عادت کرده‌ایم که (با تعریفی‌که ازتابع کردیم) عبارت است ازتابعی از «متغیر

مستقل n» که ردیف عددهای طبیعی $\mathcal{N}=\{n\}$ را می‌پیماید؛ شبیه‌آن، می‌توان از N_ε یاد کرد [درتعریف حد واریانت، ۳۶]، که بستگی N را به ε نشان می‌داد وغیره.

اگردربررسی تابع $y=f(x)$، به‌مقدارخاصی از آن توجه داشته باشیم که متناظر $x=x_0$ باشد، این مقدارخاص تابع را با $f(x_0)$ نشان می‌دهیم. مثلاً، اگرداشته باشیم:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad g(t)=\frac{10}{t},\quad h(u)=\sqrt{1-u^2}$$

آن‌گاه، $f(1)$ عبارت است ازمقدارعددی $f(x)$ به‌ازای $x=1$، یعنی $\frac{1}{2}$؛ همچنین $g(5)$ برابر ۲ و $h\left(\frac{3}{5}\right)$ برابر $\frac{4}{5}$ می‌شود وغیره.

حالا برگردیم به‌قانون یا قاعدهٔ تناظری که بین مقدارهای متغیرها، وجود دارد، یعنی آن چه‌که ماهیت بستگی تابعی را تشکیل می‌دهد. قاعده می‌تواند طبیعت‌های کاملاً گوناگونی داشته باشد، چراکه چیزی‌آن را محدود نمی‌کند.

ساده‌ترین وطبیعی‌ترین‌قاعده‌ها، قاعده‌ای‌است که به‌صورت عبارت تحلیلی یارابطه، بیان شده‌باشد. این‌رابطه، ما را راهنمایی می‌کندکه چه عمل‌هایی روی مقدارهای x انجام دهیم، تا مقدار نظیر y به‌دست‌آید. این امکان تحلیلی تعیین تابع، برای آنالیز ریاضی، بی‌اندازه مهم‌است(وما درشمارهٔ‌بعد، دربارهٔ‌آن صحبت خواهیم‌کرد). خوانندهٔ ما، ازدورهٔ دبیرستان، با این «امکان تحلیلی» آشناست و در همین کتاب هم، در مثال‌های شمارهٔ ۴۴، از آن استفاده‌کرده‌ایم.

ولی نباید اشتباه‌کرد و گمان را براین گذاشت که این، یگانه راهی است که می‌توان تابع را مشخص‌کرد! درخود ریاضیات هم، کم نیستند حالت‌هایی که درآن‌ها، تابع بدون کمک‌رابطه، مشخص شده است. از این قبیل است، مثلاً، تابع $E(x)$ «قسمت صحیح عدد x»، که بدون در دست داشتن رابطه‌ای، به سادگی، می‌فهمیم که

$$E(1)=1,\quad E(2/5)=2,\quad E(\sqrt{13})=3,\quad E(-\pi)=-4,\ldots$$

ازهمین نوع‌اندچند جمله‌ای‌های«تابع‌های حسابی»، یعنی تابع‌هایی که تنهاعددهای طبیعی را قبول می‌کنند. مثلاً «فاکتوریل عدد n» را به‌یادآوریم:

$$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$$

یا تابع $\tau(x)$ که عبارت است از تعداد مقسوم علیه‌های عدد n، یا تابع $\varphi(n)$ که نشان می‌دهد، در ردیف عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n، چند عدد وجود داردکه نسبت به n اول‌اند.

با وجود این، قطع‌نظر از ویژگی خود قاعده‌ها ــ که تابع‌هایی را معرفی‌می‌کنند ــ درهمهٔ آن‌ها، این امکان وجود داردکه، با همان دقت رابطه‌ها، مقدارهای تابع را محاسبه کنیم. مثلاً

$$\tau(10)=4, \qquad \tau(12)=6, \qquad \tau(16)=5,\ldots$$

$$\varphi(10)=4, \qquad \varphi(12)=4, \qquad \varphi(16)=8,\ldots$$

در دانش‌های طبیعی و درصنعت، بستگی بین‌کمیت‌ها را ، اغلب، ازطریق تجربه یا مشاهده، به‌دست می‌آورند. مثلاً، می‌توان آب را تحت فشار غیرمشخص p (آتمسفر) قرارداد و با آزمایش معلوم‌کرد که چنین آبی، در چه درجهٔ θ به‌جوش می‌آید. θ تابعی است از p، ولی این بستگی تابعی، بایك رابطه مشخص نمی‌شود، بلکه تنها جدولی تنظیم می‌کنند و درآن، به‌طور ساده، نتیجه‌هایی را که از آزمایش پیدا کرده‌اند، یادداشت می‌کنند. این روش جدولی برای تابع را می‌توان، به‌سادگی، درهر جزوهٔ راهنمای فنی، پیدا کرد.

بالاخره، این را هم یادآورشویم که، دربعضی موردها، ابزارهای خودنگاری‌وجود داردکه بستگی تابعی بین‌کمیت‌های فیزیکی را، مستقیماً ، با رسم منحنی، نشان می‌دهند. مثلاً «نمودار شاخص» یا «دیاگرام شاخص»، بستگی بین حجم V و فشار p بخار درون استوانهٔ ماشین بخار درحال‌کار را، به‌دست می‌دهد. و یا «فشارنگار»، که روند روزانهٔ فشار جو را نشان می‌دهد وغیره.

ما وارد بحث تفصیلی وابستگی تابع، به‌کمك جدول یا نمودار، نمی‌شویم، چراکه در آنالیز ریاضی،کاربرد زیادی ندارند.

۴۶. روش تحلیلی مشخص‌کردن تابع. دربارهٔ مشخص بودن تابع با عبارت تحلیلی یا رابطه ــ که در آنالیز ریاضی نقش فوق‌العاده مهمی را به‌عهده دارد ــ توضیح بیشتری می‌دهیم.

۱°. قبل ازهمه ببینیم، کدام عمل‌های تحلیلی می‌توانند دراین رابطه‌ها یادستورها وارد شوند؟ در درجهٔ اول، همهٔ آن چه‌که در جبر مقدماتی دیده‌ایم : عمل‌های حسابی، به‌توان‌رساندن (ریشه گرفتن)، لگاریتم گرفتن، عبور از زاویه‌ها به‌مقدارهای مثلثاتی آن‌ها و برعکس [شماره‌های **۴۸** تا **۵۱** را ببینید]. منتهی، به‌همین‌ترتیب که آگاهی ما درآنالیز ریاضی بیشتر می‌شود، با عمل‌های دیگری هم آشنا می‌شویم، که از آن‌جمله، می‌توان از عبور به‌حد نام برد که در فصل اول دربارهٔ آن صحبت کرده‌ایم.

به‌این‌ترتیب، مضمون‌کامل «عبارت تحلیلی» یا «رابطه» یا «دستور» به‌تدریج روشن

خواهد شد.

۲°. نکتهٔ دوم، به حوزهٔ تعریف تابع با عبارت تحلیلی یا دستور، مربوط می‌شود. هرعبارت تحلیلی، شامل آوند x، به‌اصطلاح یك‌حوزهٔ طبیعی تغییر دارد و آن‌عبارت است از مجموعهٔ همهٔ آن مقدارهایی از x، که به ازای آن‌ها، تابع دارای معناست، یعنی دارای مقدار حقیقی، متناهی و کاملاً معین است. این مطلب را، با مثال‌های ساده‌ای، روشن می کنیم.

برای عبارت $\frac{۱}{۱+x^۲}$، چنین حوزه‌ای عبارت است ازمجموعهٔ تمامی عددهای حقیقی؛ برای عبارت $\sqrt{۱-x^۲}$، این حوزه منحصر است به بازهٔ بستهٔ $[۱+،۱-]$، در خارج از این حوزه، این‌تابع حقیقی‌نیست؛ به‌عکس، برای عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$، حوزهٔ‌طبیعی عبارت است ازبازهٔ باز $(۱+،۱-)$ که به‌ازای‌آن‌ها، عبارت دارای معناست، دو انتهای‌این بازه ازاین‌جهت‌جزو حوزه‌نیست که‌برای آن‌ها، مخرج برابر صفر می‌شود؛ برای $\sqrt{x^۲-۱}$ بازه‌های $[۱-،-\infty)$ و $(\infty+،۱]$؛ برای $\frac{۱}{x^۲-۱}$ بازه‌های $(۱-،-\infty)$ و $(۱+،۱-)$ و $(\infty+،۱)$ وغیره.*

به‌عنوان آخرین مثال، مجموع تصاعد هندسی نامتناهی زیر را درنظر می گیریم:

$$۱+x+x^۲+\dots+x^{n-۱}+\dots=\text{حد}\,(۱+x+x^۲+\dots+x^{n-۱})$$

اگر $|x|<۱$، همان‌طور که‌می‌دانیم [۷،۲۵]، این‌حد وجود دارد و برابر $\frac{۱}{۱-x}$ است. برای $|x|>۱$، این‌حد، یا برابر $+\infty$ است و یا اصلاً وجود ندارد. بنابراین، برای عبارت تحلیلی مفروض، حوزهٔ طبیعی تغییر، عبارت است از بازهٔ باز $(۱+،۱-)$.

در توضیح‌های بعدی، به‌بررسی‌عبارت‌های تحلیلی بغرنج‌تر و کلی‌تری‌می‌پردازیم؛ همچنین، بارها به‌بررسی ویژگی‌های تابع‌هایی‌خواهیم پرداخت‌که درتمامی حوزهٔ‌تعریف خود، با عبارت‌های مشابهی بیان شده‌اند، یعنی به‌تدریج، آگاهی خود را، نسبت به دستگاه تحلیلی، بیشتر و بیشتر می کنیم.

باوجود این، ممکن است وضع به‌گونهٔ دیگری هم باشد و ما لازم می‌دانیم، ازقبل،

---

*) معلوم است، عبارت‌هایی‌که به‌ازای هیچ مقداری از x، دارای معنا نیستند، برای ما جالب توجه نخواهند بود.

نظر خوانندگان را به‌آن جلب کنیم. مسالهٔ مشخصی را درنظر بگیرید که، در اصل مطلب به‌حوزهٔ تغییر $\mathfrak{D}$ مربوط شود و ما را به‌تابع $f(x)$ برساند که با یك عبارت تحلیلی بیان شده باشد. ولی بسیار ممکن است که این‌عبارت تحلیلی، در بیرون از حوزهٔ $\mathfrak{D}$ هم معنا داشته باشد و، روشن است که ما نمی‌توانیم از مرزهای این حوزه تجاوز کنیم. دراین‌جا، عبارت تحلیلی، نقش کمکی و درجه دوم، به‌عهده خواهد داشت.

مثلاً، اگر سقوط آزاد نقطهٔ وزین را، از ارتفاع h به‌طرف زمین، درنظر بگیریم، به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

[۴۴،۲]. روشن است که دراین رابطه، انتخاب عددهای منفی برای t یا مقدارهایی از t که بزرگتر از $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ باشد، بی‌معنی است، زیرا، به‌سادگی معلوم می‌شود که، به‌ازای $t=T$، نقطه بر زمین می‌افتد. باوجود این، خودعبارت $\frac{gt^2}{2}$، برای همهٔ مقدارهای حقیقی t، دارای معناست.

۳°. ممکن است نتوانیم، برای همهٔ مقدارهای آوند، یك رابطه تنظیم کنیم وناچار باشیم، برای بعضی ازمقدارهای آونـد، رابطه‌ای و برای بقیهٔ مقدارهـا، رابطهٔ دیگری درنظر بگیریم. به‌عنوان مثال، تابع زیر را درنظر می‌گیریم که دربـازهٔ $(-\infty,+\infty)$ به‌وسیلهٔ سه رابطهٔ زیر مشخص شده است.

$$f(x)=1 \qquad (\text{برای } |x|>1)$$
$$f(x)=-1 \qquad (\text{برای } |x|<1)$$
$$f(x)=0 \qquad (\text{برای } x=\pm 1)$$

همچنین، تابع دیریکله (P. G. Lejeune – Dirchlet) را به‌یاد بیاوریم که، به‌این‌ترتیب، تعریف می‌شود:

$$\chi(x)=1 \qquad (\text{برای عددهای گویای } x)$$
$$\chi(x)=0 \qquad (\text{برای عددهای گنگ } x)$$

بالاخره، همراه با کرونکر (K. Kronecker)، تابعی را درنظر می‌گیریم، که او آن را «علامت x» نامید و با $\operatorname{sgn} x$ نشان داد:*

*) *signum* به‌لاتینی یعنی علامت.

$$\operatorname{sgn} x = ۱ \qquad (x > ۰)$$

$$\operatorname{sgn} x = -۱ \qquad (x < ۰)$$

$$\operatorname{sgn} ۰ = ۰$$

ولی، نباید گمان کرد که بین این دو نوع تابع ــ تابع‌هایی که با یک رابطه بیان می‌شوند و تابع‌هایی که به‌چند رابطه نیاز دارند ــ تفاوت اساسی وجود دارد. تابع‌هایی را، که به‌وسیلهٔ چند رابطه بیان می‌شوند، معمولاً، می‌توان با یك رابطه مشخص کرد (که البته، به‌بهای بغرنج‌ترشدن عبارت‌ها، تمام می‌شود).

مثلاً، اگر ازمفهوم عبور به‌حد استفاده کنیم، می‌توانیم نخستین تابعی را که در این‌جا آوردیم، با یك‌رابطه (که برای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد) ارائه دهیم:

$$f(x) = \text{حد} \frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱}$$

در واقع، برای $|x| > ۱$ داریم $x^{۲n} \to +\infty$ و $\frac{۱}{x^{۲n}} \to ۰$ [۲۷]، بنابراین

$$\text{حد} \frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱} = \text{حد} \frac{۱ - \frac{۱}{x^{۲n}}}{۱ + \frac{۱}{x^{۲n}}} = ۱.$$

و برای $|x| < ۱$ داریم $x^{۲n} \to ۰$ [۲۵، ۶] و درنتیجه

$$\text{حد} \frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱} = -۱$$

بالاخره، برای $x = \pm ۱$، روشن است که $x^{۲n} = ۱$ و از آن‌جا

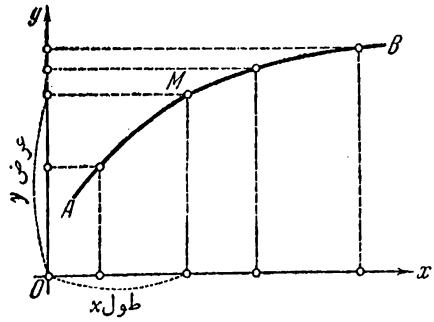
$$\frac{x^{۲n} - ۱}{x^{۲n} + ۱} = ۰$$

که، به‌طور کلی، با تعریف قبلی تطبیق می‌کند.

۴۷. منحنی نمایش تغییر تابع. هرچند کار آنالیز ریاضی، رسم منحنی نمایش تغییر تابع نیست، ولی همیشه، به‌منحنی نمایش تابع‌ها متوسل می‌شود. مشاهدهٔ سادهٔ یك منحنی، وسیلهٔ کمکی خوب و فوق‌العاده‌ای برای بررسی ویژگی تابع است.

فرض کنیم، تابع $y = f(x)$ دربازهٔ $\mathfrak{D}$ داده شده باشد. روی صفحه، محورهای

مختصات قائم را رسم می‌کنیم. زوج مقدارهای نظیر x و y را در نظر می‌گیریم: x از بازهٔ $\mathcal{D}$ انتخاب می‌شود و $y=f(x)$. نقطهٔ $M(x,y)$، متناظر با این زوج عددروی صفحه، با طول x و عرض y، است. وقتی متغیر x، درحدود بازهٔ خود، تغییر می‌کند، این نقطه، یك منحنی مثل AB را می‌پیماید (شکل ۵)، که در واقع، تغییر هندسی تابع ما است و منحنی نمایش تغییر تابع (یانمودار تابع) نامیده می‌شود. خود معادلهٔ $y=f(x)$ را، معادلهٔ منحنی AB می‌نامند.

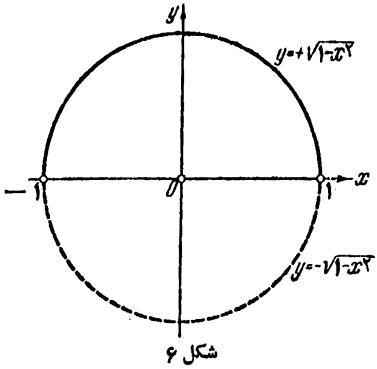


شکل ۵

به‌عنوان مثال، درشکل‌های ۶ و ۷، منحنی‌نمایش تغییر تابع‌های زیر داده شده است:

$$y=\pm\sqrt{x^2-1}, \qquad y=\pm\sqrt{1-x^2},$$

خواننده به‌خوبی با این دو شکل آشناست. درشکل ۶، دایره و درشکل ۷، یك هذلولی متساوی‌الساقین رسم شده است، در شماره‌های بعد مثال‌های بسیاری دربارهٔ رسم منحنی نمایش تغییر تابع را، پیدا خواهیدکرد.



شکل ۶

منحنی نمایش‌تغییر تابع را، معمولاً، با نقطه‌یابی رسم می‌کنند.

ردیفی از مقدارهای نزدیك به‌هم x را، از بازهٔ $\mathcal{D}$، انتخاب می‌کنند و، سپس، از رابطهٔ $y=f(x)$، مقدارهای y، متناظر آن، را به‌دست می‌آورند:

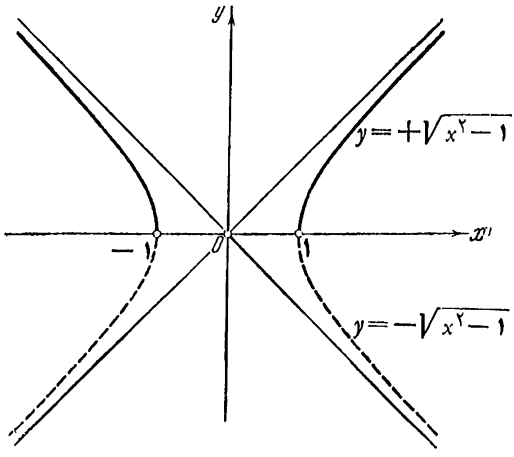
$x=$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$y=$	y_1	y_2	y_3	...	y_n

و روی صفحهٔ محورهای مختصات، نقطه‌های زیر را نقل می‌کنند:

$$(x_1,y_1)\ ,\ (x_2,y_2)\ ,\ (x_3,y_3)\ ,\ \ldots\ ,(x_n,y_n)$$

اگر از این نقطه‌ها، به‌وسیلهٔ دست یا به‌کمك پیستوله، یك منحنی بگذرانیم، به هرحال

(ولو با اندکی تقریب)، نمودار مطلوب به‌دست‌می‌آید. هرقدر روند منحنی‌هموارتر باشد و به‌هراندازه که نقطه‌ها، بهتر بر روی آن، جا گرفته باشند، همان‌قدر منحنی رسم شده، نمودار را صحیح‌تر نشان خواهد داد.



شکل ۷

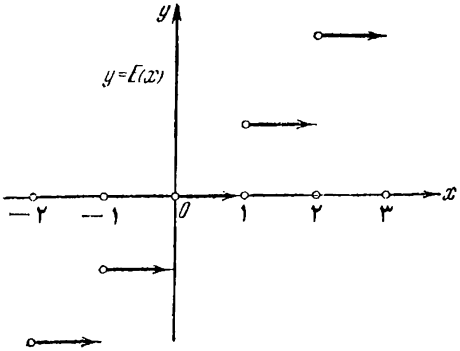
باید توجه کرد که، اگرچه تعبیر هندسی یك تابع همیشه‌ممکن است، باوجوداین، این‌تعبیر، همیشه یك‌منحنی ــ به‌معنای آشنا ومحسوس آن ــ نیست.

به‌عنوان مثال، نمودار تابع $y=E(x)$ را درنظر می‌گیریم. چون‌در بازه‌های

$$\ldots,\ [2,3),\ [1,2),\ [0,1),\ [-1,0),\ [-2,-1),\ \ldots$$

تابع، مقدارهای ثابت $\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$، را حفظ می‌کند، نمودار از ردیف پاره‌خط‌های افقی تشکیل شده است، که انتهای سمت راست آن‌ها را باید حذف کرد (شکل ۸)*.

نمودار تابع دیریکله، $\chi(x)$، از مجموعهٔ نقطه‌های با طول گنگ واقع برمحور x، و مجموعهٔ نقطه‌های با طول گویا واقع برخط $y=1$، تشکیل شده است و نمایش‌محسوس آن ممکن نیست.



شکل ۸

۴۸. طبقه‌های مهم تابع‌ها. در این‌جا، از چند طبقه تابع‌های، به اصطلاح، مقدماتی نام می‌بریم.

۱°. تابع‌های گویای صحیح وکسری

تابعی که به‌صورت یك‌چندجمله‌ای صحیح نسبت به x، نشان داده شده باشد:

*) روی شکل، این‌کیفیت با پیکان نشان داده شده است ومنظور آن است‌که نوك پیکان‌ها، متعلق به‌نمودار نیست.

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

(a_0، a_1، a_2، ...، مقدارهای ثابتی هستند)، تابع‌گویای صحیح (یا تابع‌گویای تام) نامیده می‌شود.

نسبت دو چند جمله‌ای ازاین گونه

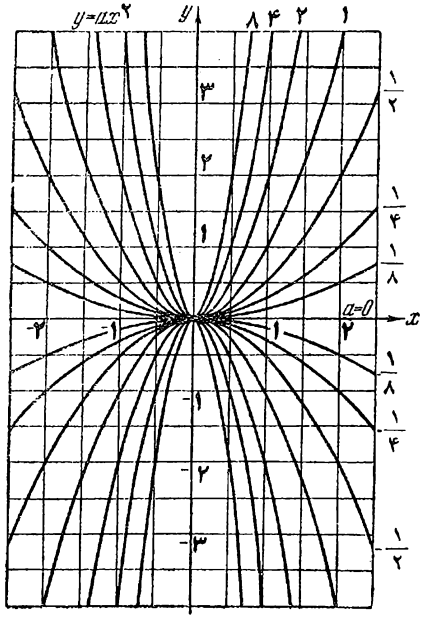
$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n}$$

را تابع کسری‌گویا می‌نامند. این‌تابع، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، به جز آن‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند، معین است.

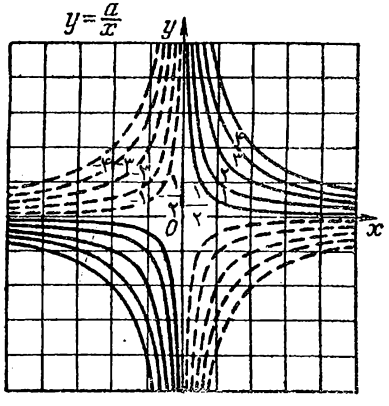
به‌عنوان‌مثال، درشکل ۹، نمودار تابع $y=ax^2$ (سهمی) به‌ازای‌مقدارهای مختلف a؛ و درشکل ۱۰، نمودار تابع $y=\frac{a}{x}$ (هذلولی‌متساوی‌الساقین) به‌ازای مقدارهای مختلف a، داده شده است.

۲°. تابع توانی. تابع توانی، به‌تابعی به‌صورت

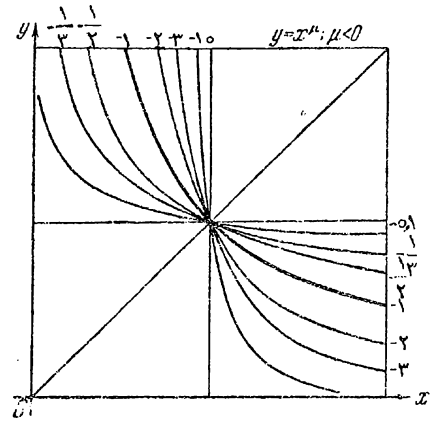
$$y=x^\mu$$



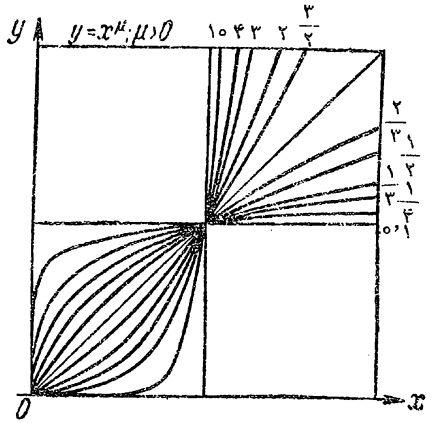
شکل ۹



شکل ۱۰



شکل ۱۲



شکل ۱۱

گفته‌می‌شود، که در آن، μ عددی است حقیقی و دلخواه، اگر μ عددی صحیح باشد، تابع گویا به‌دست می‌آید. اگر μ عددی کسری باشد، با رادیکال سر وکار پیدا می‌کنیم. مثلاً اگر m عددی طبیعی فرض شود، داریم:

$$y=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$$

این تابع، درحالت فردبودن m، برای همهٔ مقدارهای x، و اگر m زوج باشد، برای مقدارهای غیرمنفی x، معین‌است (دراین‌جا، مقدارهای حسابی رادیکال‌را درنظرمی‌گیریم). بالاخره، اگر μ عددی گنگ باشد، باید فرض‌کنیم $x>0$ ($x=0$ هم تنها برای $\mu>0$ مجاز است).

درشکل‌های ۱۱ و ۱۲ نمودار تابع‌های توانی، به‌ازای مقدارهای مختلف μ داده شده است.

۳°. تابع نمائی. تابع نمائی، تابعی است به‌صورت

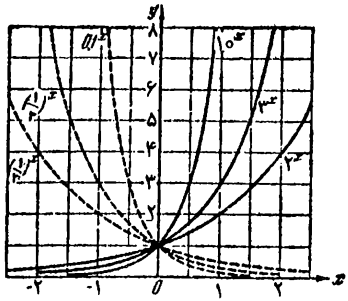
$$y=a^x$$

که در آن، a عددی است مثبت (ومخالف واحد). x می‌تواند هرمقدار حقیقی دلخواه باشد. نمودار تابع نمائی، به‌ازای مقدارهای مختلف a، درشکل ۱۳، داده شده است.

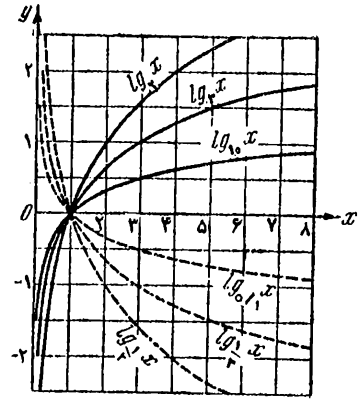
۴°. تابع لگاریتمی. یعنی تابع به‌صورت

$$y=\log_a x$$

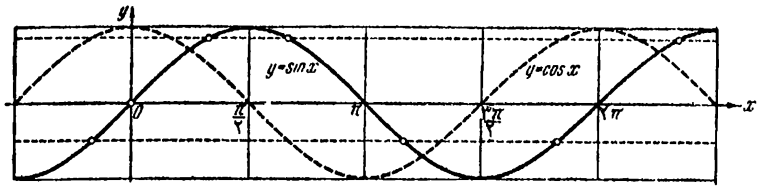
که در آن، a عددی است مثبت (و مخالف واحد). x تنها مقدارهای مثبت را اختیار



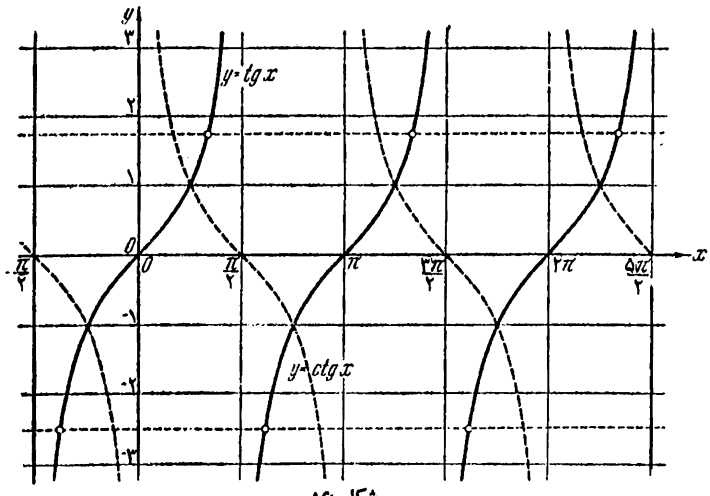
شکل ۱۳



شکل ۱۴



شکل ۱۵



شکل ۱۶

می‌کند. درشکل ۱۴، نمودارهای این تابع، به‌ازای مقدارهای مختلف a داده شده‌است.

۵°. تابع مثلثاتی. یعنی تابع‌های به‌صورت

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = tg\, x,$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \qquad y = \sec x, \qquad y = \operatorname{cosec} x$$

یکبار برای همیشه، این مطلب را به‌خاطر بسپاریم که آوند تابع مثلثاتی ــ اگر با اندازهٔ زاویه‌ها درنظر گرفته شده است ــ باید برحسب رادیان بیان شود. برای tgx و $secx$، باید مقدارهایی را، که به‌صورت زیر باشند، حذف کرد:

$$(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \qquad (k \text{ عددی است درست})$$

و برای $cotgx$ و $cosecx$، این مقدارها را

$$k\pi \qquad (k، \text{عددی است درست})$$

در شکل‌های ۱۵ و ۱۶، نمودار تابع‌های $y=sinx$ ، $y=cosx$ ، $y=tgx$ ، $y=cotgx$ داده شده است. نمودار سینوس را، معمولاً، سینوسوئید گویند.

در مسأله‌های فنی، توجه خاصی به‌تابع‌های زیر می‌شود:

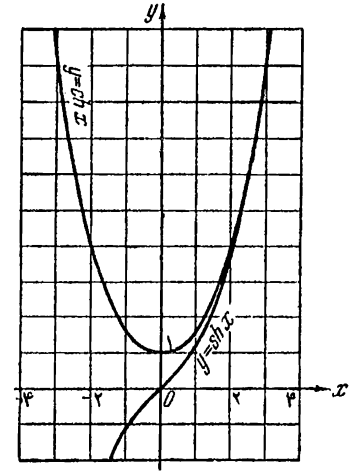
۶°. تابع‌های هذلولی. یعنی تابع‌های به‌صورت

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}, \qquad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲},$$

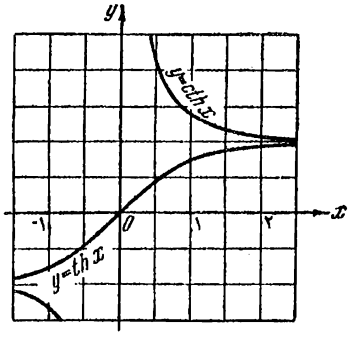
$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \ldots$$

(سینوس هذلولی (یا سینوس هیپربولیك)، کسینوس هذلولی (یا کسینوس‌هیپربولیك) و غیره). این تابع‌ها، برای همهٔ مقدارهای x، معین‌اند، تنها تابع $\mathrm{cth}x$ استثنا است، که به‌ازای $x=۰$ بی‌معنا می‌شود.

این تابع‌ها، تناظر وتشابه قابل‌ملاحظه‌ای با تابع‌های مثلثاتی دارند.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

مثلاً، دراین‌جاهم، رابطه‌های زیر برقرارند (به‌علامت‌ها توجه شود!):

$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{sh}\,y$$

که درحالت خاص $x=y$ نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{ch}^{۲}x-\mathrm{sh}^{۲}x=۱ \qquad \mathrm{ch}۲x=\mathrm{ch}^{۲}x+\mathrm{sh}^{۲}x$$
$$\mathrm{sh}۲x=۲\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x$$

مثلاً، درستی اولین رابطه را، می‌توان به‌تحقیق درستی اتحاد زیر منجر کرد:

$$\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{۲}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{۲}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{۲}$$

بقیه را هم، به‌همین ترتیب، می‌توان مورد تحقیق قرار داد.

منحنی نمایش تغییر تابع‌های هذلولی، درشکل‌های ۱۷ و ۱۸ داده شده است.

۴۹. مفهوم تابع معکوس. قبل‌از آن‌که به‌تابع‌های معکوس مثلثاتی بپردازیم، توضیح‌هایی دربارهٔ تابع معکوس، به‌طور کلی، می‌دهیم.

فرض می‌کنیم، تابع $y=f(x)$، درحوزهٔ $\mathscr{X}$ تعریف شده باشد و $\mathscr{Y}$ مجموعهٔ همهٔ مقدارهایی باشد که این تابع (وقتی که x در حوزهٔ $\mathscr{X}$ تغییر می‌کند) اختیار می‌کند (هم $\mathscr{X}$ و هم $\mathscr{Y}$، درعمل ومعمولاً، عبارتنداز بازه‌ها).

مقدار $y=y_۰$ از حوزهٔ $\mathscr{Y}$ را انتخاب می‌کنیم، آن‌گاه درحوزهٔ $\mathscr{X}$، الزاماً، چنان مقدار $x=x_۰$ پیدا می‌شود که به‌ازای آن، تابع ما، درست مقدار $y=y_۰$ را اختیار می‌کند، یعنی

$$f(x_۰)=y_۰$$

مقدارهای نظیر x، ممکن است چندتا باشند. به‌این‌ترتیب، هر مقدار y از $\mathscr{Y}$ نظیر یك یا چند مقدار x می‌شود؛ باتوجه به‌این نکته‌ها، تابع یك ارزشی یا چند ارزشی $x=g(y)$ تعریف می‌شود، که به‌تابع معکوس، برای تابع $y=f(x)$ نامیده می‌شود.

چند مثال.

۱) فرض کنیم $y=a^{x}$ $(a>۱)$، که درآن، x دربازهٔ $\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ تغییر می‌کند. مقدارهای y، بازهٔ $\mathscr{Y}=(۰,+\infty)$ را پرمی‌کنند، ضمناً، هریك‌ازاین‌بازه، به‌طوری که می‌دانیم [۲۰]، متناظر با یك‌مقدار معین $x=\log_{a}y$ در $\mathscr{X}$ است. دراین‌حالت، تابع معکوس، یك تابع یك‌ارزشی است.

۲) برعکس، برای‌تابع $y=x^{۲}$، اگر x دربازهٔ $\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ تغییر کند،

تابع معکوس دوارزشی خواهد بود: هرمقدار y از بازهٔ $\mathscr{Y}=(۰,+\infty)$، متناظر با دومقدار $x=\pm\sqrt{y}$ از $\mathscr{D}$ است. معمولاً، به جای این تابع دو ارزشی، به طور جداگانه، دو تابع یك ارزشی $x=+\sqrt{y}$ و $x=-\sqrt{y}$ را درنظر می‌گیرند («شاخه»های تابع دو ارزشی). هر یك از این دو تابع را می‌توان، به طور جداگانه، معکوس تابع $y=x^۲$ به حساب آورد؛ در این صورت، تنها حوزهٔ تغییر x محدودتر می‌شود و، به‌ترتیب، برای هرکدام از دو حالت، بازه $[۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰]$ خواهد بود.

۳) به‌همین‌ترتیب، اگر داشته باشیم: $y=\mathrm{ch}x$. دراین‌جاهم، حوزهٔ تغییر x، عبارت است از بازهٔ $\mathscr{D}=(-\infty,+\infty)$. با حل معادلهٔ

$$\frac{e^x+e^{-x}}{۲}=y \Rightarrow e^{۲x}-۲y.e^x+۱=۰$$

نسبت به e^x (برای $y\geqslant ۱$)، دومقدار

$$e^x=y\pm\sqrt{y^۲-۱}$$

به‌دست می‌آید؛ ازآن‌جا

$$x=\ln(y\pm\sqrt{y^۲-۱})$$

که بازهم تابعی دو ارزشی است و می‌توان آن را به دوشاخهٔ یك ارزشی تجزیه کرد، که به‌طور جداگانه، نظیر تغییر x از ۰ تا $+\infty$ و از $-\infty$ تا ۰ می‌باشند.

۴) درحالت $y=\mathrm{sh}x$، به‌ازای y دلخواه، از معادلهٔ

$$\frac{e^x-e^{-x}}{۲}=y \Rightarrow e^{۲x}-۲y.e^x-۱=۰$$

تنها یك‌مقدار برای e^x به‌دست می‌آید:

$$e^x=y+\sqrt{y^۲+۱}$$

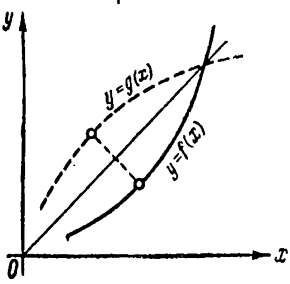
(علامت منفی جلو رادیکال منجر به منفی بودن e^x می‌شود و قابل قبول نیست)، بنابراین، در این‌جا، برای تابع معکوس به‌یك تابع یك‌ارزشی می‌رسیم:

$$y=\ln(y+\sqrt{y^۲+۱})$$

یادآوری می‌کنیم که، به‌کمك نمودار تابع $y=f(x)$، به سادگی، می‌توان فهمید که: آیا تابع معکوس آن $x=g(y)$، یك ارزشی است یا نه؛ حالت اول، وقتی به دست

می‌آید که هرخط دلخواه موازی محور x، نمودار را تنها دریك نقطه بتواند قطع کند. برعکس، اگر، دست‌کم، یکی از این خطها، نمودار را در بیش ازیك نقطه قطع کند، تابع معکوس چند ارزشی خواهد بود. دراین‌حالت، به‌سادگی و به‌کمك نمودار، می‌توان بازهٔ x را چنان به‌بخش‌هایی تقسیم کرد که، هربخش، متناظر «شاخه»ای یك ارزشی ازاین تابع باشد. مثلاً، بانگاه کردن به‌سهمی شکل ۴ که نمودار تابع $y=x^2$ است، روشن می‌شود که تابع معکوس آن، دو ارزشی است؛ وضمناً، برای به‌دست آوردن «شاخه»های یك‌ارزشی، کافی است، به‌طور جداگانه، بخش‌های سمت‌راست وسمت‌چپ این‌سهمی، یعنی مقدارهای مثبت ومنفی x، را درنظر بگیریم.*

اگر تابع $x=g(y)$، معکوس تابع $y=f(x)$ باشد، روشن است که نمودارهای دو تابع، منطبق برهم هستند. باوجود این، ممکن است بخواهیم، طبق معمول، آوند تابع معکوس باحرف x نموده شود، یعنی به‌جای تابع $x=g(y)$، تابع $y=g(x)$ رادرنظر بگیریم. دراین‌صورت، کافی است محور افقی را، محور y، و محور قائم را محور x بنامیم تا همان نمودار قبلی به‌دست آید. ولی اگر محور x (جدید) را، طبق معمول، افقی ومحور y (جدید) را قائم بگیریم، مثل این است که جای محورها را باهم عوض کرده‌ایم دراین‌صورت، برای این که شکل جدید را به‌دست آوریم، ساده‌تر ازهمه این‌است که صفحه xOy شکل را، به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه، دور نیمساز ربع اول دوران دهیم (شکل ۱۹).



شکل ۱۹

به‌این‌ترتیب، نمودار $y=g(x)$، مثل انعکاس آئینه‌ای نمودار $y=f(x)$، نسبت به‌نیمساز ربع‌اول، به دست‌می‌آید، مثلاً، اگر به‌شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توجه کنیم، می‌بینیم که آن‌ها، درست، یکی از روی دیگری به‌دست آمده است. ازهمین‌جا، و به‌سادگی، مفهوم تقارن (نسبت به‌نیمساز)، درهریك‌ازشکل‌های ۱۱ و ۱۲، روشن می‌شود.

۵۰. **تابع‌های معکوس مثلثاتی.** در تکمیل آن طبقه از تابع‌های مقدماتی که در شمارهٔ ۴۸ آوردیم، به بررسی تابع‌های زیر می‌پردازیم:

۷°. تابع‌های معکوس مثلثاتی، به‌تابع‌های زیر گفته می‌شود:

$$y=\arcsin x,\qquad y=\arccos x,\qquad y=\operatorname{arctg} x,$$
$$y=\operatorname{arccotg} x,\qquad y=\operatorname{arcsec} x,\qquad y=\operatorname{arccosec} x)$$

ابتدا در نخستین آن‌ها، تامل می‌کنیم. تابع $y=\sin x$، درباز‌ه $(-\infty,+\infty)$ معین

*) بعداً [درشمارهٔ ۸۳]، بازهم به‌مسالهٔ وجود و یك‌ارزشی بودن تابع معکوس، برمی‌گردیم.

است؛ ضمناً، مقدارهای این تابع، تمامی بازهٔ $[-۱\,;۱]$ $=y$ را پر می‌کنند. خط‌موازی محور x، سینوسوئید یعنی نمودار تابع $y=\sin x$ (شکل ۱۵) را، در مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌ها قطع می‌کند. به‌زبان دیگر، به‌هرمقدار y ازبازهٔ $[-۱\,;۱]$، مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای x متناظر است. به‌این‌دلیل، تابع معکوس آن، که به‌صورت

$$x=\operatorname{Arcsin} y$$

نشان داده می‌شود، یك‌تابع بی‌نهایت ارزشی است.*

ولی، معمولاً، تنها یك (شاخه) از این‌تابع را درنظر می‌گیرند، که متناظر با تغییر x درفاصلهٔ از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $+\frac{\pi}{۲}$ باشد، دراین‌صورت، هرمقدار y از $[-۱\,;۱]$، تنها نظیر یك‌مقدار x می‌شود وآن را به‌صورت

$$x=\arcsin y$$

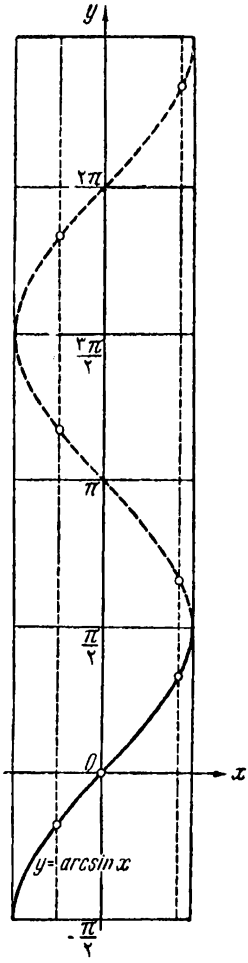
نشان می‌دهند و مقدار اصلی آرك سینوس می‌نامند.

اگرسینوسوئیدرا، دورنیمساز ربع‌اول‌دستگاه‌مختصات، دوران‌دهیم(شکل ۲۰)، نمودارچندارزشی تابع $y=\operatorname{Arcsin} x$ به دست می‌آید. نمودار شاخهٔ اصلی آن، یعنی نمودار $y=\arcsin x$، باخط پرنموده‌شده است، که درمازهٔ $[-۱\,;۱]$، تابعی یك‌ارزشی است. ضمناً، مقدارهای x، درنابرابری

$$-\frac{\pi}{۲}\leqslant \arcsin x\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

صدق می‌کنند، که‌آن را، از سایر شاخه‌ها، مشخص می‌کند.

در مثلثات مقدماتی دیده‌ایم که چگونه، با معلوم بودن مقدار سینوس، می‌توان مقدارهای زاویه را، از روی یکی از آن‌ها، به‌دست آورد. درنتیجه، می‌توان رابطه‌ای را نوشت که که شامل همهٔ مقدارهای آرك سینوس باشد:



شکل ۲۰

---

*) به‌موقع‌خود [درشمارهٔ ۴۸ ، ۵°]، یادآوری کردیم که درتابع‌های مثلثاتی، آوند x، به‌بیان زاویه‌ها، باید با واحد رادیان درنظرگرفته شود. معلوم است که دراین‌جا هم، مقدارهای تابع‌های معکوس مثلثاتی، اگر همچون اندازهٔ زاویه‌ها (یا کمان‌ها) درنظرگرفته‌شوند، باید همگی برحسب رادیان باشند.

$$\mathrm{Arc}sin x=\begin{cases}\arcsin x+2k\pi\\ \qquad\text{یا}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots)\\ (2k+1)\pi-\arcsin x\end{cases}$$

با استفاده از قضیهٔ جمع سینوس‌ها

$$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta$$

می‌توان قضیهٔ جمع آرك سینوس‌ها را به‌دست آورد. فرض می‌کنیم $\alpha=\arcsin x$ و $\beta=\arcsin y$ (که در آن‌ها، x و y بین ۱− و ۱ قرار دارند). در این صورت

$$sin\alpha=x,\quad sin\beta=y,\quad cos\alpha=\sqrt{1-x^2},\quad cos\beta=\sqrt{1-y^2}$$

ضمناً، رادیکال‌ها، به‌این مناسبت، با علامت مثبت انتخاب شده‌اند که α و β (با توجه به خصلت مقدار اصلی آرك سینوس) بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قراردارندو،بنابراین،کسینوس‌های آن‌ها، مثبت است. درنتیجه

$$sin(\alpha+\beta)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$$

و از آن‌جا

$$\alpha+\beta=\arcsin x+\arcsin y=\mathrm{Arc}sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

رابطه را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

واین، تنها به شرطی است که $\alpha+\beta$ ازبازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ بیرون نرود. درحالتی‌که آوندهای x و y (و همراه با آن‌ها α و β) دارای علامت‌های مختلف باشند، این شرط، به‌خودی خود بر قرار است. درحالتی‌هم‌که x و y، هم علامت باشند، به‌سادگی روشن می‌شود که شرط فوق، با نابرابری زیرهم‌ارز است:

$$x^2+y^2\leqslant1$$

شبیه‌این بحث‌رامی‌توان‌دربارهٔتابع $y=cosx$ انجام‌داد. $(-\infty<x<+\infty)$. دراین جا هم، تابع معکوس

$$y=\mathrm{Arc}cos x\quad(-1\leqslant x\leqslant1)$$

معرف یك تابع «بی‌نهایت» ارزشی است (شکل ۱۵ را ببینید). برای این‌که شاخهٔ یك ارزشی را انتخاب کنیم، باید شرط

$$0 \leqslant \operatorname{arc}cos x \leqslant \pi$$

را درنظر بگیریم، که درنتیجه، شاخهٔ اصلی آرك کسینوس به‌دست می‌آید.

دو تابع $\operatorname{arc}cos x$ و $\operatorname{arc}sin x$، با این رابطه، به‌هم مربوط‌اند:

$$\operatorname{arc}cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}sin x$$

در واقع، نه‌تنها کسینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}sin x$ با x برابر است، بلکه $sin(\operatorname{arc}sin x) = x$ خود زاویه $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}sin x$ هم بین ۰ و π واقع است. بقیهٔ مقدارهای $\operatorname{Arc}cos x$ را، از روی مقدار اصلی آن، می‌توان از دستور زیر به‌دست آورد:

$$\operatorname{Arc}cos x = 2k\pi \pm \operatorname{arc}cos x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

تابع $y = tg x$، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، به‌جز مقدارهای

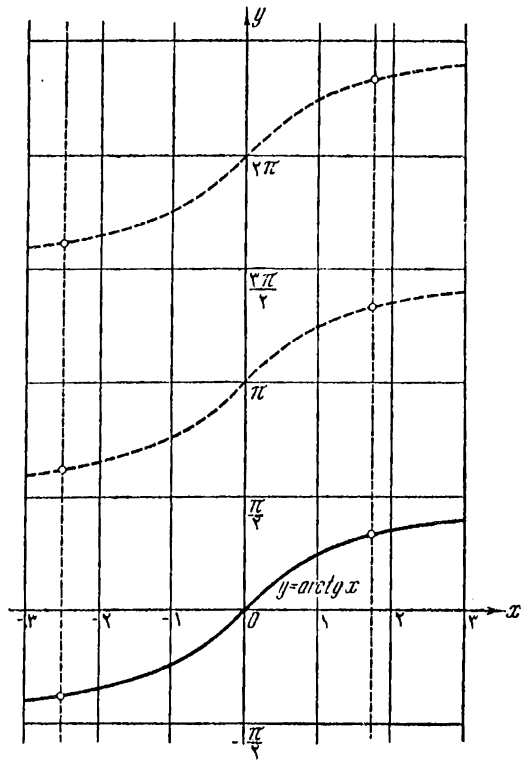
$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

معین است. مقدارهای y، در این‌جا، بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ را می‌پوشانند. ضمناً، هر مقدار y، باز هم، متناظر با مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای x است (شکل ۱۶ را ببینید). بنابراین، تابع معکوس $x = \operatorname{Arc}tg y$، که در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ معین است، تابعی «بی‌نهایت» ارزشی است. در شکل ۲۱، نمودار تابع $x = \operatorname{Arc}tg x$، داده شده است، که با دوران نمودار تابع $y = tg x$، به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه و دور نیمساز ربع اول، به‌دست آمده است. برای مقدار اصلی آرك تانژانت، $\operatorname{arc}tg x$، از این تابع چند ارزشی، آن را انتخاب می‌کنیم که در نابرابری زیر صدق کند:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc}tg x < \frac{\pi}{2}$$

ازاین راه، تابع یك ارزشی ـ شاخهٔ اصلی آرك تانژانت ـ به‌ازای همهٔ مقدارهای x، معین می‌شود. بقیهٔ مقدارهای آرك تانژانت، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\operatorname{Arc}tg x = \operatorname{arc}tg x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$



شکل ۲۱

بنا به قضیهٔ جمع، برای تانژانت‌ها، داریم:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

اگر فرض کنیم: $\alpha=\text{arc}tgx$ و $\beta=\text{arc}tgy$ (برای $xy\neq 1$)، نتیجه می‌شود:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy}$$

وبنابراین

$$\alpha+\beta=\text{arc}tgx+\text{arc}tgy=\text{Arc}tg\frac{x+y}{1-xy}$$

و دراین حالت، تنها وقتی این تساوی، به‌تساوی ساده‌تر

$$\text{arc}tgx+\text{arc}tgy=\text{arc}tg\frac{x+y}{1-xy}$$

منجرمی‌شود، کـه داشته باشیم $-\frac{\pi}{۲}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$، یعنی $xy<۱$.

رابطهٔ مستقیم بین تابع‌های $\operatorname{arc}tgx$ و $\operatorname{arc}\sin x$، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}tg\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \quad (-۱<x<+۱) \qquad \text{یا} \qquad \operatorname{arc}tgx=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

مثلاً، اگرفرض کنیم $\alpha=\operatorname{arc}tgx$، داریم $tg\alpha=x$، دراین صورت

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{۱+tg^{۲}\alpha}}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

ضمناً، علامت رادیکال را، به‌این دلیل، مثبت می‌گیریم که داریم $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$؛ ازاین‌جاست که نتیجه می‌شود

$$\alpha=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

یادآوری می‌کنیم که مقدار اصلی تابع $y=\operatorname{Arc}cotgx\ (-\infty<x<+\infty)$، با نابرابری زیر تعریف می‌شود:

$$-\frac{\pi}{۲}<\operatorname{arc}cotgx<\frac{\pi}{۲}$$

و با $arctgx$، به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر، به‌هم مربوط می‌شوند:

$$\operatorname{arc}cotgx=\frac{\pi}{۲}-\operatorname{arc}tgx$$

بقیهٔ مقدارهای آرك کتانژانت را، از روی مقدار اصلی آن، می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\operatorname{Arc}cotgx=\operatorname{arc}cotgx+k\pi \quad (k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$$

روی تابع‌های $\operatorname{arc}\sec x\ (-\infty<x\leqslant-۱$ و $۱\leqslant x<+\infty)$ و $\operatorname{arc}cosecx$ (با همان بازه‌های تغییر) بحث نمی‌کنیم و بررسی آن‌ها را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

۵۱. انطباق تابع‌ها. یادداشت‌های نهائی. بـا مفهوم انطباق (یا روی هم‌گذاری) تابع‌ها آشنا شویم. این مفهوم، به‌معنای آن است که به‌جای آوند تابع مفروض، تابعی از

یك آونـد دیگر، گذاشته شود. مثلاً، از انطباق تابـع‌های $y = \sin x$ و $z = \log y$، تابع $z = \log \sin x$ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، می‌توان تابع‌های زیر را به‌دست آورد:

$$\sqrt{1 - x^2}\ ,\quad arctg\frac{1}{x}, \ldots$$

در حالت کلی، فرض می‌کنیم که تابع $z = \varphi(y)$ در حوزهٔ $\mathcal{Y} = \{y\}$، و تابع $y = f(x)$ درحوزهٔ $\mathcal{X} = \{x\}$ معین باشند. ضمناً، مقدارهای تابع اخیر، همگی درحوزهٔ $\mathcal{Y}$ واقع‌اند. دراین صورت، متغیر z، با واسطهٔ y، تابعی از x می‌شود:

$$z = \varphi(f(x))$$

از روی مقدار x مفروض، از $\mathcal{X}$، ابتدا (با توجه به قانونی کـه به‌وسیلهٔ f مشخص شده است)، مقدار نظیر y، از $\mathcal{Y}$، وسپس (با توجه به‌قانونی که با علامت φ مشخص شده‌است)، مقدار z نظیر این مقدار y، به‌دست می‌آید و آن را، نظیر مقـدار x مفروض، به حساب می‌آورند. تابع تابع یا تابع‌مرکب حاصل، نتیجه‌ای است ازانطباق (یاروی‌هم‌گذاری) تابع‌های $f(x)$ و $\varphi(y)$.

این فرض که، مقدارهای تابع $f(x)$، ازمحدودهٔ حوزهٔ $\mathcal{Y}$ـ که تابع $\varphi(y)$، درآن تعریف شده است ـ بیرون نمی‌رود، کاملاً اساسی است: اگر این فرض راکنار بگذاریم، ممکن‌است به‌نتیجه‌ای بی‌معنا برسیم. مثلاً، با فرض $z = \log y$ و $y = \sin x$، می‌توانیم تنها مقدارهایی از x را درنظر بگیریم که به‌ازای آن‌ها داشته باشیم $\sin x > 0$، زیرا درغیراین‌صورت، $\log \sin x$ بی‌معنا می‌شود.

خوب است براین مطلب تاکید کنیم که خصلت تابع‌هایی، همچون تابع مرکب، نه به طبیعت بستگی تابعی z از x، بلکه تنها به‌شیوه‌ای که این بستگی داده شده است، مربوط می‌شود. مثلاً، فرض کنید $z = \sqrt{1 - y^2}$ برای y در $[-1, 1]$، و $y = \sin x$ برای x در $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$؛ دراین صورت

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$$

دراین جا، $|\cos x|$ به‌صورت یك تابع مرکب، عرضه شده است.

اکنون که بامفهوم انطباق تابع‌ها آشنا شدیم، می‌توانیم، بادقت، ساده‌ترین طبقه‌های تابع را، که درآنالیز ریاضی مورد بررسی‌قرارمی‌گیرند، مشخص کنیم: قبل از همه، باید ازتابع‌های مقدماتی ۱° تا ۷° نام برد، که‌قبلاً آن‌ها را شرح داده‌ایم؛ سپس، باید ازتابع‌هایی نام ببریم که از تابع‌های مقدماتی، و به‌کمك چهار عمل حساب و انطباق، به‌دست می‌آیند

(البته، باید عمل‌های حسابی و یا عمل انطباق، به‌تعداد محدود ــ و نه نامتناهی ــ وجود داشته باشد). در مورد این گونه تابع‌ها می گویند که، آن‌ها برحسب تابع‌های مقدماتی، به‌صورتی محدود، بیان شده‌اند؛ گاهی‌هم، به این تابع‌ها، تابع‌های مقدماتی گویند.

در آینده، که بردستگاه‌های تحلیلی پیچیده‌تری (مثل رشته‌های نامتناهی و انتگرال‌ها) مسلط شویم، با تابع‌های دیگری آشنا می‌شویم، که باز هم نقش مهمی در آنالیز ریاضی دارند، ولی از محدودهٔ تابع‌های مقدماتی، بیرون‌اند.

§۲. حد تابع

۵۲. تعریف حد تابع. مجموعهٔ عددی $\mathfrak{X}=\{x\}$ را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ a را نقطهٔ تجمع این مجموعه گویند، به‌شرطی که در هرنزدیکی به a (در هرحوزهٔ، به هراندازه کوچك، مجاور a)، مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، غیر از a، وجود داشته باشد.

برای این‌که این تعریف دقیق‌ترشود، ابتدا با مفهوم همسایگی آشنا می‌شویم: هر بازهٔ باز دلخواه $(a-\delta\ ,\ a+\delta)$ به مرکز a را، همسایگی نقطهٔ a گویند. حالا می توان گفت: نقطهٔ a را، نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $\mathfrak{X}$ گویند، به شرطی که در همسایگی آن، مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، متمایز از a، وجود داشته باشند.

ضمناً، خود نقطهٔ تجمع، ممکن است به $\mathfrak{X}$ تعلق داشته باشد و یا متعلق به آن نباشد.

فرض کنیم در حوزهٔ $\mathfrak{X}$، که نقطهٔ a نقطهٔ تجمع آن است، تابع $f(x)$ تعریف شده باشد. مطالعه رفتار این تابع، ضمن نزدیك شدن به a، می‌تواند جالب باشد. عدد A را حد تابع $f(x)$، ضمن میل x به‌سمت a (یا در نقطهٔ a) گویند، به شرطی که برای هر عدد $\varepsilon>0$ چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود، به نحوی که

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{نابرابری برقرار باشد که} \quad |x-a|<\delta \qquad (۱)$$

(x از $\mathfrak{X}$ گرفته شده و متمایز از a است).* این واقعیت را، این طور نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \qquad (۲)$$

اگر حوزهٔ $\mathfrak{X}$ چنان باشدکه در نزدیکی دلخواهی از a، ولی در سمت راست a، مقدارهای x از $\mathfrak{X}$ متمایز از a پیدا شود (در این حالت، a را نقطهٔ تجمع راست برای $\mathfrak{X}$ می‌نامند)، آنگاه می‌توان تأکید کردکه تعریف حد تابع ــ که هم‌اکنون داده شد ــ تنها محدود به $x>a$ است. در این حالت، حدتابع، درصورت وجود، حد تابع $f(x)$، وقتی

---

*) چون a، نقطهٔ تجمع برای $\mathfrak{X}$ است، روشن است که چنین مقدارهای x درهمسایگی $(x+\delta$ ــ $x-\delta)$ نقطهٔ a، بدون هیچ تردیدی، وجود دارد.

که x از طرف راست به‌سمت a میل کند، یا کوتاه‌تر حد راست (در نقطهٔ a) نامیده می‌شود و به این ترتیب، نشان داده می‌شود

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \qquad \text{یا} \qquad f(a+0)^*$$

به همین ترتیب، می‌توان، مفهوم نقطهٔ تجمع چپ، یا حدتابع وقتی که x از طرف چپ به‌سمت a میل کند؛ و یا به طور ساده، حد چپ تابع (در نقطهٔ a) را روشن کرد

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \qquad \text{یا} \qquad f(x-a)^*$$

اگر نقطهٔ a، در عین حال، نقطهٔ تجمع راست و نقطهٔ تجمع چپ برای $\mathfrak{M}$ باشد، به سادگی می‌توان ثابت کرد که: شرط لازم و کافی برای وجود حد (۲) این است که حدهای راست و چپ وجود داشته و با هم مساوی باشند:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

وقتی که x به‌سمت حد متناهی a میل می‌کند، ممکن است تابع، حد نامتناهی داشته باشد: تابع $f(x)$ دارای حد $+\infty$ (یا $-\infty$)، وقتی که x به‌سمت a میل کند، می‌باشد، به شرطی که برای هرعدد $E>0$، چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود، به نحوی که

$$|x-a|<\varepsilon \quad \text{تنها وقتی که} \quad (f(x)<-E \text{ یا } f(x)>E \qquad (۳$$

(که در آن، مثل همیشه، x از $\mathfrak{M}$ برداشته شده و مخالف a است).

این واقعیت را، به این ترتیب، نشان می‌دهند:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty (-\infty)$$

در این‌جا هم، می‌توان، همان ملاحظه‌های قبلی را دربارهٔ حدهای یك سوئی (حد راست و حد چپ) تکرار کرد.

اگر مجموعهٔ $\mathfrak{M}=\{x\}$، شامل مقدارهای x به قدر کافی بزرگ (از لحاظ قدرمطلق) باشد ـ که می‌توانند مثبت یا منفی باشند ـ گویند که $+\infty$ (یا $-\infty$) نقطهٔ تجمع برای $\mathfrak{M}$ است.

در این موردها، گویند تابع $f(x)$، وقتی که x به‌سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند، دارای حدی برابر A است، به شرطی که برای $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان عدد $\Delta>0$ پیدا شود به نحوی که

---

*) درحالتی که خود a برابر صفر باشد ($a=0$)، به‌جای $0+0$ یا $0-0$ می‌نویسند، $0+$ یا $0-$.

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad (۴)$$ تنها وقتی که $x>\Delta$ (یا $x<-\Delta$)

(که در آن، x از $\mathfrak{D}$ گرفته شده است). ضمناً می‌نویسند:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty \text{ یا})}} f(x)=A \quad (۵)$$

بالاخره، همهٔ این مطلب‌ها را، برای حالت $A=+\infty$ (یا $-\infty$) نیز، می‌توان تنظیم کرد.

ماهیت همهٔ این تعریف‌ها یکی است، تابع $f(x)$ باید به قدر دلخواه به حد خود A «نزدیك» شود، تنها وقتی‌که متغیر مستقل x، به قدرکافی، به‌حد خود a «نزدیك» شده‌باشد. ولی متغیر، وقتی به‌حدمتناهی خود «نزدیك» است‌که تفاضل‌بین‌آن‌ها (از لحاظ قدرمطلق) کوچك باشد. در حالت بی‌نهایت، کافی است بگوئیم که مقدار تابع، از لحاظ قدرمطلق، بزرگ باشد و علامت خود را حفظ‌کند.

روشن است‌که در همهٔ حالت‌ها، δ (یا Δ)، بستگی به ε (یا E) دارد.

در پایان یادآوری می‌کنیم که، وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند، آن را بی‌نهایت کوچك و وقتی به‌سمت ∞ میل می‌کند، آن را بی‌نهایت بزرگ می‌نامند. وقتی‌که کیفیت اخیر برای $x\to a$ پیش‌آید، می‌گویندکه تابع در نقطهٔ a برابر با بی نهایت می‌شود.

۵۳. حالت واریانت‌ها. اگر واریانت را، به‌عنوان تابعی از متغیر مستقل n، کـه در حـدود رشتهٔ طبیعی تغییر می‌کند، درنظر بگیریم، حد این تابع وقتی $n\to\infty$ از روی تعریفی‌که در شمارهٔ **۵۲** دادیم، با آن‌چه‌که دربارهٔ حد واریانت در شماره‌های **۲۳** و **۲۷** آوردیم، تطبیق می‌کند (تنها، درآن‌جا، نقش Δ به‌عهدهٔ N است). به‌این‌ترتیب، حدواریانت حالت خاصی از حد تابع است.

باوجوداین، برعکس‌هم، به‌مفهوم‌معینی، می‌توان حدتابع‌را، منجربه‌حدواریانت‌کرد.

فرض کنیم مجموعهٔ $\mathfrak{D}=\{x\}$، دارای نقطهٔ تجمع a باشد (دراین‌جا، a می‌تواند عددی متناهی یا نامتناهی، با این یا آن علامت، باشد). آن‌گاه می‌توان از $\mathfrak{D}$ دنبالهٔ

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (۶)$$

را، از مقدارهای x (مخالف a)، چنان درآورد که دارای حدی برابر a باشد (این‌دنباله را، با روش‌های مختلف و بی‌شماری، می‌توان پیدا کرد).

در واقع، اگر a متناهی باشد، آن‌گاه با در نظر گرفتن واریـانت مثبت δ_n، که به سمت صفر میل می‌کند، در هر همسایگی $(a-\delta_n, a+\delta_n)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$، نقطه a را از روی $x=x_n$ (مخـالف a) از $\mathfrak{D}$ پیدا می‌کنیم؛ چـون $|x_n-a|<\delta_n$، بنابراین

$x_n \to a$. وقتی که a برابر $+\infty$ (یا $-\infty$) باشد، واریانت مثبت $\Delta_n \to +\infty$ را در نظر می‌گیریم و برای هر Δ_n، مقدار $x = x_n$ از $\mathfrak{M}$ را پیدا می‌کنیم که برای آن $x_n > \Delta_n$ (یا $x_n < -\Delta_n$). معلوم است که $x \to +\infty$ (یا $x \to -\infty$) و غیره.

دنباله (۶) مقدارهای آوند، متناظر است با دنبالهٔ مقدارهای تابع

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad (۷)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، اگر برابری (۲) برقرار باشد، این دنبالهٔ همواره، دارای حد A است. به‌عنوان نمونه، به حالتی که a و A متناهی باشند، اکتفا می‌کنیم.

اگر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، قبلاً، عدد $\delta > 0$ را، به اعتبار تعریف حد (۲)، انتخاب می‌کنیم. از روی عدد δ و با توجه به تقارب دنبالهٔ (۶) به‌سمت a، بی‌شك می‌توان N را طوری پیدا کرد [۴۳] که به ازای $n > N$، نابرابری $|x_n - a| < \delta$ و در نتیجه [(۱) را ببینید]، برابری $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ برقرار باشد. و ازهمین‌جا، میل دنبالهٔ (۷)، به سمت A ثابت می‌شود.

معلوم می‌شود که حکم عکس نیز درست است:

فرض کنیم، دنبالهٔ دلخواه (۶) (از $\mathfrak{M}$) با حد a، متناظر باشد با دنبالهٔ (۷) مقدارهای تابع که همواره حدی برابر A دارد. در این صورت، این عدد A، حد تابع $f(x)$، بنابر تعریف شمارهٔ **۵۲**، خواهد بود.

در این‌جا هم، به‌حالت متناهی بودن a و A قناعت می‌کنیم. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، A حد تابع، به معنای مذکور، نباشد، در این صورت، به ازای عدد نامشخص $\varepsilon > 0$، عدد نظیر δ پیدا نخواهد شد، یعنی هر قدر δ کوچك گرفته شود، همواره می‌توان مقداری از متغیر مثل $x = x'$ پیدا کرد (متمایز از a)، به نحوی که برای $|x' - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$.

دنبالهٔ عددهای $\{\delta_n\}$ را، که به‌سمت صفر میل می‌کنند، انتخاب می‌کنیم. بنابر آن‌چه هم اکنون گفتیم، برای هر عدد $\delta = \delta_n$، حتماً مقدار $x = x'_n$ پیدا می‌شود که

$$|x'_n - a| < \delta_n, \quad \text{با وجود این:} \quad |f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon$$

به این ترتیب، از این مقدارها، دنبالهٔ

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n, \ldots$$

تشکیل می‌شود که برای آن داریم:

$$|x'_n - a| < \delta_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

و چون $\delta_n \to 0$، پس $x'_n \to a$.

بنا به فرض قضیه، باید دنبالهٔ مقدارهای تابع‌های

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \dots,\ f(x'_n),\ \dots$$

به سمت A میل کند و این ممکن نیست، چرا که برای همهٔ $n = 1, 2, 3, \dots$ داشتیم $|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon$. این تناقض، درستی حکم را ثابت می‌کند.

به این ترتیب، در واقع، به تعریف دوم حد می‌رسیم، که در شمارهٔ **۵۲**، به‌اصطلاح «به‌زبان $\varepsilon - \delta$» بیان شده. و حالا می‌توانیم آن‌را «به زبان دنباله» بیان کنیم. مفهوم تساوی (۲)، به این معناست که، برای هر دنبالهٔ (۶) ــ که حدی مساوی a دارد ــ دنبالهٔ (۷) متناظری وجود دارد که دارای حدی مساوی A است.

در پایان، کافی است تنها وجود حد را برای هر یك از دنباله‌های (۷)، که نظیر دنباله‌های (۶) متقارب به‌سمت a باشند، مفروض بگیریم، تا ثابت‌کنیم که همهٔ این حدها با هم برابرند. در واقع، فرض کنیم، به‌ازای دو دنبالهٔ

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \dots,\ x'_n,\ \dots; \qquad x''_1,\ x''_2,\ x''_3,\ \dots,\ x''_n,\ \dots$$

متقارب به سمت a، داشته باشیم:

$$f(x'_n) \to A', \qquad f(x''_n) \to A''$$

که در آن‌جا $A' \neq A''$. با یك در میان قرار دادن جمله‌های هر دو دنباله، دنبالهٔ تازه‌ای تشکیل می‌دهیم:

$$x'_1,\ x''_1,\ x'_2,\ x''_2,\ \dots,\ x'_n,\ x''_n,\ \dots$$

روشن است که این دنباله هم به سمت a میل می‌کند، زیرا برای مقدارهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ n، هم x'_n و هم x''_n، تفاوت به قدر کافی کوچکی با a دارند. در نتیجه، دنبالهٔ متناظر آن، یعنی مقدارهای تابع‌های

$$f(x'_1),\ f(x''_1),\ f(x'_2),\ f(x''_2),\ \dots,\ f(x'_n),\ f(x''_n),\ \dots$$

برخلاف فرض، اصلاً دارای حدی نیست، زیرا دنباله‌های جزئی که شامل جمله‌های زوج یا جمله‌های فرد این دنباله هستند، به‌سمت حدهای متفاوتی میل می‌کنند [۴۰]. تناقض حاصل ثابت می‌کند که دنباله‌های به‌صورت (۷)، در عمل، به‌سمت یك حد، میل می‌کنند.

۵۴. مثال‌ها. ۱) ثابت می‌کنیم

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (a > 1)$$

برای هر $E>0$، کافی است $\Delta=\log_a E$ را انتخاب کنیم تا

$$x>\Delta \text{ ، منجر به } a^x>E \text{ شود}$$

و در نتیجه، حکم را ثابت کند.*

به ترتیب مشابهی ثابت می‌شود که

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \qquad (a>1)$$

در واقع، هر چه باشد $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$، اگر $\Delta=\log_a\frac{1}{\varepsilon}=-\log_a\varepsilon$ اختیار شود

آن گاه

$$x<-\Delta \text{ به‌ازای } a^x<\varepsilon \text{، الزاماً}$$

در حالتی هم که داشته باشیم $0<a<1$ به، کمك تبدیل

$$a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

به سادگی، نتیجه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0; \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \qquad (0<a<1)$$

۲) ثابت می‌کنیم که برای $a>1$

$$\lim_{x\to+0} \log_a x=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty;$$

برای هر $E>0$، تنها به‌ازای $x>a^E$ خواهیم داشت $\log_a x>E$ و، به همین ترتیب، تنها به ازای $0<x<a^{-E}$، نابرابری $\log_a x<-E$ برقرار است و، با این توضیح، هر دو رابطه، ثابت می‌شود.

۳) سپس، داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2},$$

برای نمونه، حداول را ثابت می‌کنیم. برای هر $\varepsilon>0$، کافی است $x>tg\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$

---

*) در شمارهٔ ۲۷، با نتیجهٔ خاص‌تر $\lim_{n\to\infty} a^n=+\infty$ $(a>1)$. سروکار داشتیم.

گرفته شود تا داشته باشیم: $\arctg x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$، به نحوی که

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctg x < \varepsilon$$

۴) رابطهٔ دقیق‌تر، عبارت است از

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \qquad (a > 1)$$

یادآوری می‌کنیم که حالت خاصی از این رابطه را، قبلاً داشته‌ایم [۳۲، ۹)]:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

روشن است که، در عین حال، داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty$$

بنابراین، با مفروض بودن $E > 0$، عدد طبیعی N پیدا می‌شود، به نحوی که برای $n > N$، این نامساوی برقرار باشد:

$$\frac{a^n}{n+1} > E$$

حالا فرض کنید $n > N + 1$؛ اگر $n = E(x)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$n > N \text{ و } \qquad n \leqslant x < n+1$$

به نحوی که

$$\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > E$$

که، در نتیجه، حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.

از این‌جا، مثل موردی که در ۳۲، ۹) داشتیم، به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \qquad (a > 1, k > 0)$$

۵) به همین ترتیب، با تکیه بر نتیجهٔ قبلی [۳۲، ۱۱)]، یعنی

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \qquad (a>1)$$

می‌توان ثابت کرد که، به‌طور کلی

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0 \qquad (a>1)$$

که در آن، x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت را اختیار کند.

در این‌جا، اگر x را به x^k تبدیل کنیم $(k>0)$، به سادگی ثابت می‌شود که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0 \qquad (a>1, k>0)$$

در واقع، برای هر $\varepsilon>0$، می‌توان Δ را طوری انتخاب کرد که برای $x>\Delta$، این نابرابری برقرار باشد:

$$\frac{\log_a x}{x}<k\varepsilon$$

بنابراین، برای $x>\Delta_1=\Delta^{\frac{1}{k}}$، خواهیم داشت $x^k>\Delta$ و

$$\frac{\log_a x}{x^k}<\varepsilon$$

اگر در این‌جا، x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم، به این نتیجه می‌رسیم:

$$\lim_{x\to+0} x^k\log_a x=0 \qquad (a>1, k>0)$$

۶) از آن‌چه در ۲۵، ۵) دربارهٔ رابطهٔ حدی

$$\lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$$

ثابت کردیم، می‌توان، حالت کلی‌تر را به‌دست آورد:

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

یادآوری می‌کنیم که درضمن

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$$

به این ترتیب، هر چه باشد $\varepsilon > 0$، می‌توان عدد طبیعی n_0 را پیدا کرد، به نحوی که (با شرط $a > 1$)

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\varepsilon$$

حالا اگر داشته باشیم:

$$|x| < \frac{1}{n_0} \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0}$$

در نتیجه

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$$

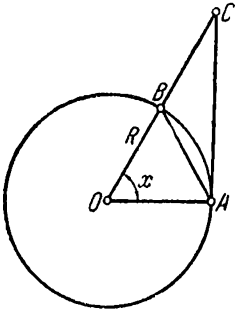
و از آن‌جا

$$|a^x - 1| < \varepsilon \qquad \text{یا} \qquad 1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon$$

که، در نتیجه، حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.

۷) حالا، نتیجهٔ زیر را ثابت می‌کنیم، که برای آینده، اهمیت زیادی دارد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (۸)$$



شکل ۲۲

قبل از آن، لازم است نابرابری مفید زیر را ثابت کنیم:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \qquad (۹)$$

برای این منظور، در دایرهٔ به شعاع R، زاویهٔ حادهٔ AOB، وتر AB وممماس AC را ـ که از نقطهٔ A بر دایره رسم شده است ـ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:*

مساحت مثلث AOC > مساحت قطاع AOB > مساحت مثلث AOB

---

*) برای نوشتن این نابرابری‌ها، از دستورهایی که، دربارهٔ مساحت شکل‌ها، در دبیرستان، دیده‌ایم، استفاده می‌کنیم.

اگر اندازهٔ زاویهٔ AOB را، برحسب رادیان، x بگیریم، به‌نحوی که طول کمان AB برابر Rx شود، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}R^۲ \sin x < \frac{۱}{۲}R^۲ . x < \frac{۱}{۲}R^۲ tg\, x$$

که، اگر به $\frac{۱}{۲}R^۲$ ساده کنیم، به‌همان نابرابری‌های (۹) می‌رسیم.

با فرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، $\sin x$ را به هرکدام از جمله‌های نابرابری‌های (۹) تقسیم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۱ > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

از آن‌جا

$$۰ < ۱ - \frac{\sin x}{x} < ۱ - \cos x$$

ولی [با توجه به‌رابطهٔ (۹)]

$$۱ - \cos x = ۲ \sin^۲ \frac{x}{۲} < ۲ \sin \frac{x}{۲} < x$$

به‌طوری‌که

$$۰ < ۱ - \frac{\sin x}{x} < x$$

ازاین‌جا، نابرابری زیر حاصل می‌شود:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - ۱ \right| < |x|$$

و روشن است‌که با تغییرعلامت x، تغییری درآن پدید نمی‌آید، یعنی، برای همهٔ مقدارهای $x \neq ۰$، تنها به‌شرط $|x| < \frac{\pi}{۲}$، درست است.

نابرابری‌حاصل هم، مسأله‌را حل می‌کند. در واقع، اگر $\varepsilon > ۰$ را به‌دلخواه‌درنظر بگیریم، برای δ، کافی است‌کوچکترین مقدار ازبین دوعدد ε و $\frac{\pi}{۲}$ را انتخاب کنیم: اگر

$|x|<\delta$ باشد ــ و این ممکن است، زیرا $\delta\leqslant\frac{\pi}{۲}$، و با توجه به‌شرط $\delta\leqslant\varepsilon$، به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{\sin x}{x}-۱\right|<\varepsilon$$

طبق تعریف حد تابع [۵۲]، این نابرابری به‌معنای آن است که تابع $\frac{\sin x}{x}$، وقتی که x به‌سمت ۰ میل کند، دارای حدی برابر ۱ است، به‌نحوی که رابطهٔ (۷) برقرار است.

۷a) رابطه حدی (۸)، بنا به ۵۳، می‌تواند به‌این ترتیب فهمیده شود که: وقتی x، دنبالهٔ متقارب به‌صفر $\{x_n\}$ را می‌پیماید، واریانت $\frac{\sin x_n}{x_n}$، هر بار به‌سمت واحد میل می‌کند.

این یادآوری را در مورد جست‌وجوی حد واریانت زیر به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{۲}\cos\frac{\varphi}{۲^۲}\cdots\cos\frac{\varphi}{۲^n}$$

که آن، φ عددی دلخواه و متمایز از ۰ است.

روشن است که

$$\sin\varphi=۲\cos\frac{\varphi}{۲}\sin\frac{\varphi}{۲}=۲^۲\cos\frac{\varphi}{۲}\cdot\cos\frac{\varphi}{۲^۲}\cdot\sin\frac{\varphi}{۲^۲}=\cdots$$

$$\cdots=۲^n\cos\frac{\varphi}{۲}\cdot\cos\frac{\varphi}{۲^۲}\cdots\cos\frac{\varphi}{۲^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{۲^n}$$

به‌نحوی که عبارت موردنظر ما، به‌این‌صورت در می‌آید:

$$\frac{\sin\varphi}{۲^n\cdot\sin\frac{\varphi}{۲^n}}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{۲^n}}{\sin\frac{\varphi}{۲^n}}$$

و چون $x_n=\frac{\varphi}{۲^n}\to۰$، بنابر آن چه گفتیم:

$$\lim\frac{\sin\frac{\varphi}{۲^n}}{\frac{\varphi}{۲^n}}=۱$$

وحد واریانت ما، برابر با حد $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ می‌شود.

۸) اکنون به‌حد بسیار مهمی می‌رسیم. درشمارهٔ ۳۶، عدد e را، همچون حد واریانت

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (10)$$

تعریف کردیم. حالا، به‌اثبات نتیجهٔ کلی‌تر زیر می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (11)$$

و همچنین

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (11a)$$

و این‌بار، از تعریف دوم حد، از «زبان دنباله‌ها» [۵۳] استفاده می‌کنیم.

قبل‌ازهمه، یادآور می‌شویم که، به‌موازات (۱۰)، برابری زیر نیز درست است:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e \qquad (12)$$

اگر، $\{n_k\}$ دنبالهٔ دلخواهی از عددهای طبیعی باشد که، همراه با k، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند [۴۰].

حالا فرض کنید، x دنباله‌ای مثل $\{x_k\}$ را، یعنی مقدارهایی که به‌سمت $+\infty$ میل می‌کنند، بپیماید؛ حتی می‌توان فرض کرد که همیشه $x_k>1$. $n_k=E(x_k)$ می‌گیریم، به‌نحوی که

$$n_k<x_k<n_k+1 \quad \text{و} \quad n_k\to+\infty$$

از آن‌جا که درضمن داریم:

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k}$$

بنابراین

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

دو عبارت کناری را می‌توان، به‌این‌ترتیب، تبدیل کرد:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

ضمناً، با توجه به (۱۲)

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e\text{ ، همچنین }\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e$$

و درضمن، روشن است که

$$1+\frac{1}{n_k}\to 1\text{ ،}\quad 1+\frac{1}{n_k+1}\to 1$$

به‌این‌ترتیب، هر دو عبارت مذکور، به‌سمت حد مشترک e میل می‌کنند و ، طبیعی است، که عبارت محصور بین آن‌ها نیز به‌سمت e میل خواهدکرد [با توجه بقضیهٔ ۳°، شمارهٔ ۲۸]:

$$\text{حد}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{n_k}=e$$

و به‌این‌ترتیب، اثبات رابطهٔ (۱۱) «به‌زبان دنباله‌ها» پایان می‌یابد.

برای اثبات (۱۱a)، فرض می‌کنیم، دنبالهٔ $\{x_k\}$، حدی مساوی $\infty-$ داشته‌باشد (ضمناً، می‌توان‌فرض کرد که‌همیشه $x_k<-1$). اگر $x_k=-y_k$ بگیریم، درآن صورت $y_k\to+\infty$ (وهمیشه $y_k>1$). روشن است که

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=$$

بنابرآن‌چه ثابت کردیم، عامل اول عبارت اخیر به‌سمت e میل می‌کند و حد عامل دوم‌هم برابر واحد است، پس‌عبارت‌سمت چپ هم، به‌سمت e میل‌می‌کند. درستی رابطهٔ (۱۱a)،

ثابت شد.

حالا، درعبارت $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$، متغیر x را به $\frac{1}{\alpha}$ تبدیل می‌کنیم؛ اگر به α، دنباله‌ای از مقدارهای مثبت یا منفی را، که بـه‌سمت ۰ میل می‌کنند (ولی برابر با ۰ نیستند)، نسبت دهیم، در آن صورت، $x=\frac{1}{\alpha}$ به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند، بنابـراین، رابطه‌های (۱۱) و (11a) را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (۱۳)$$

این، نتیجه‌ای بسیار مهم است که پایهٔ همهٔ کاربردهای عدد e را تشکیل می‌دهد.

۹) بالاخره، وقتی که یك تابع، حدی نداشته باشد، می‌تواند مثال جالبی باشد: تابع $\sin x$، وقتی که x به‌سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل کند، اصلا حدی ندارد.

همیشه، با توسل به «دیدگاه دنباله‌ها»، فقدان حـد را، ساده‌تر می‌توان ثابت کرد، کافی است توجه کنیم که دو دنبالهٔ

$$\left\{(2n-\tfrac{1}{2})\pi\right\} \quad و \quad \left\{(2n+\tfrac{1}{2})\pi\right\} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

از مقدارهای x، که دارای حد $+\infty$ هستند، متناظر با دو دنباله ازمقدارهای تابع هستند، که به‌سمت حدهای مختلفی میل می‌کنند:

$$\sin(2n-\tfrac{1}{2})\pi=-1\to -1, \quad \sin(2n+\tfrac{1}{2})\pi=1\to 1$$

[به‌نحو دیگری هم، می‌توان استدلال کرد: اگر این دنباله را

$$\left\{(n+\tfrac{1}{2})\pi\right\} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

برای مقدارهای x درنظر بگیریم، که به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند، در آن‌صورت، دنبالهٔ نظیر مقدارهای تابع

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

اصلا دارای حدی نیست.]

اگر خصوصیت «نوسانی» سینوسوئیدرا به‌یاد بیاوریم، دلیل فقدان حد، دراین‌حالت،

روشن می‌شود.

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که تابع $sin\frac{۱}{\alpha}$، وقتی که α به‌سمت ۰ (از راست یا از چپ) میل کند، دارای حد نیست. این، تنها شکل دیگری از مثال قبل است: در آن‌جا، کافی است در تابع $sinx$، x را به $\frac{۱}{\alpha}$ تبدیل کنیم. روشن است، اگر α، دنبالهٔ مقدارهایی را، که به‌صفر (از راست یا چپ) میل می‌کنند، بپیماید، آن‌گاه $x=\frac{۱}{\alpha}$ به‌سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند و برعکس.

دوباره، در $sin\frac{۱}{\alpha}$، به‌جای α، از حرف x استفاده می‌کنیم (که به نمایش معمولی طول در محورهای مختصات برگردیم) و نمودار آموزندهٔ این تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$y=sin\frac{۱}{x} \qquad (x\neq ۰)$$

به‌مقدارهای x از ۰ تا $\frac{۲}{\pi}$ (و از $-\frac{۲}{\pi}$ تا ۰) اکتفا می‌کنیم.

مقدارهای x را، به‌صورت نزولی (که به‌سمت ۰ میل می‌کنند)، درنظر می‌گیریم:

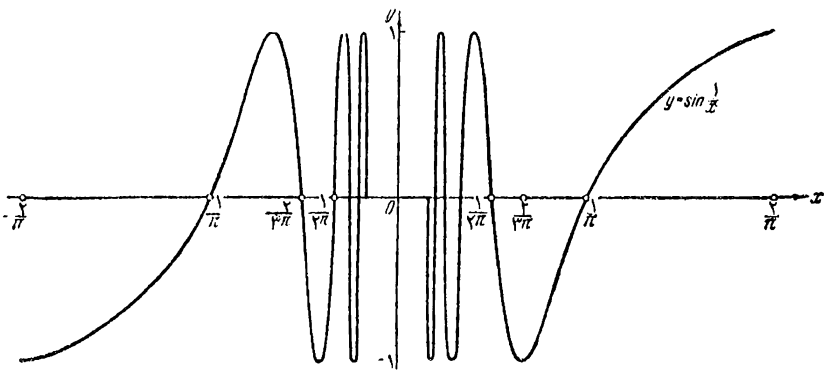
$$\frac{۲}{\pi},\frac{۱}{\pi},\frac{۲}{۳\pi},\frac{۱}{۲\pi},\frac{۲}{۵\pi},\frac{۱}{۳\pi},\frac{۲}{۷\pi},\ldots,\frac{۲}{(۲n-۱)\pi},\frac{۱}{n\pi},\frac{۲}{(۲n+۱)\pi},\ldots$$

که نظیر مقدارهای صعودی $\frac{۱}{x}$ (تا $+\infty$) می‌باشند:

$$\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi,\frac{۵\pi}{۲},۳\pi,\frac{۷\pi}{۲},\ldots,(۲n-۱)\frac{\pi}{۲},n\pi,(۲n+۱)\frac{\pi}{۲},\ldots$$

درفاصله‌های بین مقادیر مذکور (ضمن نزول x)، تابع ما، متناوباً از ۱ تا ۰ و از ۰ تا ۱− نزول می‌کند، سپس از ۱− تا ۰ و ۰ تا ۱ صعود می‌کند وغیره.

به‌این‌ترتیب، تابع $sin\frac{۱}{x}$ هم، مثل تابع $sinx$، دارای مجموعه‌ای نامتناهی از نوسان‌هاست، ولی اگر درمورد $sinx$، این‌نوسان‌ها در یك بازهٔ نامتناهی توزیع شده‌اند، در مورد $sin\frac{۱}{x}$، نوسان‌ها در یك بازهٔ متناهی، مرتباً کوچکتر و با نزدیك‌تر شدن به صفر



شکل ۲۳

متراکم‌تر می‌شوند.

نمودار را درشکل ۲۳ می‌بینید (روشن است که این نمودار، نمی‌تواند کامل باشد، زیرا نشان‌دادن مجموعه‌ای نامتناهی از نوسان‌ها، ممکن نیست). از آن‌جا که با تغییر علامت x، علامت $\sin\frac{1}{x}$ هم تغییر می‌کند، نیمهٔ چپ نمودار، قرینهٔ نیمهٔ راست آن، نسبت به‌مبداء مختصات است.

۱۰) حالا تابع $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ را درنظر می‌گیریم ($x\neq 0$). این تابع، باضرب تابع قبلی $\sin\frac{1}{x}$ درضریب x، به‌دست آمده است، ولی این‌بار، حد تابع به‌ازای $x\to 0$ وجود دارد.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

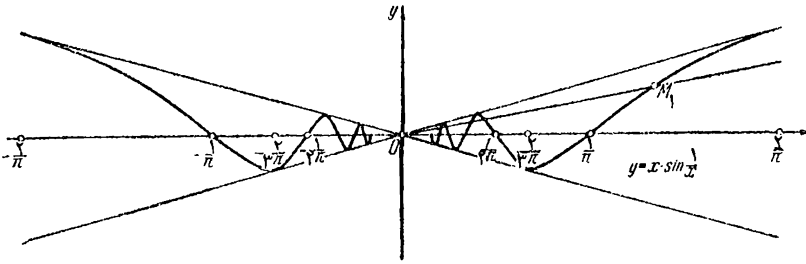
که درستی آن، با توجه به‌نابرابری زیر روشن است:

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$$

با نزدیك‌شدن x به ۰، این تابع هم، مثل تابع قبلی، مجموعهٔ بی‌نهایت نوسان‌ها را می‌سازد، ولی (به‌خاطر وجود ضریب x)، با نزدیك‌شدن به O دامنهٔ نوسان‌ها تنزل می‌کند و همین وضع است که وجود حد را تأمین می‌کند.

نمودار تابع

$$y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$$



شکل ۲۴

درشکل ۲۴ داده شده است . این نمودار بین دو نیمساز $y=x$ و $y=-x$ زاویه‌های مختصاتی قرار دارد و با نزدیك‌شدن به‌نقطهٔ o، کوچکتر و به‌هم‌فشرده‌تر می‌شود.*

یادداشت: این حدها را بررسی کردیم:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

که همهٔ آن‌ها، یك خصوصیت مشترك دارند : هیچ‌کدام از آن‌ها، به‌ازای $x=0$، معین نیستند. ولی، این وضع، مانع از آن نمی‌شود که از حد آن‌ها، وقتی $x\to 0$، گفت‌وگو کنیم، زیرا، بنا بر آن‌چه درشمارهٔ **۵۲** گفته‌ایم، مقدار $x=0$ دراین بررسی دخالتی ندارد.

به‌همین‌ترتیب، وقتی‌که تابع $\sin\frac{1}{x}$، به‌ازای $x=0$، بی‌معنا می‌شود، هیچ مانعی ندارد که به‌مسالهٔ حد آن، وقتی $x\to 0$، بپردازیم. ولی، این‌بار، معلوم می‌شود که، برای تابع، حدی وجود ندارد.

۵۵. گسترش نظریهٔ حد. همان‌طور که درفصل اول (§۱ و §۲) بحث درمورد حالت واریانت پیش‌آمد، طبیعی است که دراین‌جا هم، بحث مربوط به گسترش نظریهٔ حد، درحالت کلی تابع نامشخص، پیش‌آید.

برای رسیدن به‌این هدف، دو راه وجود دارد:

I. قبل‌ازهمه، می‌توان با ایجاد تفاوت‌هایی درنحوهٔ بیان، نوع بحث‌هایی را که داشته‌ایم، تغییر دهیم. به‌عنوان نمونه، نظر خود را درمورد گزارهٔ ۱° شمارهٔ **۲۶**، به‌کار می‌بریم.

تابع $f(x)$، مفروض دریك حوزهٔ $\mathfrak{D}$، با نقطهٔ تجمع a را درنظر می‌گیریم.**

---

*) در دوشکل ۲۳ و ۲۴، برای روشن‌تر بودن‌وضع، واحدمحور x را بزرگتر انتخاب کرده‌ایم.

**) عدد a، نامتناهی هم می‌تواند باشد، ولی به‌خاطر مشخص بودن وضع، به‌حالت متناهی a، اکتفا می‌کنیم.

۱°. وقتی‌که x به‌سمت a میل می‌کند، اگر تابع $f(x)$ دارای حد متناهی A و $A>p$ (یا $A<q$) باشد، آن گاه، برای مقدارهای x به اندازهٔ کافی نزدیك به a (و مخالف a)، خود تابع، درنابرابری زیر صدق می‌کند:

$$f(x)>p \quad (\text{یا } f(x)<q) \qquad (۱۴)$$

با انتخاب عدد مثبت $\varepsilon<A-p$ (یا $\varepsilon<q-A$)، خواهیم داشت:

$$A-\varepsilon>p \ (\text{یا } A+\varepsilon<q)$$

ولی، بنا به‌تعریف حد، به‌ازای این ε، می‌توان δ را چنان پیدا کرد که، اگر نابرابری $|x-a|<\delta$ برقرار باشد (که در آن، x از $\mathfrak{X}$ گرفته شده و مخالف a است)، داشته‌باشیم:

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

برای همان مقدارهای x، (۱۴) هم برقرار خواهد بود.

خواننده می‌بیند که، برای اثبات، هیچ اندیشهٔ تازه‌ای مورد استفاده قرار نگرفته‌است.

از این‌جا، می‌توان بلافاصله، گزاره‌های ۲°، ۳° و ۵° از شمارهٔ **۲۶** را مطرح کرد.

مثلاً، اگر در ۱° فرض کنیم $p=0$ ($q=0$)، نتیجه می‌شود:

۲°. اگر به‌ازای $x\to a$، تابع $f(x)$ دارای حد متناهی مثبت (یا منفی) باشد، آن‌گاه خود تابع، دست‌کم برای مقدارهای x به‌قدرکافی نزدیك به a و مخالف a، مثبت (یا منفی) است

حکم نظیر ۴° نیز درست است، منتها درشکل بسیار محدودتری.

۴°. اگر به‌ازای $x\to a$، تابع $f(x)$ دارای حد متناهی A باشد، آن‌گاه برای مقدارهای x به‌قدرکافی نزدیك به a، تابع کران‌دار است:

$$|f(x)|\leqslant M' \qquad (M'=\text{const.},\ |x-a|<\delta)$$

به‌یاد بیاوریم که، در ابتدا، برای واریانت x_n هم، که دارای حد متناهی بود، نابرابری $|x_n|\leqslant M'$، تنها برای $n>N$ به‌دست می‌آمد؛ ولی ازآن‌جا که تنها تعداد محدودی از مقدارهای واریانت ممکن‌است دراین‌نابرابری صدق نکنند، به‌سادگی می‌شد، با بزرگ کردن M' (درصورت لزوم)، نابرابری را، برای همهٔ مقدارهای x_n، برقرار کرد. ولی دراین‌جا، درحالت کلی، این‌کار ممکن نیست، زیرا مقدارهایی از x، که برای آن‌ها $|f(x)|>M'$ باشد، ممکن است مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند. مثلاً، تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ (برای $x>0$)، وقتی که $x\to 1$، به‌سمت واحد میل می‌کند؛ روشن است که

داریم: $f(x)<۲$، به‌شرطی که داشته باشیم $|x-۱|<\frac{۱}{۲}$، ولی برای همهٔ مقدارهای مورد بررسی x، تابع $f(x)$، به‌هیچ‌وجه، محدود و کران‌دار نیست.

II. با استناد بـه قضیه‌های دیـگری که، در آن‌ها، متغیرها با نشانه‌های برابری و نابرابری ویا باعمل‌های حسابی به‌هم مربوط شده‌اند. قبل ازهمه، یادآوری کنیم که پیوند دو یا چندتابع $f(x)$، $g(x)$،...(که دریك بازهٔ $\mathfrak{X}$ معین‌اند) به‌وسیلهٔ این نشانه‌ها، برای‌ما این معنا را دارد که مقدارهای آن‌ها، متناظر باهمان مقدارهای x هستند.

همهٔ این قضیه‌ها را می‌تـوان به‌طریق مشابهی، ازنوثابت کرد، ولـی عملاً، اثبات آن‌ها، لزومی ندارد. وقتی که از حد یك تابع صحبت می‌کنیم، اگر بر «دیدگاه دنباله‌ها» تکیه کنیم، آن‌وقت، همهٔ قضیه‌هایی که برای دنباله‌ها ثابت کرده‌ایم، برای تابع‌ها هم، درست خواهند بود.

به‌عنوان نمونه، به قضیه‌های ۱°، ۲°، ۳°، ازشمارهٔ ۳۰ می‌پردازیم.

فرض کنیم، دوتابع $f(x)$و$g(x)$، درحوزهٔ $\mathfrak{X}$ (بـا نقطهٔ تجمع a)، مفروض باشند، و وقتی x به‌سمت a میل کند، هردوتابع، حدی متناهی داشته باشند:

$$\text{حـــد } f(x)=A, \quad \text{حـــد } g(x)=B$$

دراین صورت، تابع‌های

$$f(x)\pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (۱۵)$$

به‌ترتیب، دارای حدهای متناهی زیرهستند (درحالت نسبت، با فرض $B\neq ۰$):

$$A\pm B, \quad A\cdot B, \quad \frac{A}{B}$$

مفهوم این رابطه‌ها، «به‌زبان دنباله‌ها» چنین‌است: اگر $\{x_n\}$، دنبالهٔ دلخواه‌مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، دارای حد a باشد، آن‌گاه

$$f(x_n)\to A, \quad g(x_n)\to B$$

اگر از قضیه‌هایی که قبلاً ثابت کرده‌ایم، در مورد این دو واریانت، استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\text{حـــد } [f(x_n)\pm g(x_n)]=A\pm B, \quad \text{حـــد } [f(x_n)\cdot g(x_n)]=A\cdot B$$

$$\text{حد}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{A}{B}$$

و این‌ها («به زبان دنباله‌ها»)، درست همان چیزی را بیان می‌کنند، که می‌خواستیم ثابت کنیم*.

به همین ترتیب، می‌توان همهٔ آن چه را که در شمارهٔ **۳۱**، دربارهٔ «صورت‌های مبهم» گفتیم:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty$$

به‌این جا هم سرایت دهیم و به‌حالت کلی درآوریم.

همان‌طور که درحالت ساده، وقتی که با تابع‌های باآوند طبیعی سروکارداریم، عمل می‌کردیم، دراین جا هم، برای «رفع ابهام»، تنها داشتن حدهای $f(x)$ و $g(x)$ کافی نیست و باید خود قانون‌های تغییر آن‌ها را به‌حساب بیاوریم.

خواننده، بی‌شك، متوجه شده است که درمثال‌های ۴) و ۵)شمارهٔ پیش، با ابهام‌های به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\cdot\infty$ و درمثال ۷) با ابهام به‌صورت $\frac{0}{0}$ سروکارداشتیم؛درشمارهٔ بعد، مثال‌های دیگری، که هنوز به‌کاربردقضیه‌های سادهٔ نظریهٔ حد مربوط می‌شوند، می‌آوریم.

ما دوباره در §۴ فصل چهارم، به این موضوع برمی‌گردیم و، درآن‌جا، روش‌های کلی‌تر رفع ابهام را، به‌کمك حساب دیفرانسیلی، مطرح می‌کنیم.

۵۶. چند مثال. ۱) با تعمیم مثال‌های ۱) و ۲) درشمارهٔ **۳۲**، رفتارچند جمله‌ای

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k,$$

و، سپس، نسبت دو چند جمله‌ای ازاین نوع را

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}x+b_l}$$

وقتی که $x\to\pm\infty$، مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

---

*) در حالت نسبت، می‌توان (شبیه مورد واریانت‌ها) فرض کرد که برای x به‌قدرکافی نزدیك به a، داشته باشیم $g(x)\neq 0$، به نحوی که کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$، دست‌کم برای این مقدارهای x، دارای معنا باشد.

از راه تبدیل

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_k}{x^k}\right)$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty \qquad (\infty-\infty)$$

ضمناً، علامت جواب، درحالت زوج بودن k، با علامت a_0 معین می‌شود؛ ودرحالت فرد بودن k، به‌علامت x هم بستگی پیدا می‌کند.

۲) به‌طریق مشابهی، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty,\frac{a_0}{b_0},0 \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

که جواب آن، به‌ترتیب، مربوط به‌آن است‌که یکی ازشرط‌های $k>l$، $k=l$ یا $k<l$ را داشته باشیم. درحالت اول، علامت حد، به علامت‌های a_0 و b_0 وهمچنین (در صورت فرد بودن $k-l$) به‌علامت x، بستگی دارد.

۳) ثابت می‌کنیم که، برای هرنمای گویا ومثبت r، این رابطه درست است*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

ازحالت ساده‌تر، آغازمی‌کنیم. وقتی که نما، عددی طبیعی باشد: $r=n$. بنابر دو-جمله‌ای نیوتون داریم:

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{nx+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^2+\cdots+x^n}{x}=n+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x+\cdots+x^{n-1};$$

چون، به ازای $x\to 0$، همهٔ جمله‌های مجموع اخیر، به جز نخستین آن‌ها، به‌سمت ۰ میل می‌کند، در واقع، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

---

*) بعداً [شمارهٔ **۷۷**، ۵)(پ)]، این حکم را، برای حالت نمای حقیقی دلخواه، تعمیم‌خواهیم داد.

حال $r=\frac{۱}{m}$ می‌گیریم (m، عددی طبیعی است)، به‌عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\sqrt[m]{۱+x}-۱}{x}$$

فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[m]{۱+x}-۱=y \Rightarrow x=(۱+y)^m-۱$$

از آن‌جا که (با فرض $|x|<۱$) داریم:

$$۱-|x|<\sqrt[m]{۱+x}<۱+|x|$$

و بنابراین، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt[m]{۱+x}=۱$$

به نحوی که همراه با x، y هم به‌سمت ۰ میل می‌کند. آن وقت، با توجه به حالت قبل داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[m]{۱+x}-۱}{x}=\lim_{y\to ۰}\frac{y}{(۱+y)^m-۱}=\frac{۱}{m}$$

سرانجام، به‌حالت کلی $r=\frac{n}{m}$ می‌رسیم که، بازهم، باواردکردن همان متغیر کمکی y، به‌نتیجه می‌رسد:

$$\frac{(۱+x)^{\frac{n}{m}}-۱}{x}=\frac{(۱+y)^n-۱}{(۱+y)^m-۱}=\frac{(۱+y)^n-۱}{y}\cdot\frac{y}{(۱+y)^m-۱}$$

از آن‌جا

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{\frac{n}{m}}-۱}{x}=\frac{n}{m}$$

۴) این‌حد را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}}{x^2}$$

اگر فرض کنیم $y=\sqrt[m]{1+x}-1$، عبارت مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{y-\frac{1}{m}[(1+y)^m-1]}{[(1+y)^m-1]^2}=\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\dots}{m^2y^2+\dots}=\frac{-\frac{m-1}{2}+\dots}{m^2+\dots}$$

که از آن‌جا، به‌سادگی، معلوم می‌شود که حد مورد نظر، برابر است با $-\frac{m-1}{2m^2}$.

۵) حد [(۷، ۵۴)]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

غالباً، برای محاسبهٔ حدهای دیگر، به‌کار می‌رود.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)\qquad\text{(الف}$$

روشن است که

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

و چون، حد عبارت داخل پرانتز برابر واحد است، بنابراین، حد تمامی عبارت، برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)\qquad\text{(ب}$$

دراین جا هم، با تبدیل عبارت، به‌همان حد معلوم، می‌رسیم:

$$\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

توجه می کنیم که به‌ازای $x\to 0$ داریم: $\cos x\to 1$، $\left(\frac{\sin x}{x}\right)\to 1$ و $\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\to\frac{1}{2}$.

پ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - tg x)=0$ $\qquad (\infty-\infty)$

دراین جا، بهتر است، متغیر $\alpha=\frac{\pi}{2}-x$ را در نظر بگیریم. روشن است که برای $x\to\frac{\pi}{2}$ داریم: $\alpha\to 0$. بنابراین

$$\sec x - tg x = \operatorname{csc}\alpha - \cot g\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\alpha\to 0.$$

۵۷. حد تابع یکنوا (مونوتون). پرسش مربوط به خود وجود حد تابع

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

به کمك تعمیم مفهوم واریانت یکنوا [۳۴]، برای نوع خاصی از تابع‌ها، به‌سادگی حل می‌شود.

فرض کنیم، تابع $f(x)$، در حوزهٔ $\mathfrak{X}=\{x\}$، معین باشد. تابع را، دراین حوزه، صعودی (یا نزولی) گوییم، که برای هرزوج دلخواه متعلق به‌مقدارهای آن:

از $x'>x$ نتیجه شود: $f(x')>f(x)$ [یا $f(x')<f(x)$]

واگر

از $x'>x$ نتیجه شود: $f(x')\geqslant f(x)$ [یا $f(x')\leqslant f(x)$]

آن وقت، تابع را غیرنزولی (یاغیرصعودی) گویند. گاهی، مناسب تراست که دراین‌حالت هم، تابع را صعودی (یا نزولی) ـ منتها درمعنای وسیع خود ـ بنامیم.

همهٔ تابع‌های ازاین نوع را، به طورکلی، تابع‌های یکنوا، می گوییم، برای تابع یکنوا هم، شبیه واریانت یکنوا [۳۴]، قضیه‌ای را ثابت می کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ صعودی یکنوا ـ ولو به‌معنای‌وسیع خود ـ درحوزهٔ $\mathfrak{X}$ و دارای نقطهٔ تجمع عدد a بزرگتراز همهٔ مقدارهای x باشد (a می‌تواند متناهی، یا برابر $+\infty$ باشد). اگرتابع، ضمناً، ازبالا کران‌دار باشد:

$$f(x)\leqslant M \qquad (\text{برای همهٔ } x\text{ها از } \mathfrak{X})$$

آن‌گاه، وقتی $x\to a$، تابع دارای حد متناهی است، ودرحالت خلاف، به‌سمت $+\infty$

میل می‌کند.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم که تابع از بالا کران‌دار باشد، یعنی مجموعهٔ $\{f(x)\}$ مقدارهای تابع، نظیر مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، از بالا محدود باشد. دراین صورت، برای این مجموعه، مرز بالای متناهی A (یا کران بالای دقیق متناهی) وجود دارد [۱۱]. ثابت می‌کنیم که همین عدد A، حد مطلوب است.

اگر عدد دلخواه $\varepsilon>0$ مفروض باشد، بنابرویژگی مرز بالا، می‌توان چنان‌مقدار $x'<a$ را پیدا کرد که به‌ازای آن داشته باشیم: $f(x')>A-\varepsilon$. باتوجه به‌یکنوائی تابع، برای $x>x'$، داریم: $f(x)>f(x')>A-\varepsilon$. از طرف دیگر، چون همواره $f(x)\leqslant A<A+\varepsilon$، بنابراین، برای این مقدارهای x، نابرابری زیر برقرار است:

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

و این، حکم ما را ثابت می‌کند؛ تنها کافی است، درحالت متناهی بودن a، فرض کنیم $x'=a-\delta$ (یعنی $\delta=a-x'$) و درحالت نامتناهی بودن a، فرض کنیم $x'=\Delta$.

اگر تابع $f(x)$ ازبالا کران‌دار نباشد، هرچه باشد عدد E، می‌توان چنان‌مقداری برای x' پیدا کرد که $f(x')>E$ وآن‌گاه، به‌ازای $x>x'$، به‌طور مسلم، $f(x)>E$ و همین‌طور تا آخر.

حالتی را که در آن، مقدار حدی a، از همهٔ مقدارهای x کوچکتر است، همچنین، حالتی را که با تابع نزولی یکنوا سروکار داریم، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

به‌سادگی دیده می‌شود که قضیهٔ مربوط به واریانت یکنوا [۳۴]، حالت خاص و ساده‌ای از این قضیه است. درآن‌جا، متغیر مستقل، عبارت بود از n، با حوزهٔ تغییر $\mathfrak{N}=\{n\}$، یعنی دنبالهٔ عددهای طبیعی، با نقطهٔ تجمع $+\infty$.

از این به‌بعد، برای حوزهٔ $\mathfrak{X}$، که تابع $f(x)$ در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد، غالباً با بازهٔ پر $[a',a]$ برخوردمی‌کنیم، که‌درآن، $a'<a$ و a، عددی متناهی یا $+\infty$ است، یا با بازه $(a',a]$، که درآن $a'>a$ و a عددی متناهی یا $-\infty$ است.

۵۸. معیاریانشانه‌کلی بولزانو-کوشی. حالا به بررسی حالت‌کلی می‌پردازیم، که تابع $f(x)$ درحوزهٔ $\mathfrak{X}=\{x\}$ داده شده‌است و، به‌ازای‌آن، a نقطهٔ تجمع تابع‌است. برای وجود حد متناهی این تابع، وقتی‌که x به‌سمت a میل می‌کند، می‌توان ازهمان‌معیار حالت واریانت [۳۹] استفاده‌کرد. ما هر دو حالت را (وقتی‌که a متناهی باشد ووقتی‌که $a=+\infty$)، درکنارهم می‌آوریم.

قضیه. برای این‌که تابع $f(x)$، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، دارای حدی

متناهی باشد، لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ ($\Delta>0$) وجود داشته باشد که نابرابری

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

تنها باتوجه به‌شرطهای زیر برقرار باشد:

$$|x-a|<\delta\ ,\ |x'-a|<\delta \qquad (x>\Delta\ ,\ x'>\Delta)$$

اثبات. اثبات را برای حالتی می‌دهیم که a، متناهی باشد.

لزوم شرط. فرض کنیم، حدمتناهی وجود داشته باشد

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

دراین‌صورت، با مفروض بودن $\varepsilon>0$، می‌توان $\delta>0$ را پیدا کرد که نابرابری

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

تنها باشرط $|x-a|<\delta$ برقرار باشد، حالا فرض کنید، ضمناً، $|x'-a|<\delta$، به‌نحوی که

$$|A-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$|f(x)-f(x')|=|[f(x)-A]+[A-f(x')]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-A|+|A-f(x')|<\varepsilon$$

با این شرط قبلی که به‌طور هم‌زمان داشته باشیم:

$$|x-a|<\delta \text{ و } |x'-a|<\delta$$

کافی‌بودن‌شرط را می‌توان، کاملاً شبیه آن چه درحالت واریانت‌ها دیده‌ایم [۳۹]، ثابت کرد. ولی ساده‌تر این است که ازتکرار این بحث‌ها بگذریم و مطلب را به‌آن چه بررسی کرده‌ایم، بکشانیم. راه این‌استدلال را، تعریف دوم مفهوم حد تابع «به‌زبان‌دنباله‌ها» [۵۳] می‌گشاید.

ضمناً فرض می‌کنیم، شرطهای موجود درقضیه، برقرار باشند و از روی $\varepsilon>0$ دلخواه، $\delta>0$ نظیر آن، معین شده باشد.

اگر $\{x_n\}$، دنبالهٔ دلخواه مقدارهای x از $\mathfrak{M}$، متقارب به a، باشد، آن‌گاه، بنا به‌تعریف

حد دنباله، چنان شماره‌ای برای N پیدا می‌شود که برای $n>N$ داشته باشیم $|x_n-a|<\delta$ در کنار n، شمارهٔ دیگر $n'>N$ را انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم:

$$|x_n-a|<\delta\,,\qquad |x_{n'}-a|<\delta$$

در این صورت، بنابر خود انتخاب δ

$$|f(x_n)-f(x_{n'})|<\varepsilon$$

به‌این ترتیب، این نابرابری، تنها با یك شرط برقرار است و آن این که شماره‌های n و n'، هر دو، بزرگتر از N باشند. و این، به‌معنای آن است که، برای واریانت $f(x_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ شرط ۳۹ برقرار است و، بنابراین، دنبالهٔ

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

دارای حد متناهی است.

در ۵۳ دیدیم (یادداشت آخر را ببینید) که همین کافی است تا حد اخیر، حد منحصر به فرد دنبالهٔ $\{x_n\}$، متقارب به a، باشد؛ این حد، حد تابع هم خواهد بود، که وجود آن را می‌خواستیم ثابت کنیم.

[کافی بودن شرط فوق را، به‌سادگی و از قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس هم، شبیه آن‌چه در آخر ۴۱ برای واریانت گفته‌ایم، می‌توان نتیجه گرفت].

۵۹. بزرگترین و کوچکترین حد تابع. حتی اگر $f(x)$، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، حد معینی نداشته باشد، برای دنباله‌های جداگانه مقدارهای $x_n\to a$، حد

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

ممکن است وجود داشته باشد. چنین حدی را حد جزئی تابع گویند.

مثلاً، برای تابع $\sin x$، وقتی $x\to\pm\infty$ (یا برای $\sin\frac{1}{x}$، وقتی $x\to 0$)، این حدهای جزئی، تمامی بازهٔ از -1 تا $+1$ را پر می‌کنند.

بین حدهای جزئی تابع، همواره یك بزرگترین و یك کوچکترین پیدا می‌شود، که آن‌ها را، به‌این ترتیب، نشان می‌دهند:

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) \quad\text{و}\quad \underline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

برابری بزرگترین و کوچکترین حد، شرط لازم و کافی برای وجود حد معین تابع، به‌معنای

عادی آن، می‌باشد.

این قضیه را، بدون اثبات آن آوردیم، چرا که ترتیب اثبات، همان است که در ۴۲ آورده بودیم.

§۳. طبقه‌بندی کمیت‌های بی‌نهایت کوچک و کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ

۶۰. مقایسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها. فرض کنید، در یک بررسی، به‌طور هم‌زمان، کمیت‌های بی‌نهایت کوچک زیر، در نظر گرفته شده باشند:

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

که، به‌طور کلی، تابعی از یک متغیر x، که به‌سمت حدمتناهی یا نامتناهی a میل می‌کند، باشند.

در بسیاری موردها، مقایسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها با یکدیگر، از روی خصوصیت نزدیک‌شدن آن‌ها به‌صفر، اهمیت پیدا می‌کند. اساس مقایسهٔ دو بی‌نهایت کوچک α و β، رفتار نسبت آن‌هاست.* به‌این مناسبت، دو قرار می‌گذاریم:

I. اگر نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ (وهمراه با آن، نسبت $\frac{\alpha}{\beta}$)، حدی متناهی ومخالف‌صفر داشته‌باشد، بی‌نهایت‌کوچک‌های α و β را، کمیت‌های هم‌مرتبه به‌حساب می‌آوریم.

II. اگر خود نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$، یک بی‌نهایت‌کوچک (و نسبت عکس $\frac{\alpha}{\beta}$ یک بی‌نهایت بزرگ) باشد، آن‌گاه بی‌نهایت کوچک β، کمیت مرتبهٔ بالاتر از بی‌نهایت کوچک α، به‌حساب می‌آید و، درعین‌حال، بی‌نهایت کوچک α، مرتبه‌ای پایین‌تر از بی‌نهایت کوچک β دارد.

مثلاً، اگر $x = \alpha \to 0$، آن‌گاه، بی‌نهایت کوچک‌های هم‌مرتبه با آن، عبارت خواهند بود از

$$\sin x, \quad tg\, x, \quad \sqrt[m]{1+x}-1$$

زیرا، به‌طوری که می‌دانیم [(۷،۵۴) و (۳،۵۶)]:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{m}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

*) فرض را براین می‌گذاریم که متغیر مخرج، دست‌کم برای مقدارهایی از x که به‌قدر کافی به a نزدیکند، به‌سمت ۰ میل نکند.

برعکس، بی‌نهایت کوچک‌های

$$\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m},\quad 1-\cos x,\quad \operatorname{tg}x-\sin x \qquad (1)$$

از مرتبه‌ای بالاتر از x هستند [۵۶، ۴)؛ ۵)، الف) و ب)]

مسلماً، ممکن است پیش آید که نسبت دو بی‌نهایت کوچک، به سمت هیچ حدی میل نکند. مثلاً، اگر فرض کنیم [۵۴، ۹) و ۱۰) را ببینید]:

$$\alpha=x \qquad \text{و} \qquad \beta=x\sin\frac{1}{x}$$

در آن‌صورت، نسبت آن‌ها، برابر $\sin\frac{1}{x}$ می‌شود که وقتی $x\to 0$، حدی ندارد. در چنین حالتی، می‌گویند که دو بی‌نهایت کوچک، مقایسه‌پذیر نیستند.

یادآوری می‌کنیم که، اگر بی‌نهایت کوچک β، از مرتبه‌ای بالاتر از بی‌نهایت کوچک α باشد، آن‌گاه، این حقیقت را، به‌این‌ترتیب، نشان می‌دهند:

$$\beta=o(\alpha)$$

مثلاً می‌توان نوشت:

$$1-\cos x=o(x),\qquad \operatorname{tg}x-\sin x=o(x),\ldots$$

به‌این‌ترتیب، نماد $o(\alpha)$، نمایش کلی، برای بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ بالاتر از α است. این نمایش مناسب را، در آینده، مورد استفاده قرار خواهیم داد.

۶۱. مقیاس بی‌نهایت کوچک‌ها. هنوز، به خصلت مقایسه‌ای دقیق‌تری برای بیان رفتار بی‌نهایت کوچک‌ها، و به‌بیان مرتبهٔ آن‌ها به‌وسیلهٔ عددها نیاز داریم. برای این‌منظور، قبل‌ازهمه، یکی‌از بی‌نهایت کوچک‌هایی را که در بررسی موردنظر شرکت دارند، به‌عنوان «معیاری» ازجنس خود آن‌ها، انتخاب می‌کنند (مثلاً α)، و آن را بی‌نهایت‌کوچک‌اصلی می‌نامند. روشن است که انتخاب بی‌نهایت کوچک‌اصلی، اختیاری است، ولی معمولاً، ساده‌ترین همه را، برمی‌گزینند. اگر کمیت‌های موردنظر، همان‌طور که درنظر گرفته‌ایم، تابع‌هایی از x باشند و، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، بی‌نهایت کوچک بشوند، در آن‌صورت، بسته به‌این‌که a صفر باشد، یا عددی متناهی و مخالف صفر، یا بی‌نهایت؛ طبیعی است که برای بی‌نهایت کوچک اصلی، به‌ترتیب، انتخاب شود:

$$x,\qquad x-a,\qquad \frac{1}{x}$$

بالاخره، از توان‌های بی‌نهایت کوچك اصلی α ($\alpha>0$ به‌حساب می‌آوریم)، با نماهای مثبت مختلف، α^k، می‌توان مقیاس‌هایی، برای ارزیابی بی‌نهایت کوچك‌هایی با طبیعت بغرنج‌تر، استفاده کرد.*

III. بی‌نهایت‌کوچك β را، از مرتبهٔ k ام به‌حساب می‌آوریم (نسبت به‌بی‌نهایت کوچك اصلی α)، به‌شرطی‌که β و α^k ($k>0$)، دو بی‌نهایت‌کوچك هم‌مرتبه باشند، یعنی، به‌شرطی‌که نسبت $\frac{\beta}{\alpha^k}$، حدی متناهی ومخالف صفر داشته باشد.

حالا، مثلاً، می‌توان به‌این‌حکم اکتفا نکرد که بی‌نهایت‌کوچك‌های (۱) (وقتی $x\to 0$)، بی‌نهایت کوچك‌هایی، ازمرتبهٔ بالاتراز x $\alpha=x$ هستند. می‌توان، حکم‌را دقیق‌تر کرد و گفت: دو بی‌نهایت کوچك اولی، ازمرتبهٔ دوم و آخری ازمرتبهٔ سوم، نسبت به‌$\alpha=x$ هستند، زیرا [۵۶، ۴)؛ ۵)، الف) وب)]:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{1}{m}x}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$$

برای این‌که مثال بغرنج‌تری را بیاوریم، این‌عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$\beta=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}$$

این عبارت، وقتی $x\to+\infty$، یك بی‌نهایت‌کوچك است، که اگر به‌صورت‌زیر نوشته شود، روشن می‌شود:

$$\beta=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

با ادامهٔ این تبدیل، نتیجه می‌شود:

$$\beta=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=$$

$$=\frac{-2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$

*) به‌سادگی دیده می‌شود که برای $k>0$، کمیت α^k، همزمان با α، یك بی‌نهایت‌کوچك است.

که با فرض $\alpha=\frac{۱}{x}$، به‌سادگی معلوم می‌شود که*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{\alpha^{\frac{۳}{۲}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲(\sqrt{x})^{۳}}{(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-۱})(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۱})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲}{\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱\right)\left(۱+\sqrt{۱-\frac{۱}{x}}\right)\left(\sqrt{۱-\frac{۱}{x}}+\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}\right)}=-\frac{۱}{۴}$$

به‌این‌ترتیب، در این‌جا، مرتبهٔ بی‌نهایت کوچک، باعدد $\frac{۳}{۲}$ بیان می‌شود.

روشن است که نباید گمان کرد که برای هر بی‌نهایت کوچک β (ولو این‌که، با همهٔ مرتبه‌های α^n مقایسه شود)، می‌توان به‌مرتبهٔ مشخصی رسید.

جالب‌ترین مثال‌ها را، در این مورد، می‌توان از رابطه‌هایی که در **۵۴**، ۴) و ۵) آورده‌ایم، پیدا کرد (به‌ازای $a>۱$ و $k>۰$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=۰ \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty, \qquad (۲)$$

از این‌جا، قبل‌ازهمه، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\log_a x}=\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=۰,$$

حالا، x را به $\frac{۱}{x}$ تغییرمی‌دهیم وهمچنین، درنخستین این رابطه‌ها، فرض می‌کنیم $a=\frac{۱}{c}$، $۰<c<۱$، به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+۰}\frac{\frac{۱}{\log_a x}}{x^k}=\infty \qquad \lim_{x\to+۰}\frac{c^{\frac{۱}{x}}}{x^k}=۰,$$

---

*) دراین‌جا، همه‌جا از رابطهٔ $\lim_{z\to۰}\sqrt{۱+z}=۱$ استفاده کرده‌ایم؛ این حکم، در **۵۶**، ۳) (برای ریشهٔ دلخواه mام) ثابت شده است.

به‌این‌ترتیب، بی‌نهایت کوچك $c^{\frac{1}{x}}$ $(0<c<1)$، مرتبه‌ای بالاتر از هر درجه x^k $(k>0)$ دارد، و بی‌نهایت کوچك $\frac{1}{\log_a x}$ $(a>1)$، از مرتبه‌ای پایین‌تر از همهٔ این درجه‌ها می‌شود.

۶۲. بی‌نهایت کوچك‌های هم‌ارز. حالا، به‌یکی از حالت‌های خاص ومهم بی‌نهایت کوچك‌های هم‌مرتبه، اشاره می‌کنیم.

IV. بی‌نهایت‌کوچك‌های α و β را هم‌ارز (با علامت $\alpha\sim\beta$) می‌نامیم، اگرتفاضل آن‌ها، $\gamma=\beta-\alpha$، کمیتی با مرتبهٔ بیشتر از هرکدام ازبی‌نهایت‌کوچك‌های α و β باشد:

$$\gamma=o(\alpha),\qquad \gamma=o(\beta)$$

البته، کافی است که γ، نسبت به‌یکی ازاین بی‌نهایت‌کوچك‌ها، از مرتبهٔ بالاتر باشد؛ زیرا اگر مثلاً، γ از مرتبه‌ای بیشتر از α باشد، حتماً نسبت بـه β هم، از مرتبهٔ بالاتری خواهد بود. درواقع، از $\frac{\gamma}{\alpha}=0$ حد، نتیجه می‌شود که

$$\text{حد}\frac{\gamma}{\beta}=\text{حد}\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}=\text{حد}\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}}=0$$

دو بی‌نهایت‌کوچك هم‌ارز α و β را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی‌که $\beta=\alpha+\gamma$، که درآن $\gamma=o(\alpha)$. اگر به‌تقریب فرض‌کنیم $\beta=\alpha$*، آن‌وقت، با کوچك‌شدن هر دو کمیت، نه‌تنها خطای مطلق این تعویض، که به‌صورت کمیت $|\gamma|$ است، بلکه حتی خطای نسبی که برابر $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$ است، به‌سمت‌صفرمیل‌می‌کند. به‌زبان دیگر، به‌ازای‌مقدارهای به قدرکافی کوچك α و β، می‌توان با دقت نسبی به دلخواه بالایی، $\beta=\alpha$ فرض کرد. برهمین اساس، در برآوردهای تقریبی، بی‌نهایت‌کوچك‌های مرکب‌تر را، با هم ارزهای ساده‌تر خود، عوض می‌کنند.

معیار سودمندی برای هم‌ارزی دو بی‌نهایت‌کوچك را ثابت می‌کنیم که، درواقع، تعریف دوم، این مفهوم را به‌دست می‌دهد، تعریفی‌که با تعریف قبلی هم‌ارز است:

برای این‌که دو بی‌نهایت‌کوچك α و β هم‌ارز باشند، لازم وکافی است‌که

$$\text{حد}\frac{\beta}{\alpha}=1$$

---

*) نشانه $\doteq$، برابری تقریبی را نشان می‌دهد.

ابتدا، فرض می‌کنیم، این رابطه برقرار باشد، به‌نحوی که

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha} - ۱ \to ۰$$

در این صورت

$$\gamma = \beta - \alpha = \delta \cdot \alpha$$

بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از α خواهد بود، زیرا

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \delta \to ۰$$

حالا، برعکس، فرض می‌کنیم که α و β هم‌ارز هستند، یعنی $\gamma = \beta - \alpha$، بی‌نهایت کوچکی ازمرتبهٔ بالاتر از α است. در نتیجه داریم:

$$\frac{\beta}{\alpha} - ۱ = \frac{\gamma}{\alpha} \to ۰ \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \to ۱$$

چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به کمك این معیار، مثلاً، مستقیماً دیده می‌شود که به‌ازای $x \to ۰$، بی‌نهایت کوچك‌های $sinx$ و tgx هم‌ارز x، و بی‌نهایت کوچك $\sqrt[m]{۱+x} - ۱$، هم‌ارز $\frac{۱}{m}x$ است.

از این‌جا، دستورهای تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$sinx \doteq x, \quad tgx \doteq x, \quad \sqrt[m]{۱+x} - ۱ \doteq \frac{۱}{m}x,$$

و درحالت خاص

$$\sqrt{۱+x} - ۱ \doteq \frac{۱}{۲}x$$

خاصیتی را که برای بی‌نهایت کوچك‌های هم‌ارز ثابت کردیم، می‌توان برای رفع ابهام صورت $\frac{۰}{۰}$، یعنی برای تعیین حدنسبت دو بی‌نهایت کوچك $\frac{\beta}{\alpha}$، مورد استفاده قرار داد. هرکدام ازبی‌نهایت‌کوچك‌ها را هم می‌توان، با بی‌نهایت‌کوچك‌های هم‌ارز خود عوض‌کرد، بدون این‌که بر وجود یا مقدار حد تاثیری بگذارد.

در واقع، اگر $\overline{\alpha} \sim \alpha$ و $\overline{\beta} \sim \beta$، یعنی

$$\lim \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} = ۱, \qquad \lim \frac{\overline{\beta}}{\beta} = ۱$$

در این صورت، نسبت

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\bar{\beta}}\cdot\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

با نسبت $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ در ضریب‌هایی اختلاف دارد که به‌سمت واحد میل می‌کنند و، بنابراین، هم‌زمان با آن، دارای حد است (وضمناً، همان حد).

اگر ممکن باشد که $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ را، به‌قدر کافی، ساده انتخاب کنیم، این انتخاب می‌تواند، به‌طور قابل ملاحظه‌ای، حل مساله را، ساده کند. مثلاً

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}$$

از آن چه گفته شد، این نتیجه هم به‌دست می‌آید که: دو بی نهایت‌کوچك هم‌ارز با سومی، خودشان با یکدیگر هم‌ارزند.

۶۳. جداکردن بخش اصلی. اگر α، بی‌نهایت کوچك اصلی باشد، به‌طور طبیعی، ساده‌ترین بی‌نهایت کوچك، به‌صورت $c.\alpha^k$ خواهد بود، که در آن، c ضریبی ثابت و $k>0$ است. فرض کنیم، بی‌نهایت‌کوچك β، نسبت به α، از مرتبهٔ kام باشد، یعنی

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c$$

که در آن، c عددی متناهی ومخالف صفر است. آن گاه

$$\lim\frac{\beta}{c.\alpha^k}=1$$

و دو بی‌نهایت کوچك β و $c\alpha^k$ هم‌ارزهستند. $\beta\sim c\alpha^k$.

این ساده‌ترین بی‌نهایت‌کوچك $c.\alpha^k$ را ـ که هم‌ارز بی‌نهایت‌کوچك مفروض β است ـ بخش اصلی (یا جزء اصلی) β نامند.

با استفاده از نتیجه‌گیری‌های فوق، علاوه برمثال‌هایی که دیدیم، می‌توان به سادگی بخش اصلی عبارت‌های زیر را تشخیص داد:

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$

دراین جا $x\to 0$ و $\alpha = x$، بی‌نهایت کوچک اصلی است.

بالاخره، وقتی $x\to +\infty$ و بی‌نهایت کوچک اصلی را $\alpha=\frac{1}{x}$ انتخاب کرده باشیم، داریم:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\sim -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

همهٔ این نتیجه‌ها، منجر به رابطه‌های تقریبی می‌شوند.

فرض کنید $\beta\sim c\alpha^k$، یعنی $\beta = c\alpha^k+\gamma$، که در آن $\gamma = o(\alpha^k)$. ممکن است بخواهیم دوباره از بی‌نهایت کوچک γ، بخش اصلی را جدا کنیم: $\gamma = c'\alpha^{k'}+\delta$، که در آن $k'>k$ و $\delta = o(\alpha^{k'})$ وغیره.

مثلاً (با فرض $x\to 0$) اگر فرض کنیم:

$$\sqrt[m]{1+x}-1=\frac{1}{m}x+\gamma$$

در این صورت، همان‌طور که داشتیم [۴، ۵۶]:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\gamma}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2}$$

به نحوی که بخش اصلی γ عبارت است از: $-\frac{m-1}{2m^2}x^2$. از آن‌جا

$$\sqrt[m]{1+x}-1=\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2+o(x^2)$$

و درحالت خاص

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

این روند را می‌توان ادامه داد و پشت سرهم، بی‌نهایت کوچک‌های مرتبهٔ بالاتر را، ازساده‌ترین شکل بی‌نهایت کوچک، جدا کرد.

در این بخش، به‌طرح مفهوم‌های کلی، با ذکر چند مثال، اکتفا کردیم. در آینده، به این موضوع برخواهیم گشت [شماره‌های ۱۰۴ و ۱۲۴ را ببینید]، و راه‌های مشخصی را، چه برای ساختن بخش اصلی کمیت بی‌نهایت کوچک مفروض وچه برای پیدا کردن ساده‌ترین

نوع بی‌نهایت کوچک‌های بعدی، نشان خواهیم داد.

در پایان، روی این پرسش هم تامل می‌کنیم: اگر بخش‌های اصلی دو بی‌نهایت کوچک β و γ، برابر $c\alpha^k$ و $c'\alpha^{k'}$ باشند، دربارهٔ بخش اصلی مجموع آن‌ها، $\beta+\gamma$، چه می‌توان گفت؟

در حالت $k\neq k'$، روشن است که جملهٔ اصلی مجموع، عبارت از آن جمله ازمیان جمله‌های $c\alpha^k$ و $c'\alpha^{k'}$ است، که نمای کوچکتری دارد. حالا، فرض کنید $k=k'$، دراین حالت، بخش اصلی $\beta+\gamma$ عبارت است از $(c+c')\alpha^k$، با شرط $c+c'\neq 0$. درحالتی که دو بخش اصلی، قرینهٔ یکدیگرند، $\alpha+\beta$، بی‌نهایت کوچکی با مرتبهٔ بالاتر از هرکدام ازدو جملهٔ جمع می‌شود.

مثلاً، درمورد، دو بی‌نهایت کوچک زیر، این وضع پیش می‌آید:

$$\beta=\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x\ ,\ \gamma=\sqrt{1-x}-1\sim-\frac{1}{2}x$$

که اگردرهرکدام ازآن‌ها، جمله‌های بعدی را پیدا کنیم، داریم:

$$\beta=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\ ,\ \gamma=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

وهمان‌طورکه می‌بینیم، $\beta+\gamma$، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ دوم، با جملهٔ اصلی $-\frac{1}{4}x^2$ است.

۶۴. مساله‌ها. برای این‌که، آن چه گفته‌ایم، روشن‌ترشود، چند مساله می‌آوریم، که درآن‌ها، ملاحظه‌های مذکور، مورد استفاده قرارگیرد.

۱) فرض کنید فاصلهٔ مستقیم‌الخطی را در محل، به‌کمک میلهٔ اندازه‌گیری به‌طول l، اندازهٔ گرفته باشیم. ازآن جاکه، در عمل، میله را نمی‌توان با دقت، درطول خط راست موردنظر، جابه‌جاکرد، نتیجهٔ اندازه‌گیری، کمی بیشتر از طول واقعی می‌شود، فرض کنیم که میلهٔ اندازه‌گیری، به‌صورت زیگزاگ عمل کند، یعنی انتهای آن، به‌نوبت، دریک‌طرف وسپس درطرف دیگرخط راست قرارگیرد، به‌نحوی که هر بار، انتهای میله، به‌فاصلهٔ λ متر ازخط راست باشد (شکل ۲۵). مطلوب است برآورد خطا

شکل ۲۵

برای یک بار نقل میله، خطای مطلق برابراست با تفاضل بین طول l وطول تصویر

آن برخط راست مورد اندازه‌گیری؛ این تصویر برابراست با

$$۲\sqrt{\left(\frac{l}{۲}\right)^۲-\lambda^۲}=l\sqrt{۱-\frac{۴\lambda^۲}{l^۲}}$$

که با استفاده از رابطهٔ تقریبی

$$\sqrt{۱+x}=۱+\frac{۱}{۲}x$$

به‌ازای $x=-\frac{۴\lambda^۲}{l^۲}$ (که، با توجه به‌کوچکی کمیت λ نسبت به l، قابل قبول است)، عبارت مربوط به‌تصویر، به‌این صورت درمی‌آید:

$$l\left(۱-\frac{۲\lambda^۲}{l^۲}\right)=l-\frac{۲\lambda^۲}{l}$$

در این حالت، خطای مطلق برابر $\frac{۲\lambda^۲}{l}$ است و، روشن است، که خطای نسبی $\frac{۲\lambda^۲}{l^۲}$ می‌شود. مقدارخطای نسبی، با چندبارانتقال میلهٔ اندازه‌گیری هم، ثابت می‌ماند.

اگر برای این خطای نسبی، مرز δ را درنظربگیریم، باید داشته باشیم $\frac{۲\lambda^۲}{l^۲}<\delta$ و ازآن جا $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{۲}}$.

مثلاً، اگراندازه‌گیری را با میلهٔ دومتری ($l=۲$) انجام داده باشیم، برای این‌که به دقت نسبی ۰/۰۰۱ برسیم، کافی است، انحراف λ، از $۲\sqrt{۰/۰۰۰۵}$، یعنی ۰/۰۴۵ متر (۴/۵ سانتیمتر) تجاوز نکند.

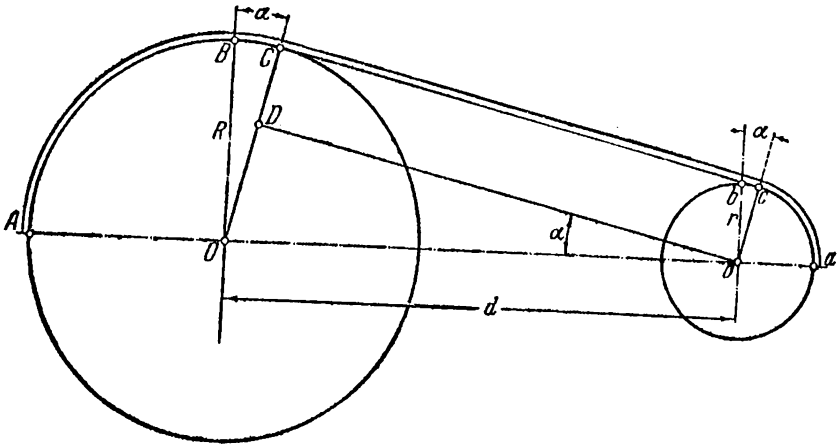
۲) مطلوب‌است تعیین‌دستوری برای طول l، تسمهٔ بازی‌که بردوقرقره به‌شعاع‌های R و r و با فاصلهٔ خطالمرکزین d، می‌گذرد (شکل ۲۶).

با توجه به‌شکل داریم:

$$\frac{l}{۲}=\widehat{AC}+Cc+\widehat{ca}$$

ولی

$$\widehat{AC}=R\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right),\quad \widehat{ca}=r\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)$$



شکل ۲۶

که در آن، α عبارت است از مقدار هر یك از دو زاویهٔ برابر BOC و boc؛ از مثلث ODo داریم:

$$Cc = Do = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$$

بنا بر این

$$l = \pi(R+r) + 2\pi(R-r) + 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2}$$

برای ساده‌ترشدن این رابطه، به‌یاد می‌آوریم که

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{OD}{Oo} = \frac{R-r}{d}$$

با توجه به این نکته، که $R-r$ نسبت به d، کوچك است. با همان فرض

$$\sqrt{d^2 - (R-r)^2} = d\sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{d}\right)^2} \doteq d\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right]$$

بعد از گذاشتن این مقدارها، در رابطهٔ مربوط به l، نتیجه می‌شود:

$$l \doteq \pi(R+r) + 2d + \frac{(R-r)^2}{d}$$

۳) برای تقسیم قوسی از دایره درمحل، این مساله مورد پیدا می‌کند: مطلوب‌است

محاسبهٔ نسبت سهم $f = DB$ از کمان ABC دایره، به سهم $f_1 = D_1B_1$ از نیمهٔ این کمان یعنی، AB_1B (شکل ۲۷).

اگر شعاع دایره را r و $\widehat{AOB} = \varphi$ بگیریم، آن گاه $\widehat{AOB_1} = \frac{\varphi}{2}$ و

$$f = DB = r(1 - \cos\varphi)$$

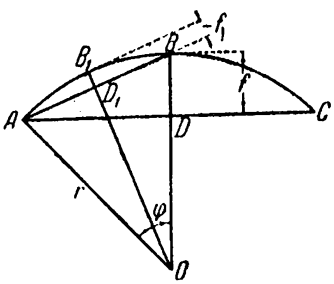
$$f_1 = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

به‌این ترتیب، نسبت مطلوب، برابر است با

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}}$$

این نسبت، برای استفادهٔ درعمل، تا حدی بغرنج است، حد آن را، وقتی که $\varphi \to 0$، پیدا می‌کنیم (وقتی، φ به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، می‌توان عبارت را، به‌طور تقریبی، با حد آن عوض کرد). برای این منظور، به‌جای صورت و مخرج، بخش‌های اصلی آن را قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2} = 4$$



شکل ۲۷

به این ترتیب، اگر با کمانی سروکار داشته باشیم، که زاویهٔ مرکزی آن خیلی بزرگ نباشد، به طور تقریبی، می‌توان گفت که: سهم نیمهٔ کمان، یک چهارم سهم خود کمان است، و این مطلب، امکان می‌دهد که بتوانیم، برای کمان‌هایی که انتها و وسط آن‌ها داده شده است، پشت سرهم، نقطه‌های بینابینی را پیدا کنیم.

۶۵. طبقه‌بندی بی‌نهایت بزرگ‌ها. در مورد کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ هم، می‌توان طبقه‌بندی مشابهی درنظر گرفت. همان‌طور که در شمارهٔ ۶۰ هم دیدیم، فرض را براین می‌گذاریم که کمیت‌های بی‌نهایت بزرگ، تابعی از

یك متغیر x هستند که، وقتی x به‌سمت a میل کند، به‌سمت $+\infty$ میل می‌کنند.

I. دو بی‌نهایت بزرگ y و z را، کمیت‌های هم مرتبه به حساب می‌آورند، اگر نسبت آن‌ها $\frac{z}{y}$ (وهمراه با آن، $\frac{y}{z}$)، حدی متناهی ومخالف صفر داشته باشد.

II. اگر نسبت $\frac{z}{y}$، خود بی‌نهایت بزرگ باشد (نسبت عکس آن $\frac{y}{z}$، بی‌نهایت کوچك است)، آن‌گاه، z بی‌نهایت بزرگی ازمرتبهٔ بالاتر ازی y است و، درعین حال، y بی‌نهایت بزرگی، با مرتبهٔ پایین‌تر از z است.

درحالتی که نسبت $\frac{z}{y}$، به سمت هیچ حدی میل نمی‌کند، بی‌نهایت بزرگ‌های y و z، مقایسه‌ناپذیر هستند.

برای بررسی هم‌زمان چند بی‌نهایت بزرگ، یکی ازآن‌ها (مثلاً y) را، به‌عنوان بی‌نهایت بزرگ اصلی انتخاب، و سایر بی‌نهایت بزرگ‌ها را، با آن مقایسه می‌کنند: و این به شرطی است که همهٔ آن‌ها تابعی از x باشند و، وقتی $x\to a$، به‌سمت $+\infty$ میل کنند. در این صورت، اگر $a=\pm\infty$ باشد، $|x|$ و اگر a مقداری محدود باشد $\frac{1}{|x-a|}$ را، به‌عنوان بی‌نهایت بزرگ اصلی می‌گیرند.

III. بی‌نهایت بزرگ z، کمیتی ازمرتبهٔ k (نسبت به‌بی‌نهایت بزرگ اصلی y) نامیده می‌شود، به شرطی که z و y^k هم مرتبه باشند، یعنی نسبت $\frac{z}{y^k}$، دارای حدی متناهی و مخالف صفر باشد.

دراین‌جا لازم نیست، به ذکرمثال بپردازیم. اگر درمثال‌های مربوط به بی‌نهایت کوچك‌ها، عکس آن‌ها را درنظر بگیریم، مثال‌هایی دربارهٔ بی‌نهایت بزرگ‌ها به‌دست می‌آید. تنها یادآورمی‌شویم که بی‌نهایت بزرگ $a^x(a>1)$، وقتی $x\to+\infty$، ازمرتبهٔ بالاتر، وبی‌نهایت بزرگ $\log_a x(a>1)$، از مرتبهٔ پایین‌تر نسبت به x^k (با نمای مثبت k) می‌باشد، و این مطلب، از رابطهٔ (۲)، ۶۱، نتیجه می‌شود.

§۴. پیوستگی (وناپیوستگی) تابع‌ها

۶۶. تعریف پیوستگی تابع دریك نقطه. مفهوم پیوستگی تابع‌ها . که یکی دیگر از مفهوم‌های مهم آنالیز ریاضی است، با مفهوم حد تابع، ارتباط نزدیکی دارد.

تابع $f(x)$ را، که درحوزهٔ $\mathscr{D}=\{x\}$ معین است، درنظر می‌گیریم. x_0 را نقطهٔ تجمع این تابع می‌گیریم وفرض می‌کنیم که خود نقطهٔ x_0 هم، به‌حوزهٔ تعریف تابع، تعلق داشته باشد، به‌نحوی که دراین‌نقطه، مقدار معین $f(x_0)$ را برای تابع، داشته باشیم.

وقتی مفهوم حد تابع را، ضمن میل x به x_0، بررسی می‌کردیم [۵۲ و ۵۳]

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

بارها خاطرنشان کردیم که متغیر x، مقدار x_0 را اختیار نمی‌کند، این مقدار، حتی می‌تواند به حوزهٔ تعریف تابع، تعلق نداشته باشد. در حالتی هم که x_0 به حوزهٔ تعریف تابع تعلق دارد، مقدار $f(x_0)$، درتشکیل حد نامبرده، دخالتی ندارد.

با وجود این، حالت

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (۱)$$

اهمیت خاصی دارد. گویند تابع $f(x)$، به‌ازای $x=x_0$ (یا درنقطهٔ $x=x_0$) پیوسته است، اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد؛ و درحالتی که این رابطه برقرار نباشد، گویند که تابع به‌ازای این مقدار (یا دراین نقطه) ناپیوسته (منفصل) است*.

روشن است که، درحالت پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 (و تنها دراین حالت)، برای محاسبهٔ حد تابع $f(x)$، وقتی $x\to x_0$، بی‌تفاوت است که x را، ضمن میل خود به x_0، به‌خصوص، مقدار x_0 را اختیار کند یا نه!

پیوستگی تابع را، به‌زبان دیگری هم، می‌توان تعریف کرد. عبور ازمقدار x_0، به مقداردیگری از x را می‌توان، به‌این ترتیب، تصور کرد: به‌مقدار x_0 نمو $\Delta x_0=x-x_0$** را می‌دهیم، تفاوت مقدار جدید تابع، $y=f(x)=f(x_0+\Delta x_0)$، از مقدار قبلی $y_0=f(x_0)$، چنین است (نمو تابع):

---

*) این اصطلاح، با تصورعینی دربارهٔ پیوستگی و گسستگی (انفصال) منحنی ارتباط دارد؛ تابع‌پیوسته‌است، اگرمنحنی نمایش تغییرآن پیوسته‌باشد، ونقطه‌های‌ناپیوستگی تابع، نظیر نقطه‌های‌ناپیوستگی‌نمودارند. ولی، درواقع، مفهوم‌پیوستگی برای‌منحنی، خود نیازبه‌تعریف دارد وساده‌ترین‌راه، آن‌است که ازپیوستگی‌تابع، برای مفهوم پیوستگی منحنی، استفاده‌شود.

**) درآنالیز ریاضی، پذیرفته شده است که نمو کمیت‌های x، y، t،... با Δx، Δy، Δt، ... نشان داده‌شود. این‌علامت‌ها، همچون نمادهایی «یک‌پارچه» درنظرگرفته می‌شوند ونباید Δ و x را جدا ازهم به‌حساب‌آورد.

$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

برای این که تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، پیوسته باشد، لازم و کافی است که نمو Δy_0 آن، با نمو متغیر مستقل، با هم به‌سمت صفر میل کنند. به‌زبان دیگر، پیوستگی تابع، از این جا مشخص می‌شود که نموهای نهایت کوچك آوند، متناظر با نمو بی‌نهایت کوچك تابع باشد.

به تعریف اساسی (۱) برمی‌گردیم و محتوای آن را «به‌زبان ε و δ» [۵۲] باز می‌کنیم. مفهوم پیوستگی تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، به‌بیان زیر منجر می‌شود: عدد $\varepsilon > 0$ هرچه باشد، می‌توان، به‌ازای آن، عدد $\delta > 0$ را پیدا کرد، که

$$|x - x_0| < \delta \text{ موجب نابرابری } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ باشد}$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری اخیر باید در همسایگی به‌قدر کافی کوچك $(x_0 - \delta$ و $x_0 + \delta)$ نقطهٔ x_0 برقرار باشد.

بالاخره «به زبان دنباله‌ها»، پیوستگی به این ترتیب بیان می‌شود: اگر دنباله‌ای از مقدارهای x (که از $\mathfrak{M}$ انتخاب شده است)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

به‌سمت x_0 متقارب باشد، مقدارهای نظیر تابع

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

هم به‌سمت $f(x_0)$ متقارب باشد.

یادداشت. فرض کنیم، نقطهٔ $x = x_0$، نقطهٔ تجمع حوزهٔ $\mathfrak{M}$ (که در آن، تابع $f(x)$ تعریف شده است) به‌خود حوزهٔ $\mathfrak{M}$ تعلق نداشته باشد، به‌نحوی که، تابع در این نقطه، معین نباشد. با وجود این، اگر حد متناهی

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

وجود داشته باشد، کافی است در تعریف تابع، $f(x_0)$ را مساوی این حد بگیریم، تا تابع در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته باشد. این وضع را در آینده، بدیهی به‌حساب خواهیم آورد.

برعکس، اگر چنین حدی وجود نداشته باشد، و لو این که تابع در خود نقطهٔ $x = x_0$ معین نباشد، تابع را در این نقطه ناپیوسته گویند؛ هرمقدار تکمیلی را، در نقطهٔ $x = x_0$، به تابع نسبت دهیم، بازهم تابع در این نقطه ناپیوسته است.

از این بعد، معمولا، تابع‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در بازهٔ $\mathfrak{M}$ معین باشند؛ همهٔ نقطه‌های چنین تابعی، نقطهٔ تجمع آن خواهند بود، به‌نحوی که درمورد هر

نقطهٔ دلخواه آن، بتوان مسالهٔ پیوستگی را مطرح کرد. برای سادگی بیان، قرار می‌گذاریم که: تابعی در بازهٔ $\mathfrak{D}$ پیوسته است که در هر نقطهٔ این بازه، به‌طور جداگانه، پیوسته باشد.

۶۷. عمل‌های حسابی، روی تابع‌های پیوسته. قبل از آن‌که به ذکر مثال دربارهٔ تابع‌های پیوسته بپردازیم، گزارهٔ سادهٔ زیر را ثابت می‌کنیم که، به کمک آن، می‌توان به سادگی، تعداد این تابع‌ها را بیشتر کرد.

قضیه. اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، معین، و هر دو در نقطهٔ x_0 پیوسته باشند، آن‌گاه در همین نقطه، تابع‌های

$$f(x)\pm g(x), \qquad f(x)\cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

نیز پیوسته خواهند بود، در مورد عبارت آخری باید شرط $g(x)\neq 0$ هم وجود داشته باشد.

این مطلب، مستقیماً و از قضیهٔ مربوط به حد مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و نسبت دو تابع ــ وقتی که هرکدام، به‌طور جداگانه، دارای حد باشند ــ نتیجه می‌شود [۵۵].

برای نمونه، قضیه را در مورد نسبت دو تابع، ثابت می‌کنیم. فرض پیوستگی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ x_0، هم‌ارز وجود برابری‌های زیر است:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

ولی از این‌جا، و با توجه به قضیهٔ مربوط به حد نسبت (با توجه به صفر نبودن مخرج) داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

و این برابری، به‌معنای آن است که، تابع $\dfrac{f(x)}{g(x)}$، در نقطهٔ x_0، پیوسته است.

۶۸. مثال‌های تابع‌های پیوسته. ۱°. **تابع‌های گویای کسری و صحیح.** تابع $f(x)=x$، به روشنی، در سراسر بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است. اگر $x_n\to x_0$، در آن صورت $f(x_n)=x_n\to x_0=f(x_0)$. به همین ترتیب، تابعی که همواره مقدار ثابتی باشد، پیوسته است.

از این جا، براساس قضیهٔ شمارهٔ **۶۷**، پیوستگی یک جمله‌ای دلخواه

$$ax^m=\overbrace{a\cdot x\cdot x\cdots x}^{m\text{ مرتبه}}$$

به‌عنوان حاصل‌ضرب تابع‌های پیوسته و، سپس پیوستگی چندجمله‌ای (تابع گویای صحیح)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

به‌عنوان مجموع تابع‌های پیوسته، نتیجه می‌شود. درهمهٔ این حالت‌ها، پیوستگی درسراسر حوزهٔ $(-\infty,+\infty)$ برقراراست.

بالاخره، روشن است که نسبت دوچندجمله‌ای (تابع گویای کسری)

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a^n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

نیز، برای هرمقدار x، به‌جز آن‌هایی که مخرج را صفرمی‌کنند، پیوسته است.

۲°. تابع نمایی. پیوستگی تابع نمائی a^x را، بـه ازای مقدار دلخـواه x_0، ثابت می‌کنیم، به‌زبان دیگر، ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

(ضمناً، کافی است که حکم را تنها درحالت $a>1$ ثابت کنیم).

در ۵۴، ۶) دیدیم که

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

چون ۱، همان مقدار a^0 تابع است، بنابـراین، تابع نمایی درنقطهٔ $x=0$ پیوسته است. ازاین‌جا، می‌توان به‌سادگی به هرنقطهٔ دلخواه عبورکرد. در واقع

$$a^x-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)$$

ولی روشن است که از $x\to x_0$، نتیجه می‌شود $x-x_0\to 0$، به‌نحوی که

$$a^{x-x_0}\to 1 \quad و \quad a^x\to a^{x_0}$$

۳°. تابع‌های هذلولی. پیوستگـی این تـابع‌ها، بنا برقضیهٔ شمارهٔ ۶۷، مستقیماً از پیوستگی تابع نمایی، نتیجه می‌شود؛ زیـرا همهٔ آن‌ها، به طور گویا، برحسب e^x بیان می‌شوند.

۴°. تابع‌های مثلثاتی. ابتدا بـه‌تابع $\sin x$ می‌پردازیـم. این تابع هم، به‌ازای هر مقدار دلخواه $x=x_0$، پیوسته است، یعنی داریم:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

برای اثبات، توجه می‌کنیم که از نابرابری

$$sinx < x$$

[(۹)،۵۴] به‌ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$، به‌سادگی نتیجه می‌شود که نابرابری

$$|sinx| \leqslant |x|$$

برای همهٔ مقدارهای x، درست است. (برای مقدارهای $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$، این نابرابری از آن‌جا ناشی می‌شود که $|sinx| \leqslant 1$). علاوه بر آن داریم:

$$sinx - sinx_0 = 2\,sin\frac{x-x_0}{2}cos\frac{x+x_0}{2}$$

به‌نحوی که

$$|sinx - sinx_0| = 2\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{x-x_0}{2}$$

و بالاخره، برای مقدارهای دلخواه x و x_0:

$$|sinx - sinx_0| \leqslant |x - x_0| \qquad (2)$$

اگر $\varepsilon > 0$ به دلخواه مفروض باشد، آن‌گاه فرض می‌کنیم $\delta = \varepsilon$، و به‌ازای $|x - x_0| < \delta$ خواهیم داشت:

$$|sinx - sinx_0| < \varepsilon$$

که پیوستگی $sinx$ را ثابت می‌کند.

به‌همین ترتیب، می‌توان پیوستگی تابع $cosx$ را هم، به‌ازای مقدارهای دلخواه x، ثابت کرد.

ازاین جا، و بنا به قضیهٔ شماره ۶۷، پیوستگی تابع‌های زیرهم ثابت می‌شود:

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}\,,\quad secx = \frac{1}{cosx}\,,\quad cotgx = \frac{cosx}{sinx}\,,\quad cosecx = \frac{1}{sinx}$$

استثنا در دوتای اولی، مقدارهای به‌صورت $\frac{\pi}{2}(2k+1)$ است که $cosx$ را صفر می‌کنند، و

در دوتای آخری، مقدارهای به‌صورت $k\pi$ است که $\sin x$ را صفر می‌کنند.

۶۹. پیوستگی یك سوئی. طبقه‌بندی ناپیوستگی‌ها. در بالا، به‌کمك برابری (۱)، مفهوم پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 را تعریف کردیم. در آن جا، می‌توانستیم، برای محاسبهٔ حد (۱)، x را از راست و یا ازچپ به x_0 نزدیك کنیم. حالا به‌مفهوم پیوستگی یك سوئی، یا ناپیوستگی یك سوئی تابع، در نقطهٔ مفروض، می‌پردازیم.

گوییم، تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0، از طرف راست (یا ازطرف چپ) پیوسته است، به‌شرطی که رابطهٔ حدی زیر برقرار باشد:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+0)&=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\\ [f(x_0-0)&=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)]\end{aligned}\right\} \qquad (۳)$$

و اگر، این یا آن رابطه، برقرار نباشد، در آن صورت، تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 دارای ناپیوستگی از راست (ویا ناپیوستگی ازچپ) است.

وقتی‌که ازانتهای‌چپ(یا انتهای راست) بازهٔ $\mathfrak{D}$*، که تابع در آن جا معین است، صحبت می‌کنیم، روشن است که تنها می‌توان از پیوستگی یا ناپیوستگی راست (یا چپ) تابع صحبت کرد. درحالتی که x_0، نقطهٔ درونی بازهٔ $\mathfrak{D}$ باشد، یعنی برهیچ‌کدام از دو انتهای آن منطبق نباشد، درآن صورت، برای این‌که برابری (۱) ــ که معرف پیوستگی تابع درنقطهٔ x_0، به‌معنای‌عادی آن است ــ صادق‌باشد، لازم و کافی است‌که هردو برابری (۳)، باهم، برقرار باشند [۵۲]. به‌زبان‌دیگر، پیوستگی تابع درنقطهٔ x_0، هم‌ازپیوستگی آن دراین نقطه، درعین‌حال، هم‌از راست وهم ازچپ است.

روی مسالهٔ پیوستگی ونا‌پیوستگی تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0، مثلاً ازطرف راست، بیشتر صحبت‌می‌کنیم. فرض‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[x_0$ و $x_0+h][(h>0)$، ازطرف راست، دراین نقطه معین باشد؛ می‌بینیم‌که برای پیوستگی، لازم وکافی است‌که: اولاً، وقتی x از راست به x_0 میل می‌کند، برای تابع $f(x)$، حد متناهی $f(x_0+0)$ وجود داشته باشد؛ ثانیاً، این حد برابرمقدار $f(x_0)$ تابع درنقطهٔ x_0 باشد.

به‌این ترتیب، به‌سادگی می‌توان فهمیدکه درچه‌حالتی، برای تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0، ناپیوستگی از طرف راست وجود دارد. ممکن است پیش‌آیدکه، علی‌رغم وجود حد متناهی $f(x_0+0)$، این حد برابر مقدار $f(x_0)$ نباشد. این ناپیوستگی را، ناپیوستگی

---

*) با فرض‌آن که این انتها، عددی متناهی باشد.

عادی یا ناپیوستگی نوع اول* گویند. ولی، این وضع هم ممکن است پیش آید که حد $f(x_0+0)$ نامتناهی باشد و یا اصلاً وجود نداشته باشد، که در این صورت، آن را ناپیوستگی نوع دوم نامند.

در شمارهٔ بعد، با مثال‌هایی از این ناپیوستگی‌ها، آشنا می‌شویم.

یادداشت. اگر تابع $f(x)$، در نقطهٔ $x=x_0$، معین نباشد (یادداشت شماره **۶۶** را ببینید)، آن گاه، پیوستگی تابع در این نقطه، تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که دو حد متناهی $f(x_0+0)$ و $f(x_0-0)$ وجود داشته و با هم برابر باشند.

اگر یکی از این حدها، نامتناهی باشد و یا اصلاً وجود نداشته باشد، در آن صورت، با ناپیوستگی نوع دوم، سمت مورد نظر، سروکار داریم.

۷۰. مثال‌هایی از تابع‌های ناپیوسته. ۱) تابع $y=E(x)$ را در نظر می‌گیریم. (نمودار آن در شکل ۸ داده شده است). اگر x_0 عدد درستی نباشد و داشته باشیم $E(x_0)=m$، یعنی $m<x_0<m+1$، آن گاه، برای همهٔ مقدارهای x در بازهٔ $(m, m+1)$ خواهیم داشت: $E(x)=m$، به‌نحوی که پیوستگی تابع در نقطهٔ x_0، مستقیماً، آشکار است.

اگر x_0 برابر عدد درست m باشد، وضع دیگری پیش می‌آید. از طرف راست، در این نقطه، پیوستگی وجود دارد، زیرا درسمت راست $x=m$، یعنی برای مقدارهایی از x که در بازهٔ $(m, m+1)$ باشند، داریم $E(x)=m$، به‌نحوی که $E(m+0)=m=E(m)$. ولی، درسمت چپ $x=m$، برای مقدارهای x از بازهٔ $(m-1, m)$، روشن است که $E(x)=m-1$، درنتیجه $E(m-0)=m-1$، که برابر $E(m)$ نیست. بنابراین، تابع مفروض، ازسمت چپ، درنقطهٔ $x=m$، دارای ناپیوستگی عادی یا جهش است.

۲) تابعی را که درشمارهٔ **۴۶** بررسی کردیم، انتخاب می‌کنیم:

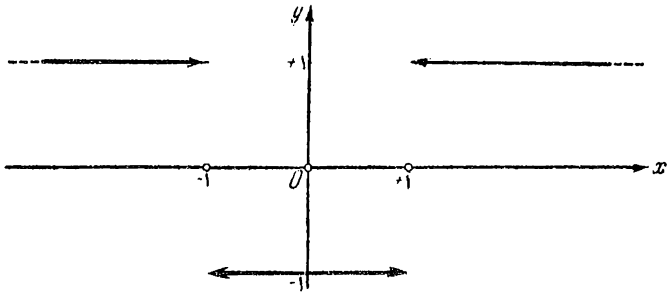
$$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

(نمودار آن، درشکل ۲۸ داده شده است). این تابع، درنقطه‌های $x=\pm 1$، هم ازطرف راست وهم ازطرف چپ، دارای ناپیوستگی عادی است، زیرا

$$f(\pm 1)=0\,,\quad f(-1-0)=f(1+0)=+1\,,$$
$$f(-1+0)=f(1-0)=-1$$

---

*) در این حالت، همچنین می‌گویند، $f(x)$ در نقطهٔ x_0، از طرف راست، جهشی به‌اندازهٔ $f(x_0+0)-f(x_0)$ دارد.



شکل ۲۸

۳) برای تابع

$$f(x)=\frac{۱}{x^۳} \qquad (x\neq ۰)$$

نقطهٔ $x=۰$، نقطهٔ ناپیوستگی نوع دوم، ازهردوطرف است، یعنی دراین نقطه، تابع از راست وچپ، بی‌نهایت می‌شود:

$$f(+۰)=\lim_{x\to +۰}\frac{۱}{x^۳}=+\infty \ , \ f(-۰)=\lim_{x\to -۰}\frac{۱}{x^۳}=-\infty$$

۴) تابع

$$f(x)=\sin\frac{۱}{x} \qquad (x\neq ۰)$$

که درشمارهٔ ۵۴، ۹) مورد بررسی قرار گرفت، درنقطهٔ $x=۰$، دارای ناپیوستگی نوع دوم، ازهردوطرف است، زیرا حد این تابع، وقتی x به‌سمت ۰ میل می‌کند، چه ازطرف راست وچه ازطرف چپ، اصلاً وجود ندارد.

۵) حالا، این تابع را درنظرمی‌گیریم:

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{۱}{x} \qquad (x\neq ۰)$$

[۵۴، ۱۰)]. همان‌طورکه قبلاً دیده‌ایم، این تابع درنقطهٔ $x=۰$، دارای حد است:

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=۰$$

بنابراین اگر بنا بریادداشت‌شمارهٔ ۶۶ـ فرض کنیم $f(۰)=۰$، برای تابع درنقطهٔ $x=۰$، پیوستگی برقرار کرده‌ایم.

۶) دو تابع را، با برابری‌های زیر تعریف می‌کنیم:

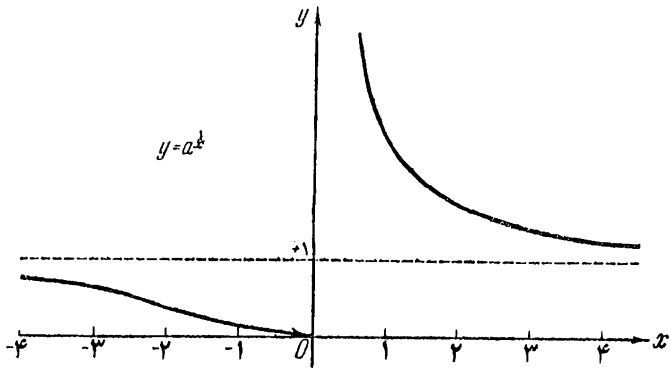
$$f_1(x)=a^{\frac{1}{x}},\ a>1\ ;\ f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

برای $x\neq 0$. علاوه بر آن، فرض می‌کنیم $f_1(0)=f_2(0)=0$.
برای تابع اول داریم:

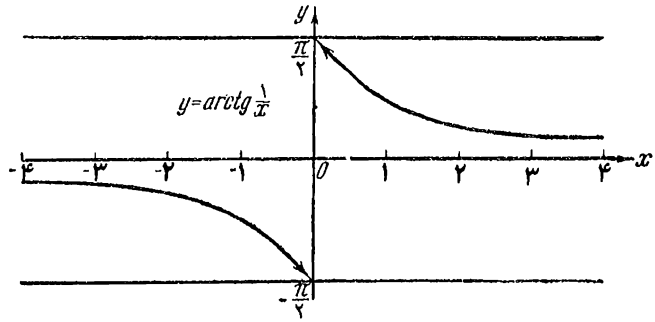
$$f_1(+0)=\lim_{x\to+0} a^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to+\infty} a^z=+\infty$$

$$f_1(-0)=\lim_{x\to-0} a^{\frac{1}{x}}=\lim_{z\to-\infty} a^z=0$$

به این ترتیب، تابع $f_1(x)$، از طرف راست ناپیوستگی نوع دوم، و از طرف چپ پیوستگی دارد. برای تابع دوم



شکل ۲۹



شکل ۳۰

$$f_۲(+۰)=\lim_{x\to+۰}\operatorname{arctg}\frac{۱}{x}=\lim_{z\to+\infty}\operatorname{arctg}z=\frac{\pi}{۲}\,,\quad f_۲(-۰)=-\frac{\pi}{۲}$$

و در نقطهٔ $x=۰$، از هردوطرف، جهش‌داریم. نمودار این دوتابع، درشکل‌های ۲۹ و۳۰ داده شده است.

۷) دوباره، تابع دیریکله را به‌یاد بیاوردیم [۴۶]:

برای عددهای گویای x: $\chi(x)=۱$

برای عددهای گنگ x: $\chi(x)=۰$

چون‌در هرنزدیکی نقطه‌های گویا، نقطه‌های گنگ پیدا می‌شود و برعکس، بنابراین، $x_۰$ هرعددی دربـازهٔ $(+\infty\,,\,-\infty)$ باشد، حدی برای $\chi(x)$، وقتی $x\to x_۰$، وجود ندارد، به‌نحوی‌که درهرنقطه، ناپیوستگی نوع دوم (ازهر دوطرف) وجود دارد.

۸) بالاخره، تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[۰\,,۱]$، به‌این ترتیب، تعریف می‌کنیم: اگر x عددی‌گویا و باکسر تحویل‌ناپذیر $\frac{p}{q}$ قابل بیان باشد، آن‌گاه $f(x)=\frac{۱}{q}$؛ و اگر x عددی گنگ باشد، آن‌گـاه $f(x)=۰$*. ثابت می‌کنیم که ایـن تـابع، درهرنقطهٔ‌گویا دارای ناپیوستگی عادی، ودر هر نقطهٔ گنگ، دارای پیوستگی است.

در واقع، فرض می‌کنیم $x_۰$ نقطهٔ دلخواهی ازبازهٔ موردنظر باشد. اگر عدد دلخواه $\varepsilon>۰$ مفروض باشد، تنها تعداد محدودی ازعددهای طبیعی q پیدا می‌شودکه از $\frac{۱}{\varepsilon}$ تجاوز نمی‌کنند. به این ترتیب، دربازهٔ مفروض، تنها تعداد محدودی نقطه‌های‌گویای $\frac{p}{q}$ پیـدا می‌شود که برای آن‌ها داشته باشیم: $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{۱}{q}\geqslant\varepsilon$. نقطـهٔ $x_۰$ را مـی‌تـوان درچنان همسایگی $(x_۰-\delta\,,x_۰+\delta)$ محصورکرد که در آن، حتی‌یکی‌ازاین نقطه‌های‌گویا وجود نداشته باشد (به‌جزخود نـقطهٔ $x_۰$). درآن صورت، تنها وقتی $|x-x_۰|<\delta$، $(x\neq x_۰)$، چه x گویاباشد وچه‌نباشد، درهرحال $|f(x)|<\varepsilon$. یعنی به‌ازای نقطهٔ دلخواه $x_۰$ داریم:

$$f(x_۰+۰)=f(x_۰-۰)=۰$$

درحالتی‌که $x_۰$، نقطه‌ای‌گنگ باشد، $f(x_۰)=۰$ به‌معنای آن است‌که تابع دراین

---

*) این تابع را ریمان (*B. Riemann*) مورد بررسی قرار داده است.

نقطه پیوسته است. ولی اگر x_0، نقطه‌ای گویا باشد، $f(x_0)$ مخالف صفر می‌شود و تابع ازهردوطرف ناپیوسته است (ناپیوستگی عادی).

۷۱. پیوستگی و ناپیوستگی تابع‌های یکنوا. تابع $f(x)$ را درنظرمی‌گیریم، که‌به ازای مقدارهای x دربازهٔ $\mathfrak{P}$*، به‌طوریکنوا صعودی (یا نزولی) باشد، ولو به‌معنای وسیع خود [۵۷]. در رابطه با چنین تابع‌هایی، قضیهٔ زیر وجود دارد:

۱°. تابع یکنوای صعودی (یا نزولی) $f(x)$ دربارهٔ $\mathfrak{P}$، تنها می‌تواند دارای ناپیوستگی نوع اول، یعنی جهش باشد.

نقطهٔ دلخواه x_0 ازبازهٔ $\mathfrak{P}$ را انتخاب وفرض می‌کنیم که این نقطه، انتهای چپ‌این بازه نباشد. آن بخش ازبازه را درنظرمی‌گیریم که درسمت چپ x_0 قراردارد وقضیهٔ شمارهٔ ۵۷، دربارهٔ حد تابع یکنوا را، برای‌آن، به‌کار می‌بریم؛ مادام که $x<x_0$، روشن است‌که $f(x)\leqslant f(x_0)$، و حد متناهی وجود دارد:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\leqslant f(x_0)$$

اگراین حد، برمقدار $f(x_0)$ منطبق باشد، آن‌گاه تابع، درنقطهٔ x_0، ازسمت چپ پیوسته است واگراین حد بر $f(x_0)$ منطبق نباشد، جهش وجود دارد.

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد که درهرنقطهٔ x_0 بازهٔ $\mathfrak{P}$ (به‌شرطی‌که انتهای راست آن نباشد)، ازسمت راست، یا پیوستگی ویا جهش وجود دارد.

به‌کمك این قضیه، می‌توان به‌سادگی، معیاری برای پیوستگی تابع یکنوا، که در عمل‌کار را ساده می‌کند، به‌دست‌آورد:

۲°. اگرمقدارهای تابع $f(x)$، که دربازهٔ $\mathfrak{P}$ یکنوای صعودی (یا نزولی) است، دربازهٔ $\mathfrak{Y}$ واقع شود و تمامی‌آن را بپوشاند (به نحوی که تابع، هرمقدار y از $\mathfrak{Y}$ را، دست‌کم یك‌بار، اختیارکند)، درآن صورت، این تابع در $\mathfrak{P}$ پیوسته است.**

حالتی راکه دریك نقطهٔ x از $\mathfrak{P}$، تابع دارای ناپیوستگی ـ ومثلاً ازطرف چپ است، مورد توجه‌قراردهیم. همان‌طورکه دیدیم، این‌ناپیوستگی، تنها می‌تواند جهش‌باشد. دراین حالت، حد $f(x_0-0)$ وجود دارد، ولی این حد، کمتراز مقدار $f(x_0)$ است،

---

*) این بازه، می‌تواند متناهی یا نامتناهی، بسته یا باز (دریك یاهردوانتها) باشد.

**) این شرط‌که تابع $f(x)$، تمامی‌بازهٔ $\mathfrak{Y}$ را بپوشاند، در این‌جا، به عنوان شرط کافی برای پیوستگی تابع یکنوا بیان شده است. بعدا [درشمارهٔ ۸۲] ثابت می‌کنیم‌که این شرط، لازم هم هست.

زیرا به‌ازای $x \leqslant x_0$ داریم $f(x) \leqslant f(x_0 - 0)$، و به‌ازای $x > x_0$ روشن است که $f(x) \geqslant f(x_0)$. بنابراین، تابع نمی‌تواند مقدارهای y واقع بین عددهای $f(x_0 - 0)$ و $f(x_0)$ متعلق به بازهٔ $\mathcal{Y}$ را اختیار کند. و این، متناقض باشرط قضیه است، یعنی تابع، عملاً، ناپیوستگی ندارد.

درشمارهٔ بعد، خواننده، مثال‌هایی در مورد کاربرد این قضیه، خواهد دید.

۷۲. پیوستگی تابع‌های مقدماتی. درمورد یك ردیف‌از تابع‌های‌مقدماتی، پیوستگی را، ضمن مثال‌های شمارهٔ ۶۸، ثابت‌کردیم. دراین جا، با استفاده ازقضیهٔ ۲° شماره قبل، می‌توان قبل ازهمه، وبدسادگی، پیوستگی تابع‌های a^x و $\sin x$ را ثابت کرد.

تابع $y = a^x \ (a > 1)$، برای مقدارهای x ازبازهٔ $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$، به‌طور یکنوا صعودی است. مقدارهای این تابع، مثبت بوده وتمامی بازهٔ $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$ را می‌پوشانند، که از وجود لگاریتم $x = \log_a y$، برای هر $y > 0$ دلخواه، دیده می‌شود [۲۰]. بنابراین، تابع نمائی، به‌ازای هرمقدار دلخواه x، پیوسته است.

پیوستگی تابع $y = \sin x$، مثلا به‌ازای تغییر x در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \mathcal{X}$، به‌طرزمشابهی، و ازیکنوائی‌آن دراین بازه، نتیجه می‌شود. همچنین این حقیقت هم روشن می‌شود (ضمناً، باتوجه به‌تعبیرهندسی تابع) که این تابع، همهٔ مقدارهای واقع بین ۱− و ۱+ را اختیار می‌کند. همین وضع، در مورد هربازه‌ای هم که به صورت زیرباشد، درست است:

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ولی آن‌چه برای ما جالب است، نتیجه‌های جدیدی است‌که می‌توان، به سادگی، وبا به‌کاربردن قضیهٔ مذکور، به‌دست‌آورد. تابع‌های مقدماتی را، که درشمارهٔ ۶۸ آغاز کردیم، ادامه می‌دهیم:

۵°. تابع لگاریتمی. تابع $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$ را درنظرمی‌گیریم و به‌حالت $a > 1$، اکتفا می‌کنیم. می‌بینیم که این تابع، به ازای مقدارهای x از بازهٔ $\mathcal{X} = (0, +\infty)$ صعودی است و درهمان حال، به‌روشنی، می‌تواند هرمقداردلخواه‌از بازهٔ $\mathcal{Y} = (-\infty, +\infty)$ را، به‌ازای $x = a^y$، اختیارکند. درنتیجه، این تابع، پیوسته است.

۶°. تابع توانی. تابع $y = x^\mu$ رادرنظرمی‌گیریم $(\mu \leqslant 0)$. وقتی x ازصفر تا $+\infty$ صعودکند، به‌ازای $\mu > 0$، این تابع صعودی، و به‌ازای $\mu < 0$، نزولی‌است. ضمناً، این‌تابع،

هرمقدارمثبت‌دلخواه(به‌ازای $x=y^{\frac{1}{\mu}}$) را اختیار می‌کند. در نتیجه، این تابع هم پیوسته است.*

درپایان یادآوری می‌کنیم از

۷°. تابع‌های معکوس مثلثاتی

$$y=\arcsin x\ ,\quad x=\arccos x\ ,\quad y=\operatorname{arctg} x\ ,\quad y=\operatorname{arccotg} x$$

دو تابع اول، در بازهٔ $[-1,+1]$ و دو تابع آخر در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته‌اند. اثبات را، به خواننده وامی‌گذاریم.

کوتاه سخن: تابع‌های مقدماتی اساسی، در همهٔ نقطه‌هایی‌که دارای معنا هستند، پیوسته‌اند (یعنی درحوزه‌های طبیعی تعریف خود).

۷۳. انطباق تابع‌های پیوسته. گروه تابع‌های پیوسته را، می‌توان با انطباق (روی هم‌گذاری) [۵۱] تابع‌های پیوستهٔ معلوم، گسترش داد.

قضیهٔ زیر، براین اساس قراردارد:

قضیه. فرض کنیم، تابع $\varphi(y)$ دربازهٔ $\mathcal{Y}$ و تابع $f(x)$ دربازهٔ $\mathcal{X}$ معین باشند. ضمناً، مقدارهای تابع اخیر، وقتی x در $\mathcal{X}$ تغییرمی‌کند، از حدود بازهٔ $\mathcal{Y}$ خارج نشوند. اگر $f(x)$ درنقطهٔ x_0 از $\mathcal{X}$، و $\varphi(y)$ در نقطهٔ نظیر $y_0=f(x_0)$ از $\mathcal{Y}$، پیوسته باشند، آن‌گاه، تابع مرکب $\varphi(f(x))$ هم، درنقطهٔ x_0، پیوسته است.

اثبات. عدد دلخواه $\varepsilon>0$ را انتخاب می‌کنیم، چون $\varphi(y)$، به ازای $y=y_0$، پیوسته است، پس از روی ε، می‌توان $\sigma>0$ را طوری پیداکردکه

$$\text{از } |y-y_0|<\sigma \text{ نتیجه شود: } |\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$$

از طرف دیگر، با توجه به‌پیوستگی $f(x)$ درنقطهٔ $x=x_0$، می‌توان از روی σ، $\delta>0$ را طوری پیداکرد، به‌نحوی که

$$\text{از } |x-x_0|<\delta \text{ نتیجه شود: } |f(x)-y_0|<\sigma \text{ یا } |f(x)-f(x_0)|$$

سپس، بنابرنوع انتخاب خود σ، نتیجه می‌شود:

---

*) اگر $\mu>0$، آن‌گاه مقدار 0، هم دربازهٔ تغییر x وهم دربازهٔ تغییر y وجود دارد و درحالت $\mu<0$، 0 متعلق به این بازه‌ها نیست. ضمناً، اگر μ، عدد درست n یا کسر $\frac{p}{q}$ با صورت فرد باشد، درآن صورت، توان x می‌تواند برای $x<0$ هم درنظرگرفته شود وپیوستگی آن: به‌ازای این مقدارها، به‌طریق مشابهی ثابت می‌شود.

$$|\varphi(f(x))-\varphi(y_0)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0)|<\varepsilon$$

وبه‌این ترتیب، پیوستگی تابع $\varphi(f(x))$ «به‌زبان ε و δ» ثابت می‌شود.

مثلا، اگر تابع توانی $x^\mu\ (x>0)$، به‌صورت تابع مرکبی باشد:

$$x^\mu=e^{\mu\cdot\ln x}$$

که از انطباق تابع‌های لگاریتمی و نمایی به‌دست آمده است، ازپیوستگی دوتابع اخیر، پیوستگی تابع توانی نتیجه می‌شود.

۷۴. حل یك معادلهٔ تابعی. برای ساده‌ترکردن فهم مطلبی راکه درشمارهٔ بعد طرح می‌کنیم، این مساله را (که به‌خودی خود هم، جالب است) حل می‌کنیم.

همهٔ تابع‌های $f(x)$ را پیدا کنید کـه در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیوسته باشند و درشرط

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (A)$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای x و y، صدق‌کنند.

معادلهٔ (A)، ساده‌ترین نمونه‌ازبه‌اصطلاح معادله‌های تابعی است، که خاصیتی از تابع مطلوب را به‌ما می‌دهدواز روی‌آن، بـاید خود تابع را پیداکرد. مسالهٔ ما، عبارت است ازپیداکردن همهٔ جواب‌های‌پیوسته‌ای که درمعادلهٔ A صدق می‌کنند.

به‌سادگی دیده می‌شودکه تابع خطی متجانس (همگن) به‌صورت

$$f(x)=cx \quad (c=\text{const.}) \qquad (a)$$

درمعادلهٔ (A) صدق می‌کنند:

$$c(x+y)=cx+cy$$

ولی، باید روشن‌کنیم که:آیا این‌ها، تنها تابع‌های پیوسته‌ای هستندکه درمعادلهٔ (A)صدق می‌کنند، یا تابع‌های دیگری هم، با این ویژگی، پیدا می‌شوند؟

ثابت می‌کنیم که، در واقع، تابع خطی متجانس، تنها تابعی است‌که درمعادلهٔ (A) صدق می‌کند. برای این منظور، فرض می‌کنیم، تابع پیوسته‌ای مثل $f(x)$، درمعادلهٔ (A) صدق می‌کندوثابت می‌کنیم که، دراین صورت، این‌تابع‌الزاماً به‌صورت (a) خواهدبود.

قبل از همه، به‌کمك روش استقرای ریاضی، می‌توانیم رابطهٔ (A) را، برای تعداد دلخواه جمله‌ها (مثلا n جمله) تعمیم دهیم:

$$f(\overbrace{x+y+\cdots+z}^{n})=f(x)+f(y)+\cdots+f(z) \qquad (۴)$$

در واقع، اگردرست بودن آن‌را، برای $n \geqslant ۲$ جمله بپذیریم، آن‌گاه، برای $(n+۱)$جمله هم، درست خواهد بود:

$$f(\overbrace{x+y+\cdots+z}^{n}+u)=f(\overbrace{x+y+\cdots+z}^{n})+f(u)=$$
$$=f(x)+f(y)+\cdots+f(z)+f(u)$$

اگردر (۴) فرض کنیم: $x=y=\ldots=z$، به‌دست می‌آید:

$$f(n.x)=n.f(x) \qquad (۵)$$

و اگر در آن، x را به $\frac{۱}{n}x$ تبدیل کنیم

$$f\left(\frac{۱}{n}x\right)=\frac{۱}{n}.f(x)$$

وسپس، با گذاشتن mx(m، عددی طبیعی‌است) به‌جای x و با استفاده‌از رابطهٔ قبلی،داریم:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}.f(x) \qquad (۶)$$

حالا، اگردرمعادلهٔ (A)، فرض کنیم $x=y=۰$، نتیجه می‌گیریم:

$$f(۰)=۲f(۰)\Rightarrow f(۰)=۰ \qquad (۷)$$

واگر $y=-x$ بگیریم، با توجه به (۷) داریم:

$$f(-x)=-f(x)$$

یعنی، تابع $f(x)$، با تغییرعلامت x، تغییرعلامت می‌دهد. دراین صورت، از (۵) و (۶)، به‌سادگی، نتیجه می‌شود:

$$f(-nx)=-f(nx)=-n.f(x) \qquad (۸)$$

وبه‌ترتیب مشابهی، به‌طور کلی

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x) \qquad (۹)$$

رابطه‌های حاصل از (۵) تا (۹) را، می‌توان، به‌صورت یك رابطهٔ زیر نوشت:

$$f(r.x)=r.f(x)$$

که برای هرعدد حقیقی x، ومقدار دلخواه عدد گویای r، درست است.

اگر دراین‌جا $x=1$ بگیریم و $f(1)$ را با c نشان دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(r)=c.r$$

به‌این‌ترتیب،صورت تابع f را ــ البته، هنوز برای مقدارهای گویای آوند ــ پیدا کردیم؛ ضمناً، تنهاازاین واقعیت‌استفاده کردیم که‌تابع‌درشرط (A) صدق می‌کند وکاری به‌پیوستگی آن نداشتیم.

حالا، فرض‌می‌کنیم که ρ، مقدار گنگ دلخواه‌آوند باشد. به‌سادگی می‌توان، دنبالهٔ عددهایی را ساخت که به‌سمت‌آن میل کند:

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

(مثلا، می‌توان، پاره‌های کسردهدهی نامتناهی نظیر ρرا انتخاب‌کرد). همین حالادیدیم:

$$f(r_n)=c.r_n \qquad (n=1, 2, 3, \dots)$$

وقتی $n\to+\infty$، به‌سمت مقدار حدی می‌رویم؛ درسمت راست تساوی به $c.\rho$ می‌رسیم، و درسمت چپ تساوی، با توجه به‌فرض پیوستگی تابع f، نتیجه می‌گیریم:

$$\text{حد}\ f(r_n)=f(\rho)$$

وسرانجام

$$f(\rho)=c.\rho$$

به‌این ترتیب، تابع مطلوب، در واقع، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی آوند، باهمان دستور(a) بیان می‌شود. این دستور، کلی‌ترین‌جواب معادلهٔ (A) را، درتابع‌های پیوسته، به‌دست می‌دهد.

۷۵. خصوصیت تابعی تابع‌های نمائی، لگاریتمی وتوانی. ۱°. اگرداشته باشیم

$$f(x)=a^x \quad (a>0) \qquad \text{(b)}$$

آن‌گاه، دوعدد حقیقی x و y هرچه باشند، همواره داریم:

$$f(x+y)=f(x).f(y) \qquad \text{(B)}$$

که ناشی از قاعدهٔ معلوم، درضرب توان‌ها، است:

$$a^{x+y}=a^x.a^y$$

معلوم می‌شود که ویژگی تابعی (B)، همراه باویژگی پیوستگی، تابع نمائی را کاملا مشخص می‌کند. درست‌تر بگوییم:

تنها تابع معین وپیوسته‌ای که در تمامی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$، درشرط (B) صدق می‌کند، عبارت‌است ازتابع نمائی (به‌شرطی که تابع متحد با صفررا به‌حساب نیاوریم).

به‌زبان‌دیگر، دستور (b)ـ به‌استثنای حالت متحد با صفرـ جواب کلی معادلهٔ تابعی (B) را، درتابع‌های پیوسته، به‌دست می‌دهد.

برای اثبات، تابع دلخواه $f(x)$ را درنظرمی‌گیریم، که معین وپیوسته است و در شرط (B) صدق می‌کند. حالت بی‌معنی $f(x)\equiv 0$ را کنارمی‌گذاریم.

به‌این ترتیب، این تابع، برای هرمقدار $x=x_0$، مخالف ۰ است. اگر در (B) فرض کنیم $y=x_0-x$، به‌دست می‌آید:

$$f(x).f(x_0-x)=f(x_0)\neq 0$$

ازاین‌جا، آشکاراست که $f(x)$، به‌ازای‌همهٔ xها، مخالف صفراست. علاوه برآن، اگردر (B)، x و y را به $\frac{x}{2}$ تبدیل کنیم، داریم:

$$f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

یعنی $f(x)$ همواره مثبت است.

با استفاده ازاین مطلب، از رابطهٔ (B)، مثلاً درپایهٔ طبیعی e، لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln f(x+y)=\ln f(x)+\ln f(y)$$

که اگر فرض کنیم

$$\varphi(x)=\ln f(x)$$

آن‌گاه، به‌عنوان $\varphi(x)$، تابعی خواهیم داشت پیوسته (با توجه به‌انطباق تابع‌های پیوسته، ۷۳)، که درشرط زیرصدق می‌کند:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

شبیه معادلهٔ (A). درچنین حالتی، همان‌طورکه ثابت کردیم، داریم:

$$\varphi(x)=\ln f(x)=c\cdot x \quad (c=\text{const.})$$

که از آن‌جا، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=e^{c\cdot x}=a^x$$

(اگر $a=e^c$ فرض شود): واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲°. اگرداشته باشیم:

$$f(x)=\log_a x \qquad (a>0,\ a\neq 1) \qquad (c)$$

آن‌گاه، به‌ازای مقدارهای مثبت ودلخواه x و y داریم:

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \qquad (C)$$

که ناشی از قاعدهٔ لگاریتم‌گیری ازحاصل‌ضرب است:

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$$

در این‌جا هم، برابری (C)، همراه با پیوستگی، تابع لگاریتمی را، به طور کامل، تعریف می‌کنند:

تنها تابع معین وپیوسته دربازهٔ $(0,+\infty)$، که درشرط (C) صدق می‌کند، عبارت است ازتابع لگاریتمی (با همان‌استثنا)؛ به‌نحوی‌که، دستور (c)جواب‌کلی معادلهٔ تابعی (C) را، درتابع‌های پیوسته، به‌دست می‌دهد.

برای اثبات، تابع دلخواه $f(x)$ را، که به‌ازای $x>0$ پیوسته است و در رابطهٔ (c) صدق می‌کند، درنظر می‌گیریم. متغیرجدید ξ را، که در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ تغییر می‌کند وارد وفرض می‌کنیم:

$$x=e^{\xi},\ \varphi(\xi)=f(e^{\xi})$$

ازآن‌جا

$$\xi=\ln x,\ \ f(x)=\varphi(\ln x)$$

تابع پیوسته [بنابه ۷۳]$\varphi(\xi)$، در شرط زیر ــ که ازنوع (A) است ــ صدق می‌کند [(C) را ببینید]

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}\cdot e^{\eta})=f(e^{\xi})+f(e^{\eta})=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$$

یعنی

$$\varphi(\xi)=c\cdot\xi,\ f(x)=c\cdot\ln x$$

اگر حالت $c=0$ را استثنا کنیم (که به‌ازای آن $f(x)\equiv 0$)، در آن صورت، نتیجهٔ حاصل را، می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\log_a x$$

که در آن $a=e^{\frac{1}{c}}$. وحکم مطلوب، ثابت شد.

۳°. درپایان، به‌تابع توانی برمی‌گردیم:

$$f(x)=x^\mu \qquad \text{(d)}$$

که به‌روشنی، درمعادلهٔ تابعی زیر صدق می‌کند:

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \qquad \text{(D)}$$

(برای مقدارهای مثبت ودلخواه x و y)، که در واقع، ناشی است از

$$(x\cdot y)^\mu=x^\mu\cdot y^\mu$$

معادلهٔ تابعی (D)، همراه با پیوستگی، معرف تابع توانی است؛ به‌زبان دقیق‌تر

تنها تابع معین وپیوسته درفاصلهٔ $(0,+\infty)$، که درشرط (D) صدق‌کند، تابع‌توانی است (با استثنای معمول).

در واقع، اگر تابع $f(x)$، بـه ازای $x>0$، پیوسته و درشرط (D) صادق باشد، به همان جای گزینی ۲° متوسل می‌شویم؛ آن‌وقت، تـابع $\varphi(\xi)$، درشرط زیر، که ازنوع شرط B است، صدق می‌کند [(D) را ببینید]:

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^\xi\cdot e^\eta)=f(e^\xi)\cdot f(e^\eta)=\varphi(\xi)\cdot\varphi(\eta)$$

ما دیگرمی‌دانیم که دراین‌صورت (باکنارگذاشتن حالت بی‌معنی):

$$\varphi(\xi)=a^\xi \qquad (a>0)$$

و ازآن‌جا

$$f(x)=a^{\ln x}=x^\mu$$

(با فرض $\mu=\ln a$). آن چه لازم بود، ثابت شد.

۷۶. مشخصهٔ تابعی کسینوس‌های مثلثاتی وهذلولی. ۴°. اگر

$$f(x)=\cos ax \text{ یا } \operatorname{ch} ax \qquad (a\geqslant 0) \qquad \text{(e)}$$

آن‌گاه برای مقدارهای حقیقی و دلخواه x وy، رابطهٔ زیر برقراراست:

$$f(y+x)+f(y-x)=2f(x).f(y) \qquad (E)$$

که ناشی ازقضیهٔ مجموع، برای هردوکسینوس است:

$$cos(y\pm x)=cos x\,cos y\mp sin x\,sin y$$

$$\mathrm{ch}(y\pm x)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x.\mathrm{sh}y$$

[۴۸، ۶°]. این بار، معادلهٔ تابعی (E)، همراه با پیوستگی تابع‌ها، معرف هردوکسینوس است.

تنها تابع‌های معین وپیوسته در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$، که درشرط (E) صدق کنند، عبارت‌اند از کسینوس‌های مثلثاتی وهذلولی (a) (به شرطی که، مثل قبل، تابع متحد با صفر را کنار بگذاریم).

به‌این ترتیب، $f(x)$ را تابعی می‌گیریم که به‌ازای همهٔ xها پیوسته باشد و، ضمناً، درشرط (E)صدق کند. در رابطهٔ (E)فرض‌می‌کنیم $x=0$، و برای y، یکی ازمقدارهایی را انتخاب می‌کنیم که برای‌آن داشته باشیم $f(y)\neq 0$؛ نتیجه می‌شود

$$f(0)=1 \qquad (10)$$

واگر، با توجه به (۱۰)، $y=0$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(-x)=f(x) \qquad (11)$$

یعنی $f(x)$، یك تابع زوج است.

ازآن‌جاکه تابع $f(x)$، به‌ازای $x=0$، مثبت است ، می‌توان عدد مثبتی مثل c پیداکرد، به‌نحوی‌که $f(x)$ درتمامی بازهٔ $[c\,,\,0)$ مثبت باشد. از این به‌بعد، بررسی در دومسیرانجام‌می‌گیرد: (α)، $f(c)\geqslant 1$ یا (β)، $f(c)>1$. ابتدا به‌حالت (α) می‌پردازیم:

چون $0<f(c)\leqslant 1$، بنابراین چنان عدد θ پیدا می‌شود $\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ که‌برای آن داشته باشیم:

$$f(c)=cos\theta \qquad (12)$$

سپس، رابطهٔ اساسی (E) را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$f(y+x)=2f(x).f(y)-f(y-x)$$

پشت سرهم، درآن، این مقدارها را می‌گذاریم:

$$x=c\,,\quad y=c;$$

$$x=c\ ,\ y=۲c;$$

$$x=c\ ,\ y=۳c$$

وغیره، که با توجه به (۱۰) و (۱۲)، به‌دست می‌آید:

$$f(۲c)=۲\cos^{۲}\theta-۱=\cos ۲\theta;$$

$$f(۳c)=۲\cos\theta\cdot\cos ۲\theta-\cos\theta=\cos ۳\theta;$$

$$f(۴c)=۲\cos\theta\cdot\cos ۳\theta-\cos ۲\theta=\cos ۴\theta$$

و همین‌طور تا آخر. به کمك روش استقرای ریاضی، می‌توانیم، برای هر عدد طبیعی m، ثابت کنیم:

$$f(mc)=\cos m\theta \qquad (۱۳)$$

اگر در (E) فرض کنیم $x=y=\frac{۱}{۲}c$، آن‌گاه [دوباره با استفاده از (۱۰) و (۱۲)]، نتیجه می‌شود:

$$\left[f\left(\frac{۱}{۲}c\right)\right]^{۲}=\frac{f(۰)+f(c)}{۲}=\frac{۱+\cos\theta}{۲}=\left[\sin\left(\frac{۱}{۲}\theta\right)\right]^{۲}$$

چون $f(x)$ بین ۰ و c، وتابع $\cos x$، درفاصلهٔ ۰ و θ، مثبت می‌مانند، بنابراین، جذر گرفتن از هردوطرف تساوی، منجر به تساوی زیرمی‌شود:

$$f\left(\frac{۱}{۲}c\right)=\cos\left(\frac{۱}{۲}\theta\right)$$

به‌همین ترتیب، اگر در (E) فرض کنیم $x=y=\frac{۱}{۲^{۲}}c$، به‌دست می‌آید.

$$f\left(\frac{۱}{۲^{۲}}c\right)=\cos\left(\frac{۱}{۲^{۲}}\theta\right)$$

وغیره، که بازهم با استفاده از روش استقرای ریاضی، به‌حالت کلی زیر می‌رسیم:

$$f\left(\frac{۱}{۲^{n}}c\right)=\cos\left(\frac{۱}{۲^{n}}\theta\right)\qquad (n=۱,۲,۳,\dots) \qquad (۱۴)$$

بالاخره، با تکرار روشی که، به‌کمك آن، از (۱۲) به (۱۳) رسیدیم، می‌توانیم از (۱۴)، به این برابری برسیم:

$$f\left(\frac{m}{۲^n}c\right)=\cos\frac{m}{۲^n}\theta$$

بنابراین، به‌ازای مقدارهای مثبت x، به‌صورت $\frac{m}{۲^n}$ داریم:

$$f(cx)=\cos\theta x \qquad (۱۵)$$

ولی، چون‌عدد مثبت ودلخواه x، می‌تواند مانند حد مقدارهایی به‌این‌صورت باشد، به‌کمك گذر به حد (با اتکای به پیوستگی تابع‌های $f(x)$ و $\cos x$)، می‌توان درستی دستور (۱۵) را برای‌هرمقدار $x>۰$ ثابت کرد. برای $x<۰$، بنابر (۱۱) و برای $x=۰$، بنابر (۱۰)، این دستور درست است. اگردر (۱۵)، x را به $\frac{x}{c}$ تبدیل و فرض کنیم $a=\frac{\theta}{c}$، سرانجام، نتیجه می‌گیریم که

$$f(x)=\cos ax$$

در حالت (β) داریم $f(c)>۱$، بنابراین، می‌توان θ را طوری پیداکردکه داشته باشیم:

$$f(c)=\operatorname{ch}\theta$$

با تکرارجزءبه‌جزء بحث حالت‌قبل، و بااستفاده از رابطه‌های مربوط به‌کسینوس هذلولی، برای این حالت هم، نتیجه می‌شود:

$$f(x)=\operatorname{ch}ax\ (a>۰)$$

برای $a=۰$، از روی هردورابطه، نتیجه می‌شود: $f(x)\equiv ۱$.

معادله‌های تابعی (A)، (B)، (C)، (D) و (E)، برای نخستین‌بار، به‌وسیلهٔ‌کوشی، مورد بررسی قرارگرفت و، هم او، جواب‌های این معادله‌ها را، به صورت تابع‌های پیوسته، به‌دست آورد.

۷۷. استفاده ازپیوستگی تابع‌ها، برای محاسبهٔ حدها. تابع‌های پیوسته، به‌صورت‌های‌مختلف، می‌توانند برای‌محاسبهٔ حد، مورداستفاده قرارگیرند؛ وما دراین‌شماره، به‌ذکرمثال‌هایی از این گونه می‌پردازیم*:

---

*) در واقع، قبلا هم، این‌کار را کرده‌ایم. مثلا در ۳) ازشمارهٔ **۵۶**، ضمن اثبات پیوستگی $\sqrt[m]{x}$ به‌ازای $x=۱$، از آن‌استفاده کرده‌ایم؛همچنین‌درمثال ۵) قسمت‌دوم، برای $\cos x$ به‌ازای $x=۰$.

۱) برای مقدارهای حقیقی و دلخواه x داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

درواقع، این‌عبارت را (با توجه به‌این‌که $x \neq 0$) می‌توان به‌صورت زیردرآورد:

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

چون $\frac{x}{n} \to 0$، پس واریانت داخل کروشه به‌سمت e میل می‌کند [۵۴. (۱۳)]، در آن‌صورت، با توجه به پیوستگی تابع توانی (این‌جا $x = \text{const}$.)، تمامی عبارت، دارای حد e^x است.

۲) مطلوب است تعیین حد

$$\lim_{x \to +\infty} [\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} - x] \qquad (\infty - \infty)$$

که درآن، a_1، a_2، ...، a_k، عددهای ثابت مفروضی هستند.

با استفاده از اتحاد

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + yz^{k-2} + z^{k-1}}$$

و با فرض

$$y = \sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)} \quad \text{و} \quad z = x$$

عبارت موردنظر، به‌ترتیب، چنین می‌شود:

$$\frac{(x+a_1)\cdots(x+a_k) - x^k}{(\sqrt[k]{\cdots})^{k-1} + x(\sqrt[k]{\cdots})^{k-2} + \cdots + x^{k-1}} =$$

$$= \frac{(a_1+\cdots+a_k) + \dfrac{a_1a_2+\cdots+a_{k-1}a_k}{x} + \cdots}{\sqrt[k]{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\dfrac{a_k}{x}\right)}^{k-1} + \cdots + 1}$$

به‌ازای $x \to +\infty$، عبارت زیر رادیکال، به‌سمت ۱ میل می‌کند، در نتیجه، حد خود

رادیکال، با توجه به‌پیوستگی ریشه، مثل حالت خاصی از تابع توانی، برابر می‌شود با $\sqrt[k]{1}=1$. چون، چند جمله‌ای درجهٔ $(k-1)$ (از ریشه)، واقع درمخرج هم، تابع پیوسته‌ای است، مخرج به‌سمت k میل می‌کند و حدتمامی‌کسر، عبارت خواهد بود از

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

۳) به‌فرض ۳۳، ۱۳) برمی‌گردیم. فرض کنید $a_n>0$ و $a_n\to a$؛ فعلا به‌فرض $0<a<+\infty$، اکتفا می‌کنیم. فرض نامبرده را، برای دنبالهٔ $\{\ln a_n\}$ به‌کارمی‌بریم. چون $\ln a_n\to\ln a$ (بنا برپیوستگی تابع لگاریتمی)، بنا براین

$$\lim \ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=\lim\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln a$$

درچنین حالتی، بنابرپیوستگی تابع نمائی

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}\to e^{\ln a}=a$$

به‌کمك حدهای ۱) و ۲) شمارهٔ ۵۴، می‌توان این نتیجه‌گیری را، به‌حالت‌های $a=0$ و $a=+\infty$ نیز گسترش داد.

به‌این ترتیب، می‌توان گزارهٔ نامبرده را، به‌این ترتیب، تغییرداد.

اگر واریانت مثبت a_n دارای حد باشد (متناهی یا نامتناهی)، واریانت

$$b_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

هم، دارای همان‌حد است.

۴) اگراین گزاره را، درمورد دنبالهٔ

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ldots$$

به‌کاربریم، به‌نتیجهٔ جالبی می‌رسیم:

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

تنها با این فرض‌که، دومین حد، ازاین حدها، وجود داشته باشد.

برای مثال، حد زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\text{حد}\ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

با فرض $a_n=\frac{n!}{n^n}$، داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}$$

یعنی، حد مطلوب، برابر است با $\frac{1}{e}$.

۵) این حدهای مهم را، که درفصل بعد لازم است، پیدا می‌کنیم:

a) $\text{حد}_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

b) $\text{حد}_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\ln a$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

c) $\text{حد}_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\mu$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

داریم:

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

چون عبارت واقع درزیرعلامت لگاریتم، درسمت راست تساوی، به‌ازای $\alpha\to 0$، به‌سمت e میل می‌کند [۵۴، (۱۳)]، بنابرپیوستگی تابع لگاریتمی، لگاریتم آن، به‌سمت $\log_a e$ میل می‌کند.

درحالت خاص، وقتی‌که صحبت ازلگاریتم طبیعی باشد $(a=e)$، این رابطه،چنین می‌شود:

$$\text{حد}_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$$

سرچشمهٔ سادگی این نتیجه، در برتری‌هایی است‌که لگاریتم طبیعی دارد.

در مورد رابطهٔ b)، فرض می‌کنیم $a^\alpha-1=\beta$، در آن صورت، به‌ازای $\alpha\to 0$

(بنا بر پیوستگی تابع نمائی) $\beta \to 0$.

ضمناً داریم: $\alpha = log_a(1+\beta)$. دیگر به سادگی، با استفاده از نتیجهٔ قبل به‌دست می‌آید:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{log_a(1+\beta)} = \frac{1}{log_a e} = \ln a$$

اگر، در حالت خاص، $\alpha = \frac{1}{n}$ بگیریم، دستورجالب زیر نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a \quad (\infty \cdot 0)$$

بالاخره، برای اثبات رابطهٔ c)، فرض می‌کنیم $\beta = (1+\alpha)^\mu - 1$. وقتی $\alpha \to 0$ (بنا بر پیوستگی تابع توانی) $\beta \to 0$. اگر از دوطرف رابطهٔ $1 + \beta = (1+\alpha)^\mu$ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\mu \cdot \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta)$$

به‌کمك این رابطه، عبارت مفروض را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \frac{\mu \cdot \ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

که بنا بر آن چه ثابت کرده‌ایم، دو نسبت

$$\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \text{ و } \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}$$

به‌سمت ۱ میل می‌کنند و، بنابراین، تمامی حاصل ضرب، دارای حد μ است.

حدی که در ۵۶، ۳) مورد بررسی قراردادیم، حالا، مثل حالت خاصی ازحداخیر، به‌ازای $r = \mu$، درمی‌آید.

۷۸. عبارت توان-نمائی. حالا به‌عبارت توان ـ نمائی u^v می‌پردازیم، که در آن، u و v هردو، تابع‌هایی از یك متغیر x: با حوزهٔ تغییر $\mathfrak{M}$ ونقطهٔ تجمع x_0، می‌باشند، در حالت خاص، این‌ها، می‌توانند دو واریانت u_n و v_n باشند.

فرض کنیم، حدهای متناهی زیر وجود داشته باشند:

$$\lim_{x \to x_0} u = a \quad , \quad \lim_{x \to x_0} v = b$$

ضمناً $a>0$. هدف، پیدا کردن حد u^v است.

عبارت مفروض را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$u^v = e^{v\cdot \ln u}$$

تابع‌های v ، $\ln u$، دارای حد هستند.

$$\lim_{x\to x_0} v = b \quad , \quad \lim_{x\to x_0} \ln u = \ln a$$

(دراین جا، از پیوستگی تابع لگاریتمی استفاده شده است)، به‌نحوی که

$$\lim_{x\to x_0} v\cdot \ln u = b\cdot \ln a$$

که از آن جا، بنا به پیوستگی تابع نمائی، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{b\cdot \ln a} = a^b$$

حدعبارت u^vرا، درحالت‌های‌دیگری هم، وقتی که c،حد حاصل‌ضرب $v\cdot \ln u$ معلوم باشد–متناهی یا نامتناهی– می‌توان پیدا کرد. درحالت متناهی بودن c، این حد به‌روشنی، به‌صورت e^c درمی‌آید، واگر c برابر $-\infty$ یا $+\infty$ باشد، این حد به‌ترتیب، برابر ۰ یا $+\infty$ می‌شود [۱،۵۴)].

خود تعیین حد $\lim\{v\ln u\}=c$، تنها از روی حدهای مفروض a و b، همیشه ممکن است، به‌جز حالت‌هایی که‌حاصل‌ضرب (به‌ازای $x\to x_0$)، به‌صورت مبهم $0\cdot\infty$ درمی‌آید. به سادگی فهمیده می‌شود که این موردهای استثنایی، متناظر با این ترکیب‌ها، از a و b هستند:

$$a=1 \quad , \qquad b=\pm\infty;$$

$$a=0 \quad , \qquad b=0;$$

$$a=+\infty \quad , \qquad b=0$$

دراین حالت‌ها، می‌گویندکه عبارت u^v، به‌صورت‌های مبهم 1^∞، 0^0 و ∞^0 درمی‌آید* در این‌گونه موردها، تنها با آگاهی ازحد تابع‌های u و v، نمی‌توان مسالهٔ مربوط به حد u^v را حل‌کرد، و باید مستقیماً، قانونی را مورد مطالعه قراردادکه از روی آن، u و v به‌سمت حدهای خود میل می‌کنند.

---

*) درمورد این نمادها، می‌توان آن چه‌را، در پاورقی پایان شمارهٔ ۳۱ گفتیم، تکرار کرد.

واریانت $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، به‌ازای $n\to\infty$، یا به‌طور کلی، عبارت $(1+x)^{\frac{1}{x}}$، وقتی $x\to 0$، که حدی برابر e دارد، مثالی برای حالت ابهام 1^∞ است. در شمارهٔ ۴،۷۷)، با واریانت $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ آشنا شدیم که به‌صورت مبهم 0° است. بالاخره، در ۳۲، ۱۰) با عبارت $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}$ سروکارداشتیم، که به‌صورت مبهم ∞° است.

بازهم، دراین‌جا، مثال‌هایی از رفع ابهام صورت‌های تازه می‌آوریم.

۷۹. چند مثال. ۱) مطلوب است.

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} \qquad (\infty^\circ)$$

اگرعبارت مفروض را با y نشان دهیم، داریم [۲،۵۴) و ۵) را ببینید].

$$\ln y=\frac{\ln(\ln x)}{x}=\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}\to 0 \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

به‌نحوی که $y\to e^0=1$.

۲) مطلوب است $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$ (0°)

دراین‌جا [۷،۵۴) و ۵)] داریم:

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x=\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x\to 0$$

درنتیجه، دوباره $y\to 1$.

۳) مثال ۱) شمارهٔ ۷۶ را، به‌ترتیب زیر، تعمیم می‌دهیم. اگر واریانت $x_n\to x$ (که در آن، x عددی متناهی است)، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=e^x \qquad (1^\infty)$$

برای اثبات، کافی است، عبارت اصلی را، به‌این صورت درآوریم:

$$\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}$$

که پایهٔ توان به‌سمت e و نمای آن به‌سمت x میل می‌کند.

۴) مثال زیر را نیز می‌توان به‌این حالت منجر کرد:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=e^{\lambda x}\qquad(1^\infty)$$

اگر مقدار داخل پرانتز را، برابر $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)$ بگیریم، داریم:

$$x_n=n\cdot\left(\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\cdot\sin\frac{x}{n}\right)=$$

$$=\lambda x\cdot\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-x\cdot\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\to\lambda x$$

۵) مثال زیرهم، به‌طریق مشابهی، حل می‌شود ($a,b>0$):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}\qquad(1^\infty)$$

در این جا، داریم:

$$x_n=n\cdot\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right]=\frac{1}{2}[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)]$$

به‌نحوی که، با استفاده از نتیجه خاص رابطهٔ ۵) (b) شماره ۷۷، داریم:

$$x_n\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$$

و در واقع، حد مطلوب برابر است با $\sqrt{ab}=e^{\ln\sqrt{ab}}$.

۶) بالاخره، این حد را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\qquad(1^\infty)$$

خواننده متوجه شده است که در حالت 1^∞، بهتر است، مسیر کار را، مستقیماً، به e

بکشانیم.

همان‌طور که قبلا هم گفته‌ایم، روش کلی رفع ابهام همهٔ صورت‌های مبهم را در فصل چهارم (§۴)، مورد بررسی قرار خواهیم داد.

§۵. ویژگی‌های تابع‌های پیوسته

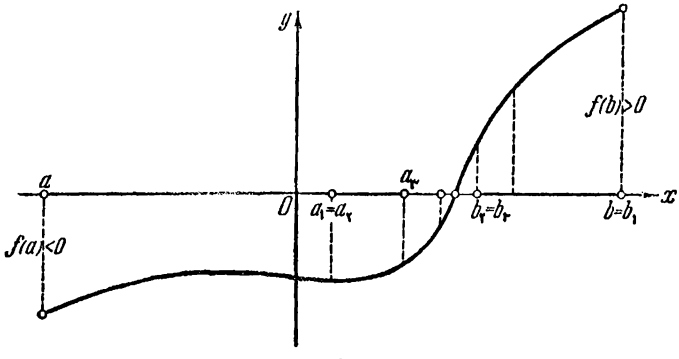
۸۰. **قضیهٔ مربوط به صفرشدن تابع.** حالا به‌ویژگی اساسی تابع‌هائی می‌پردازیم، که در بازه‌ای، پیوسته‌اند. این ویژگی‌ها، که به‌خودی خود هم جالب‌اند، در موضوع‌های بعدی و، به‌خصوص، برای نتیجه‌گیری‌های مختلف، کاربرد دارند.

از قضیه‌ای که متعلق به بولزانو (b.bolzano) و کوشی (A.L.Cauchy) است، آغاز می‌کنیم.

I) **قضیهٔ اول بولزانو-کوشی.** اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، معین و پیوسته باشد، و در دوانتهای این بازه، مقدارهایی با علامت‌های مختلف اختیار کند، آن‌گاه، بین a و b، حتماً نقطه‌ای مانند c پیدا می‌شود، که در آن‌جا، تابع برابر صفر است:

$$f(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

قضیه، دارای معنای بسیار سادهٔ هندسی است: اگر منحنی پیوسته، از یك طرف محور x، به‌طرف دیگر آن عبور کند، در آن صورت، محور را قطع می‌کند (شکل ۳۱).



شکل ۳۱

اثبات I. با روش بولزانو [۴۱]، با تقسیم پی در پی بازه، آغاز می‌کنیم. برای روشنی بحث، فرض می‌کنیم $f(a)<0$ و $f(b)>0$. بازهٔ $[a,b]$ را، به وسیلهٔ نقطهٔ $\frac{a+b}{2}$، دوقسمت می‌کنیم. ممکن است اتفاق بیفتد که تابع، در این نقطه، برابر صفر شود،

دراین صورت، قضیه ثابت است: دراین حالت، $c=\frac{a+b}{۲}$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم $f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\neq ۰$. دراین صورت مقدار تابع، در دو انتهای یکی از بازه‌های $\left[a, \frac{a+b}{۲}\right]$ و $\left[\frac{a+a}{۲} b\right]$، با علامت‌های مختلف خواهد بود (ضمناً، مقدارمنفی درسمت چپ ومقدارمثبت درسمت‌راست است). این بازه را $[a_۱, b_۱]$ می‌گیریم، که‌داریم:

$$f(a_۱)<۰ \quad , \quad f(b_۱)>۰$$

بازهٔ $[a_۱, b_۱]$ را نصف‌می‌کنیم؛ دوباره‌حالتی‌راکه $f(x)$، درنقطهٔ وسط $\frac{a_۱+b_۱}{۲}$ این بازه، برابرصفرمی‌شود، کنارمی‌گذاریم (زیرا، دراین حالت، قضیه ثابت است) وبازهٔ $[a_۲, b_۲]$ را چنان انتخاب می‌کنیم، که برای آن داشته باشیم:

$$f(a_۲)<۰ \quad , \quad f(b_۲)>۰$$

این روش را، با ساختن بازه‌های کوچك‌تر ادامه می‌دهیم. دوحالت پیش می‌آید: ۱) بعد ازچند بارتقسیم (به تعداد متناهی)، به‌نقطه‌ای برخورد می‌کنیم که تابع: درآن جا، برابرصفرمی‌شود (که‌دراین صورت، قضیه‌ثابت است)؛ ۲) دنباله‌ای نامتناهی از بازه‌های تو درتو به‌دست می‌آید. روی همین حالت اخیرمی‌ایستیم. برای بازهٔ nام $[a_n , b_n]$ $(n=۱,۲,۳,\dots)$، خواهیم داشت:

$$f(a_n)<۰ \quad , \quad f(b_n)>۰ \qquad (۱)$$

ضمناً، طول این بازه، به‌روشنی، برابراست با

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{n} \qquad (۲)$$

ساختمان این دنبالهٔ بازه‌ها، با پیش قضیهٔ مربوط به بازه‌های تودرتو، سازگار است [۳۸]، زیرا با توجه به (۲): $(b_n-a_n)=۰$ حد. بنابراین، نقطهٔ c از بازهٔ $[a,b]$ وجود دارد، به‌نحوی‌که برای‌آن داشته باشیم:

$$\text{حد}\, a_n=\text{حد}\, b_n=c$$

ثابت می‌کنیم که، درست همین نقطه، به خواست قضیهٔ ما، پاسخ می‌دهد.

با گذربه‌حد درنابرابری‌های (۱) و، ضمناً، با استفاده ازپیوستگی تابع (به‌خصوص

در نقطهٔ $x=c$)، نتیجه می‌گیریم که درعین حال

$$f(c)=\lim f(a_n)\leqslant 0,\quad f(c)=\lim f(b_n)\geqslant 0$$

به‌نحوی که درواقع، $f(c)=0$، و قضیه ثابت است.

در زیر، اثبات دومی برای قضیهٔ کوشی می‌دهیم که براندیشهٔ دیگری بنا شده است. ابتدا، پیش قضیهٔ زیر را، به‌عنوان مقدمه، می‌آوریم.

پیش‌قضیه. اگر تابع $f(x)$، در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته، و مقدار $f(x_0)$ مخالف صفر باشد، آن‌گاه، به‌ازای همهٔ مقدارهای x به‌قدرکافی نزدیك به x_0، تابع $f(x)$، همان علامتی را که در نقطهٔ x_0 دارد، حفظ می‌کند.

این گزاره، نتیجه‌ای است ازحکم ۲° در ۵۵، I. ضمنا، درحالت مفروض، نقش A، حدتابع، را (به‌خصوص، با توجه به‌پیوستگی)، $f(x)$ به‌عهده دارد.

اثبات II. همهٔ نقطه‌های $x=\bar{x}$، از بازهٔ $[a,\ b]$، را در نظر می‌گیریم که، به‌ازای آن‌ها، $f(\bar{x})>0$ باشد. مثلاً، نقطهٔ a و (بنا به پیش‌قضیه)، نقطه‌های نزدیك به‌آن، از این جمله‌اند. مجموعهٔ $\{\bar{x}\}$، از بالا و به وسیلهٔ b کران‌دار است. فرض می‌کنیم $c=\sup\{\bar{x}\}$ [۱۱] و ثابت می‌کنیم که $f(c)=0$.

در واقع، اگر با برهان خلف، $f(c)$ را مخالف صفر بگیریم، یا $f(c)<0$ و یا $f(c)>0$؛ اگر داشته باشیم $f(c)<0$ (واضح است که در این صورت، $c<b$، زیرا فرض براین است که $f(b)>0$)، بنابه پیش قضیه، در سمت راست c، مقدارهایی از $\bar{x}$ پیدا می‌شود، که به‌ازای آن‌ها $f(\bar{x})<0$. و این با تعریف c، به‌عنوان کران بالای $\{\bar{x}\}$ نمی‌سازد. اگر داشته باشیم $f(c)>0$، بنابر پیش‌قضیه؛ در نزدیکی چپ c، به‌خصوص در بازهٔ به‌قدرکافی کوچك $[c-\delta,\ c]$ باید داشته باشیم $f(x)>0$، که به‌معنای آن است که در آن، نمی‌توان مقدارهایی از $\{\bar{x}\}$ را پیدا کرد؛ این هم ممکن نیست، زیرا، بنابرتعریف c نقطهٔ کران بالا، برای $\{\bar{x}\}$ است. قضیه ثابت است.

توجه داشته باشیم که، لزوم پیوستگی تابع $f(x)$، در بازهٔ بسته $[a,\ b]$، اساسی است: تابعی که، ولو در یك نقطه، ناپیوستگی داشته باشد، ممکن است، از مقدارهای منفی به‌مقدارهای مثبت بگذرد، بدون این که برابرصفرشود. مثلاً، درتابع $f(x)=E(x)-\frac{1}{2}$، باهمین وضع روبه‌رو می‌شویم. این تابع، درهیچ نقطه‌ای برابر صفر نیست، باوجودی که $f(0)=-\frac{1}{2}$ و $f(1)=+\frac{1}{2}$ (جهش به‌ازای $x=1$).

۸۱. کاربرد در حل معادله‌ها. ازقضیه‌ای که ثابت کردیم، می‌توان در حل معادله‌ها،

استفاده کرد. قبل ازهمه، به‌کمك این قضیه، می‌توان وجود ریشه را ثابت کرد. مثلاً، ریشهٔ $x=۴$ برای معادلهٔ

$$۲^x = ۴x$$

برای همه مشهود است، ولی وجود یك ریشهٔ دیگر، به‌زحمت احساس می‌شود. ضمناً، تابع $f(x)=۲^x-۴x$، به‌ازای $x=۰$، مقدار $f(۰)=۱>۰$ و به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$، مقدار $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{۲}-۲<۰$ را اختیار می‌کند. درنتیجه (چون تابع پیوسته است)، درنقطه‌ای بین ۰ و $\frac{۱}{۲}$ برابر صفر می‌شود.

مثال دیگر. به‌طورکلی، معادلهٔ جبری از درجهٔ فرد (با ضریب‌های حقیقی) را، در نظر می گیریم:

$$f(x)=a_۰x^{۲n+۱}+a_۱x^{۲n}+\cdots+a_{۲n}x+a_{۲n+۱}=۰$$

وقتی x را، به‌قدر کافی، بزرگ بگیریم (از لحاظ قدرمطلق)، چند جمله‌ای، همان علامت بزرگترین جمله را پیدا می‌کند، یعنی به ازای xهـای مثبت، علامت $a_۰$ و به ازای xهای منفی، علامت مخالف آن را. ازآن‌جاکه چندجمله‌ای، تابعی پیوسته است، باتعویض‌علامت، الزاماً، درنقطه‌های میانی، برابر صفر می‌شود. از این‌جا: هر معادلهٔ جبری از درجه فرد (با ضریب‌های حقیقی)، دست کم، یك ریشهٔ حقیقی دارد.

قضیهٔ کوشی را، نه‌تنها برای تشخیص‌وجود ریشه‌ها، بلکه برای‌محاسبهٔ تقریبی آن‌هاهم، می‌توان به‌کار برد. این مطلب‌را با مثالی روشن می کنیم. فرض کنیم $f(x)=x^۴-x-۱$. چون $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۱۳$، بنا براین، چندجمله‌ای، دارای ریشه‌ای بین ۱ و ۲ می باشد. بازهٔ $[۱, ۲]$ را با نقطه‌های $۱/۱$، $۱/۲$، $۱/۳$، ...، به ۱۰ قسمت برابر تقسیم و به‌ترتیب، آغاز به‌محاسبه می کنیم:

$$f(۱/۱)=-۰/۶۳\ldots,\quad f(۱/۲)=-۱/۱۲\ldots,\quad f(۱/۳)=+۰/۵۵\ldots$$

می بینیم که ریشه، بین $۱/۲$ و $۱/۳$ قراردارد. این بازه را نیز به ۱۰ قسمت، تقسیم وآغاز به‌محاسبه می کنیم:

$$f(۱/۲۱)=-۰/۰۶\ldots,\quad f(۱/۲۲)=-۰/۰۰۴\ldots,\quad f(۱/۲۳)=+۰/۰۵۸\ldots$$

حالا روشن است که ریشه، بین $۱/۲۲$ و $۱/۲۳$ واقع است، تا این‌جا، ریشه را تا ۰/۰۱ تقریب می‌دانیم، وطبیعی است که می‌توانیم، به‌همین‌ترتیب، ادامه دهیم و ریشه را

با هر تقریب دلخواهی پیدا کنیم*.

با توجه به این ملاحظه‌ها، مقایسهٔ دو نوع اثباتی که از یك قضیه شرح دادیم، جالب است. اثبات دوم، تنها «اثبات وجود» ریشه معادلهٔ $f(x)=0$ است وهیچ صحبتی از نحوهٔ محاسبهٔ خود ریشه نمی‌کند، درحالی‌که اثبات اول، ضمناً، از طریق مشخص محاسبهٔ ریشه‌های حقیقی را پیش‌بینی می‌کند: روش نصف‌کردن بازه (که ما، برای سادگی‌کار، به‌آن اکتفا کردیم)، می‌تواند مستقیماً، ریشه مطلوب را، در بازه‌ای به‌طول به‌قدر دلخواه کوچك، محصور کند و، درنتیجه، این ریشه‌ها را، با هر تقریب دلخواه، به‌دست دهد.

۸۲. قضیهٔ مربوط به‌مقدارهای میانی. قضیه‌ای راکه در شمارهٔ ۸۰ ثابت کردیم، می‌توان، بلافاصله، به ترتیب زیر تعمیم داد:

قضیهٔ دوم بولزانو ـ کوشی. فرض کنیم، توابع $f(x)$، در یك بازه (بسته یا باز، متناهی یا نامتناهی)، معین و پیوسته باشد، اگر این تابع، در نقطه‌های $x=a$ و $x=b$ $(a<b)$ از این بازه، مقدارهای نابرابر داشته باشد:

$$f(a)=A,\quad f(b)=B$$

دراین صورت، هرچه باشد عدد C بین A و B، چنان نقطه $x=c$ بین a و b پیدا می‌شود، به‌نحوی که*:

$$f(c)=C$$

اثبات. فرض می‌کنیم، مثلاً

$$A<B,\quad A<C<B$$

دربازهٔ $[a,b]$، تابع کمکی $\varphi(x)=f(x)-C$ را درنظرمی‌گیریم. این تابع، در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است و در دوانتهای آن، دارای علامت‌های مختلف است:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0,\quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0$$

درنتیجه، بنا به قضیهٔ اول بولزانو-کوشی، نقطهٔ $x=c$ بین a و b پیدا می‌شود که برای آن $\varphi(c)=0$ باشد، یعنی

$$f(c)-C=0\ \Rightarrow\ f(c)=C$$

---

*) البته، این روش برای محاسبهٔ ریشه‌ها، روش مناسبی نیست. درفصل چهارم (§۵)، روش‌های به‌مراتب مؤثرتری را یاد خواهیم گرفت.

**) روشن است که قضیهٔ اول بولزانو-کوشی، حالت خاصی از این قضیه است: اگر A و B، علامت‌های مختلف داشته باشند، برای C می‌توان 0 را انتخاب کرد.

آن چه لازم بود، ثابت شد.

به‌این ترتیب، ویژگی مهم تابع پیوستهٔ $f(x)$ را، ثابت کردیم: تابع، ضمن عبور ازیك مقدارخود، به‌مقداری دیگر، می‌تواند هر عدد میانی‌را، دست‌کم یك بار، به عنوان مقدار خود، قبول کند.

این ویژگی را، به‌زبان دیگری هم، می‌توان بیان‌کرد: وقتی x در یك بازهٔ $\mathscr{X}$ تغییر می‌کند، خود مقدارهای تابع پیوستهٔ $f(x)$ هم، سراسر یك بازهٔ Y را می‌پوشانند.

در واقع، فرض کنیم*

$$m=\inf\{f(x)\},\quad M=\sup\{f(x)\}$$

و y_0 را، عددی دلخواه، بین m و M می‌گیریم:

$$m<y_0<M$$

الزاما، مقدارهای تابع $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ (x_1 و x_2 از بازه $\mathscr{X}$ انتخاب شده‌اند) پیدا می‌شوند، به‌نحوی که

$$m\leqslant y_1<y_0<y_2\leqslant M$$

واین، ازخود تعریف مرز، درمجموعه‌های عددی، نتیجه می‌شود. ولی دراین صورت، بنا برقضیه‌ای که ثابت کردیم، بین x_1 و x_2، چنان مقدار $x=x_0$ (و روشن است که، متعلق به $\mathscr{X}$) پیدا می‌شود که $f(x_0)$، درست برابر y_0 باشد؛ بنابراین، این عدد، به‌مجموعهٔ Y تعلق دارد.

به‌این ترتیب، Y، مجموعه‌ای با دوانتهای m و M است (که خودآن‌ها، ممکن‌است به‌مجموعه تعلق داشته یا نداشته باشند).

در ۷۱، ۲° دیدیم که در حالت تابع یکنوا، این ویژگی، برعکس، پیوستگی را به‌دنبال خود دارد، ولی نباید گمان کرد که همیشه این‌طوراست، به‌سادگی می‌توان تابع‌های ناپیوسته‌ای ساخت که، ضمنا، دارای این ویژگی هم باشند. مثلاً، مقدارهای تابع [۴،۷۴]

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\quad f(0)=0$$

وقتی x در یك بازهٔ شامل نقطه ناپیوستگی $x=0$، تغییر می‌کند، تمامی بازه $[+1,-1]$ را می‌پوشانند.

---

*) یادآور می‌شویم که، اگر مجموعهٔ $\{f(x)\}$ کران‌دار ازبالا (یا پایین) نباشد، در شمارهٔ ۱۱ فرض می‌کردیم، $M=+\infty$ (یا $m=-\infty$).

۸۳. وجود تابع معکوس. از ویژگی پیوستگی تابع، که در شمارهٔ قبل دیدیم، می‌توانیم، با بعضی شرطها، برای اثبات وجود تابع معکوس یك ارزشی و پیوستگی آن، استفاده کنیم [با **۴۹** مقایسه کنید].

قضیه. فرض کنیم، تابع $y=f(x)$ معین و به‌طوریکنوا صعودی (یا نزولی*) وپیوسته دریك بازهٔ $\mathfrak{X}$ باشد. آنگاه، در بازهٔ $\mathfrak{Y}$ مقدارهای این تابع، تابع معکوس یك ارزشی $x=g(y)$ وجود دارد، که آن هم به‌طوریکنوا صعودی (یانزولی) وپیوسته است.

اثبات. به‌حالت تابع صعودی، اکتفا می‌کنیم. دیدیم که مقدارهای تابع پیوستهٔ $f(x)$، تمامی بازهٔ $\mathfrak{Y}$ را می‌پوشانند، که به‌ازای هرمقدار y_0 ازاین بازه، دست‌کم یك مقدار از x_0 (از $\mathfrak{X}$) پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$f(x_0)=y_0$$

ولی، با توجه به یکنوائی تابع، چنین مقداری منحصربه‌فرد است: اگر x_1 بزرگتر یا کوچکتر از x_0 باشد، آنگاه به‌ترتیب، $f(x_1)$ بزرگتر یا کوچکتر از $f(x_0)$ خواهد بود.

با متناظر کردن این مقدار x_0 با y_0، که به‌دلخواه از $\mathfrak{Y}$ انتخاب شده بود، به‌تابعی یك ارزشی می‌رسیم:

$$x=g(y)$$

که معکوس تابع $y=f(x)$ است.

به سادگی دیده می‌شود که این تابع $g(y)$ هم، مانند $f(x)$، صعودی یکنواست. فرض کنیم

$$y'<y'' \ , \ x'=g(y') \ , \ x''=g(y'')$$

آنوقت، بنابه تعریف تابع $g(y)$، به‌طورهم‌زمان، داریم:

$$y'=f(x') \ , \ y''=f(x'')$$

اگر $x'>x''$، بنابه صعودی بودن تابع $f(x)$ داریم: $y'>y''$، که خلاف فرض است. $x'=x''$ هم ممکن نیست، زیرا، در آن صورت $y'=y''$، که‌آن هم خلاف فرض است. بنابراین، تنها نابرابری $x'<x''$ ممکن است، به‌نحوی که $g(x)$ واقعا صعودی باشد.

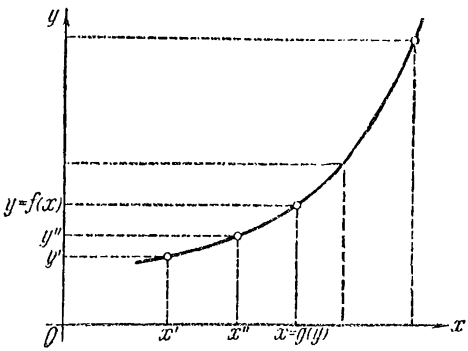
بالاخره، برای اثبات پیوستگی تابع $x=g(y)$، کافی است به‌قضیهٔ **۷۱**، ۲° استناد کنیم، چراکه دراین جا هم، همان فرض‌ها را داریم. تابع نامبرده، یکنوا ومقدارهای آن،

---

*) به‌مفهوم اکیدکلمه (این مطلب، دراین‌جا، اساسی است).

به‌روشنی، تمامی بازهٔ $\mathscr{Y}$ را پر می‌کنند.*

تمام استدلال‌های مربوط به‌این قضیه را، می‌توان به‌سادگی، از لحاظ هندسی، روی شکل ۳۲ دید: بـه‌کمك این قضیه، می‌توان یـك رشته نتیجه‌گیری‌های قبلی را، دوباره ثابت کرد.



شکل ۳۲

اگر، این قضیه را در بارهٔ تابع x^n (n عددی طبیعی است)، در بازهٔ $\mathscr{X}=[0,+\infty)$ بـه‌کار بریم، بـه‌وجود و پیوستگی ریشهٔ (حسابی) $x=\sqrt[n]{y}$، بـــرای y در $\mathscr{Y}=[0,+\infty)$ می‌رسیم. بـا آغاز از تابع $y=a^x$ در بازهٔ

$$\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$$

وجود و پیوستگی لگاریتم $x=\log_a y$ در بازهٔ $\mathscr{Y}=(0,+\infty)$ را نشان می‌دهیم. و بالاخره، اگر تابع‌های $y=\sin x$، $y=tg\,x$ را در نظر بگیریم ــ اولی در بازهٔ $\mathscr{X}_1=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ و دومی در بازهٔ $\left(\frac{\pi}{2}\text{ و }-\frac{\pi}{2}\right)=\mathscr{X}_2$ ــ وجود و پیوستگی تابع‌های معکوس $x=\arcsin y$ و $x=\arctg y$، به‌ترتیب، در بـازه‌های $\mathscr{Y}_1=[-1\text{ و }+1]$، $\mathscr{Y}_2(-\infty,+\infty)$، اثبات می‌شود.

[ضمناً، فرض بر این است که پیوستگی تـابع‌های x^n، a^x، $\sin x$، $tg\,x$، بدون کمك گرفتن از مفهوم تابع معکوس ثابت شده باشد (وگرنه، دچار دور باطل می‌شویم)].

باز هم، به‌مثالی می‌پردازیم.

فرض کنید، برای x در بازهٔ $\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ داشته باشیم:

$$y=x-\varepsilon\cdot\sin x \qquad (0<\varepsilon<1) \qquad (۳)$$

به‌سادگی، می‌توان نشان داد که این تابع (به‌معنای اکید خود)، صعودی یکنواست. اگـر فرض کنیم $x'<x''$، و y' و y'' را مقدارهای نظیر y بگیریم، آن‌گاه

---

*) هرچه باشد x از $\mathscr{X}$، کافی است فرض کنیم $y=f(x)$، تا برای این y، تابع $g(y)$، مقداری را که برای x انتخاب کرده‌ایم، داشته باشد.

$$y''-y'=(x''-x')-\varepsilon(\sin x''-\sin x')$$

ولی [(۲)، ۶۸ را ببینید]:

$$|\sin x''-\sin x'|\leqslant x''-x'$$

که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$y''-y'>0\Rightarrow y''>y'$$

با استفاده ازقضیه، دراین حالت، معتقد می‌شویم که x هم، تابعی یك ارزشی از y است وغیره:

این مثال، از آن جهت جالب است که با یك مسالهٔ اخترشناسی نظری، برخوردپیدا می‌کند. معادلهٔ

$$E=M+\varepsilon\cdot\sin E \qquad (3a)$$

به‌معادلهٔ کپلرمعروف است، که اختلال متوسط M سیاره را، با اختلال خروج ازمرکز E آن، مربوط می‌کند (ε، خروج ازمرکز مدارسیاره است). ما، به این ترتیب، ثابت کردیم که، مقداراختلال متوسط سیاره، هر چه باشد، می‌توان بـه‌کمك معادلهٔ کپلر، مقدار اختلال خروج ازمرکز آن را، به‌صورت یك ارزشی، معین کرد.

۸۴. قضیهٔ مربوط به‌کران‌داربودن تابع‌ها. اگرتابع $f(x)$، به‌ازای همهٔ مقدارهای x دریك بازهٔ متناهی، معین باشد (و بنابراین، مقدارهای متناهی را قبول کند)، الزاماً، به‌معنای کران‌دار بودن تابع، یعنی به‌معنی کران‌دار بودن مجموعهٔ $\{f(x)\}$، نیست. مثلا، فرض کنید، تابع $f(x)$، به‌این ترتیب، تعریف شده باشد:

$$f(x)=\frac{1}{x}\quad (0<x\leqslant 1)\ \text{و}\ f(0)=0$$

این تابع، تنها مقدارهای متناهی را اختیارمی‌کند، ولی کران‌دار نیست، زیرا ضمن نزدیك شدن x به ۰، می‌تواند مقدارهای به‌دلخواه بزرگ را اختیار کند. ضمناً، درنظر بگیریم که دربازهٔ نیم باز $[0,1)$، این تابع پیوسته است، ولی درنقطهٔ $x=0$، ناپیوستگی دارد.

درمورد تابع‌هایی که دریك بازهٔ بسته، پیوسته باشند، وضع به‌گونهٔ دیگری است.

قضیهٔ اول ویرشتراس. اگرتابع $f(x)$، دربازهٔ بستهٔ $[a,b]$، معین وپیوسته باشد، آن گاه این تابع کران‌داراست، یعنی چنان مقدارهای ثابت ومتناهی m و M وجود داردکه

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \qquad (\text{به‌ازای } a\leqslant x\leqslant b)$$

اثبات را با بـرهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم، تـابع $f(x)$، به‌ازای تغییر x

در بازهٔ $[a,b]$ کران‌دار نباشد.

در چنین حالتی، برای هر عدد طبیعی m در بازهٔ $[a,b]$ چنان مقدار $x=x_0$ پیدا می‌شود که

$$|f(x_n)|\geqslant n \qquad (۴)$$

بنا بر پیش قضیهٔ بولزانو–ویرشتراس [۴۱]، از دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌توان دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$ را، که به‌سمت حد متناهی میل می‌کند، درآورد:

$$x_{n_k}\to x_0 \qquad (k\to+\infty \text{ وقتی})$$

ضمناً، روشن است که $a\leqslant x_0\leqslant b$. بنا بر پیوستگی تابع در نقطهٔ x_0، باید

$$f(x_{n_k})\to f(x_0)$$

و این ممکن نیست، زیرا از (۴) نتیجه می‌شود که

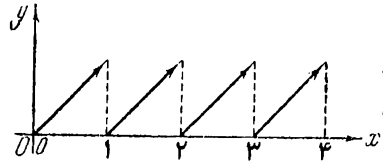
$$|f(x_{n_k})|\to\infty$$

تناقض حاصل، به‌معنای درستی حکم قضیه است.

۸۵. بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع. می‌دانیم که یك مجموعهٔ عددی نامتناهی، حتی اگر کران‌دار هم باشد، ممکن است در ترکیب خود، دارای بزرگترین (یا کوچکترین) عضو نباشد. اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای از تغییرات x، معین و حتی کران‌دار باشد، ممکن است در مجموعهٔ مقدارهای $\{f(x)\}$، بزرگترین (یا کوچکترین) عضو وجود نداشته باشد. در چنین حالتی، مقدارهای $f(x)$، در بازهٔ مورد نظر به‌مرز بالا (یا پایین) خود نمی‌رسد. مثلا، در مورد تابع

$$f(x)=x-E(x)$$

با چنین وضعی روبه‌رو می‌شویم (نمودار این تابع، در شکل ۳۳ آمده است). وقتی x، در بازهٔ دلخواهی، مثل $[0,b]$ $(b\geqslant 1)$ تغییر می‌کند، مرز بالای مقدارهای تابع، برابر است با ۱ ولی مقدار تابع به‌این عدد نمی‌رسد، به‌نحوی که برای تابع، بزرگترین مقدار وجود ندارد.



شکل ۳۳

احتمالا خواننده متوجه شده باشد که بین این کیفیت و ناپیوستگی تابع در نقطه‌های صحیح x، رابطه‌ای وجود دارد. در واقع، برای یك تابع پیوسته و در یك بازهٔ بسته، قضیهٔ زیر درست است:

قضیهٔ دوم ویرشتراس. اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ بستهٔ $[a,b]$، معین وپیوسته باشد، آن‌گاه، این تابع، دراین بازه، به‌مرزهای بالا وپایین خود می‌رسد.

به‌زبان دیگر، دربازهٔ $[a,b]$، چنان نقطه‌های $x=x_0$ و $x=x_1$ پیدا می‌شود که مقدارهای $f(x_0)$ و $f(x_1)$، به‌ترتیب، بزرگترین و کوچکترین مقدار ازبین همهٔ مقدارهای تابع $f(x)$ باشند.

اثبات I فرض کنیم: $$M=\sup\{f(x)\}$$

بنا بر قضیهٔ قبل، این عدد متناهی است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و (علی‌رغم حکمی که باید ثابت کنیم) فرض می‌کنیم که همواره $f(x)<M$ به مرز M نمی‌رسد. در چنین حالتی، می‌توان تابع کمکی زیر را در نظر گرفت:

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

چون، بنابرفرض، مخرج دراین‌جا برابر صفر نمی‌شود، این تابع پیوسته است و، درنتیجه (بنا به قضیهٔ قبل)، کران دار است: $\varphi(x)\leqslant\mu\ (\mu>0)$. ولی، ازاین‌جا و به‌سادگی، نتیجه می‌شود که در آن صورت

$$f(x)\leqslant M-\frac{1}{\mu}$$

یعنی عدد $M-\frac{1}{\mu}$، که کوچکتر از M است، کران بالای مجموعهٔ مقدارهای تابع $f(x)$ است، که ممکن نیست، زیرا M مرز بالای این مجموعه است. تناقض‌حاصل، درستی حکم قضیه راثابت‌می‌کند. دربازهٔ $[a,b]$، چنان مقدار x_0 پیدامی‌شود که $f(x_0)=M$، بزرگترین همهٔ مقدارهای $f(x)$ باشد.

حکم مربوط به کوچکترین مقدار هم، به‌طرز مشابهی، ثابت می‌شود.

اثبات II. می‌توان ازپیش‌قضیهٔ بولزانو-ویرشتراس[۴۱]، آغاز کرد. به‌حکم‌مربوط به بزرگترین مقدار، اکتفا می‌کنیم. دوباره فرض می‌کنیم:

$$M=\sup\{f(x)\}$$

آن گاه، بنا به ویژگی مرز بالا [۱۱]، برای هر n دلخواه، نقطهٔ $x=x_n$ در $[a,b]$ پیدا می‌شود، به نحوی که

$$f(x_n)>M-\frac{1}{n} \qquad (۵)$$

در این صورت، از دنبالهٔ $\{x_n\}$، دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$، متقارب به‌یك مقدار x_0 از $[a\ ,\ b]$، را می‌توان درآورد: $x_{n_k} \to x_0$، به نحوی که، با توجه به پیوستگی تابع، داشته باشیم

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

در عین حال، از (۵) داریم:

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$$

و در حد

$$f(x_0) \geqslant M$$

ولی $f(x_0)$، نمی‌تواند بزرگتر از مرز بالای M، درمجموعهٔ مقدارهای تابع، باشد. درنتیجه

$$f(x_0) = M$$

آن‌چه لازم بود، ثابت شد.

توجه کنیم که، هردو اثبات، به‌طور خالص، «اثبات وجود» هستند و هیچ وسیلهٔ محاسبه‌ای، مثلاً، برای مقدار $x = x_0$، به‌دست نمی‌دهند. در آینده [فصل چهارم، §۱]، با در نظر گرفتن فرض‌های سنگین‌تری برای تابع، راه عملی پیدا کردن مقدار متغیر مستقل را، که به ازای آن، بیشترین یا کمترین مقدار تابع به‌دست آید، خواهیم آورد.

اگر تابع $f(x)$، به ازای تغییر x در یك بازهٔ $\mathscr{C}$، کران‌دار باشد، آن‌گاه، نوسان آن در این بازه، عبارت است از تفاضل

$$\omega = M - m$$

به زبان دیگر، می‌توان نوسان ω را، مانند کران بالای دقیق (مرز بالای) مجموعهٔ همهٔ تفاضل‌های ممکن $f(x'') - f(x')$ تعریف کرد، که در آن، x' و x''، عبارتند از مقدارهای دلخواهی از بازهٔ $\mathscr{C}$:

$$\omega = \sup \{f(x'') - f(x')\}$$

x' و x'' از $\mathscr{C}$

وقتی که با تابع پیوسته $f(x)$ در بازهٔ بسته و متناهی $\mathscr{C} = [a\ ,\ b]$، سروکار داشته باشیم، همان‌طور که از حکم قضیهٔ ثابت شده برمی‌آید، به‌طور ساده، نوسان عبارت است

از تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در این بازه.

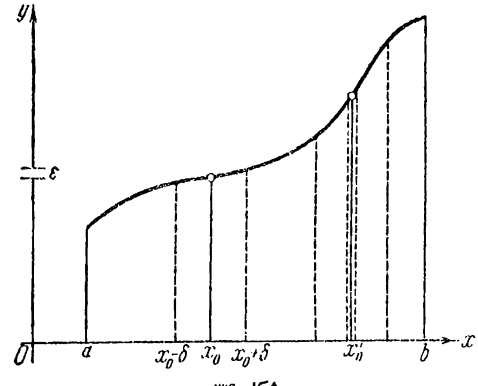
در این حالت بازهٔ $\mathcal{Y}$ مقدارهـای تابع، عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[m, M]$، که نوسان، طول آن‌را به‌دست می‌دهد.

۸۶. مفهوم پیوستگی یکنواخت. اگر تابع $f(x)$، معین در یك بازهٔ $\mathcal{X}$ (بسته یا باز متناهی یا نامتناهی) و پیوسته در نقطهٔ x_0 از این بازه باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

یا [به زبان ε و δ: ۶۶]: برای هـرعدد $\varepsilon > 0$، چنان عـدد $\delta > 0$ پیدا می‌شود، کـه از $|x - x_0| < \delta$ بتوان $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ را نتیجه گرفت.

اکنون فرض کنیم که تابع $f(x)$، درسراسر بازهٔ $\mathcal{X}$، پیوسته است، یعنی درهرنقطهٔ دلخواه x_0 از این بازه، پیوسته است، در این صورت، برای هرنقطهٔ x_0 از $\mathcal{X}$ می‌توان به طور جداگانه و از روی ε مفروض، δ نظیر آن‌را، به‌معنایی که یاد کردیم، به‌دست آورد. وقتی که x_0 در حدود $\mathcal{X}$ تغییر کند، حتی اگر ε تغییر نکند در حالت کلی، عدد δ تغییر خواهد کرد. با یك نگاه به‌شکل ۳۴، روشن می‌شود که عدد δ، بستگی به‌وضع منحنی‌دارد



شکل ۳۴

در آن‌جا که تابع آهسته تغییر می‌کند (منحنی، شیب کمتری دارد)، مقدار δ، بزرگتر از جایی است که، تابع تغییر تندتری دارد (یعنی، شیب منحنی بیشتر است). به بیان دیگر، عدد δ، در حالت کلی، تنها به ε وابسته نیست، بلکه به x_0 هم بستگی دارد.

اگر بحث برسر تعدادی متناهی از مقدارهای x_0 بود (به ازای ε بی‌تغییر)، آن‌گاه از بین تعداد متناهی عددهای نظیر δ، می‌توانستیم، بزرگترین آن‌ها را انتخاب کنیم، و آن را، برای همهٔ نقطه‌های x_0 مورد نظر خود، به‌کار بریم.

ولی وقتی که با مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای x_0 واقع در بازهٔ $\mathcal{X}$، سروکار داریم، نمی‌توانیم بـه این سادگی داوری کنیم، به مقداری‌هـای x_0 (بـا ثابت بودن ε)، مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای δ نظیر است، که بین آن‌ها، ممکن است مقدارهای به‌دلخواه کوچك هم پیدا کرد. به این ترتیب، وقتی بـا تابعی سروکار داشته باشیم که در بازهٔ $\mathcal{X}$ پیوسته است، این پرسش پیش می‌آید: آیا برای ε مفروض، می‌توان δ را چنان پیدا کرد،

که برای همهٔ x_0های این بازه، مناسب باشد؟

اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$، چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود که

$$|x-x_0|<\delta \text{ ، منجر شود به } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

که در آن، x_0 و x در حدود بازهٔ موردنظر $\mathfrak{B}$ قرار دارند، آن وقت، تابع $f(x)$ را پیوستهٔ یکنواخت، در بازهٔ $\mathfrak{B}$، گویند.

در این حالت، عدد δ، تنها به ε بستگی پیدا می‌کند، و می‌توان آن‌را، قبل از x_0، انتخاب کرد: δ برای همهٔ x_0ها، مناسب است.

پیوستگی یکنواخت به‌این معنی است که، در همهٔ بخش‌های بازه، میزان نزدیکی دو مقدار آوند، برای مشخص کردن میزان نزدیکی مقدارهای نظیر تابع، کافی باشد.

روی مثال، می‌توان نشان داد که، پیوستگی تابع در همهٔ نقطه‌های تابع، الزاماً، موجب پیوستگی یکنواخت آن نیست. مثلاً، تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن x بین ۰ و $\frac{2}{\pi}$، به استثنای ۰، واقع باشد. در این حالت، حوزهٔ تغییر x عبارت است از بازهٔ نیم باز $[\frac{2}{\pi}, 0)$ و در هر نقطهٔ آن، تابع پیوسته است. اکنون فرض می‌کنیم $x=\frac{1}{n\pi}$ و $x_0=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ (n، عدد طبیعی دلخواهی است). داریم:

$$f(x)=\sin n\pi=0 \qquad f(x_0)=\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=\pm 1,$$

به نحوی که

$$|f(x)-f(x_0)|=1$$

با وجود آن‌که $|x-x_0|=\frac{1}{n(2n+1)\pi}$، می‌تواند، با بزرگ شدن n، به قدردلخواه کوچك شود. در این‌جا، برای $\varepsilon=1$، نمی‌توان، δ را طوری پیدا کرد که، در عین حال، برای همهٔ نقطه‌های x_0 در $[\frac{2}{\pi}, 0)$، مناسب باشد؛ هرچند، برای هر مقدار جداگانهٔ x_0، با توجه به پیوستگی تابع، می‌توان δ را پیدا کرد!

این مطلب بسیار جالب است که در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، نمی‌توان به چنین وضعی

برخورد کرد. قضیهٔ زیر، که متعلق به‌کانتور (G. Cantor) است، این‌مطلب‌را ثابت‌می‌کند.

۸۷. قضیهٔ کانتور. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a\,,\,b]$، معین و پیوسته باشد، آن‌گاه، تابع دراین بازه، پیوستهٔ یکنواخت است.

اثبات. از برهان خُلف استفاده می‌کنیم. فرض‌کنیم برای یك عدد $\varepsilon>0$، چنان‌عددی برای $\delta>0$ (که با تعریف پیوستگی یکنواخت بسازد)، وجود نداشته باشد. در چنین صورتی، عدد $\delta>0$، هرچه اختیار شود، در بازهٔ $[a\,,\,b]$، چنان مقدارهای x'_0 و x' پیدا می‌شود که

$$\text{از } |x'-x'_0|<\delta \text{ نتیجه شود: } |f(x')-f(x'_0)|\geqslant\varepsilon$$

دنبالهٔ عددهای مثبت $\{\delta_n\}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\delta_n\to 0$.

بنابرآن‌چه گفته شد، به ازای‌هر δ_n، دربازهٔ $[a\ و\ b]$، مقدارهای $x_0^{(n)}$ و $x^{(n)}$ را می‌توان پیدا کرد (این‌ها، نقش x'_0 و x' را به عهده دارند)، به‌نحوی‌که $(n=1,2,3,\dots)$

$$\text{از } |x^{(n)}-x_0^{(n)}|<\delta_n \text{، نتیجه شود: } |f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})|\geqslant\varepsilon$$

بنابرپیش‌قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس [۴۱]، از دنبالهٔ کران‌دار $\{x^{(n)}\}$، می‌توان دنباله‌ای جزئی ـ که متقارب به‌نقطهٔ x_0 از بازهٔ $[a\,,\,b]$ باشد ـ درآورد. برای آن‌که، وضع دشوارتر نشود، فرض می‌کنیم که خود دنبالهٔ $\{x^{(n)}\}$، به‌سمت x_0 میل کند.

چون $x^{(n)}-x_0^{(n)}\to 0$ (زیرا $|x^{(n)}-x_0^{(n)}|<\delta_n$ و $\delta_n\to 0$)، بنابراین، درعین حال، دنبالهٔ $\{x_0^{(n)}\}$ هم، به‌سمت x_0، میل می‌کند. در این صورت، بنابه پیوستگی تابع در نقطه x_0، باید داشته باشیم:

$$f(x^{(n)})\to f(x_0)\quad و\quad f(x_0^{(n)})\to f(x_0)$$

به‌نحوی‌که

$$f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})\to 0$$

و این خلاف آن است‌که برای همهٔ مقدارهای n داشتیم

$$|f(x^{(n)})-f(x_0^{(n)})|\geqslant\varepsilon$$

و قضیه ثابت شد.

از این قضیه، نتیجهٔ سودمند زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه. هرگاه تابع $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a\,,\,b]$، معین و پیوسته باشد، آن گاه، از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان $\delta>0$ را چنان پیدا کرد که، اگر بازه را به بازه‌های جزئی به طول کمتر از δ تقسیم کنیم؛ در هرکدام از آن‌ها، نوسان تابع $f(x)$، کمتر از ε باشد.

در واقع، اگر از روی ε مفروض، به عنوان δ، عددی اختیار شود که با تعریف پیوستگی یکنواخت بسازد، آن‌گاه، در بازهٔ جزئی به‌طول کوچکتر از δ، اختلاف بین دو مقدار دلخواه تابع، از لحاظ قدر مطلق، کمتر از ε خواهد بود. به‌خصوص، این مطلب، در مورد بزرگترین و کوچکترین این مقدارها، که اختلاف بین آن‌ها معرف نوسان تابع در بازهٔ جزئی است [۸۵]، نیز درست است.

۸۸. پیش قضیهٔ بورل. حالا، یك حکم کمکی جالب را ثابت می‌کنیم که شبیه پیش‌قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس است و می‌تواند، در غالب داوری‌ها، سودمند افتد. این قضیه، به‌امیل بورل (E. Borel) تعلق دارد.

به موازی بازهٔ $[a\,,\,b]$، دستگاه Σ، از بازه‌های بازی را در نظر می‌گیریم، که می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. شرط می‌کنیم که دستگاه Σ، بازهٔ $[a\,,\,b]$ را وقتی بپوشاند (یا این بازه، به‌وسیلهٔ دستگاه Σ وقتی پوشانده شود)، که به ازای هر نقطهٔ x از بازهٔ $[a,\,b]$، بتوان در دستگاه Σ، بازه σ را پیدا کرد، به‌نحوی که شامل این نقطه باشد. با این توضیح مقدماتی، تنظیم اثبات حکم بورل، به اندازهٔ کافی، ساده می‌شود.

پیش‌قضیهٔ بورل. اگر بازهٔ بستهٔ $[a\,,\,b]$ به‌وسیلهٔ دستگاه نامتناهی بازه‌های باز $\Sigma=\{\sigma\}$ پوشانده شود، آن‌گاه، همواره می‌توان زیر دستگاهی متناهی

$$\Sigma^*=\{\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\ldots,\,\sigma_n\}$$

را، از آن بیرون آورد، که به‌نوبهٔ خود، تمامی بازهٔ $[a,\,b]$ را می‌پوشاند.

اثبات I. از برهان خُلف استفاده می‌کنیم و روش بولزانو را به‌کار می‌بریم [۴۱]. همچنین، فرض می‌کنیم که بازهٔ $[a,\,b]$ نمی‌تواند با تعدادی متناهی از بازه‌های، از Σ پوشانده شود. بازهٔ $[a,\,b]$ را به دو نیمه، تقسیم می‌کنیم. دست‌کم یکی از نیمه‌های آن، نمی‌تواند با تعداد متناهی σ پوشانده شود؛ در واقع، اگر یکی از آن‌ها می‌توانست با $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m$ (از Σ) و دیگری با بازه‌های σ_{m+1}، σ_{m+2}، ...، σ_n (از Σ) پوشانده شود، آن‌گاه از همهٔ این بازه‌ها، دستگاه متناهی Σ^* به‌دست می‌آید، که تمامی بازهٔ $[a,b]$ را، علی‌رغم فرض، می‌پوشاند. این نیمهٔ بازه را، که با تعداد متناهی σ پوشانده نمی‌شود، به $[a_1\,,\,b_1]$ نشان می‌دهیم (اگر هر دو نیمه دارای چنین خاصیتی باشند، یکی از آن‌ها را، به دلخواه، انتخاب می‌کنیم). این بازه را دو باره به دو نیمه تقسیم می‌کنیم و آن یکی را، که باتعداد متناهی σ پوشانده نمی‌شود، با $[a_2\,,\,b_2]$ نشان می‌دهیم، و همین‌طور تا آخر.

با ادامهٔ این روش، دنباله‌ای نامتناهی، از بازه‌های تو در توی $[a_n\,,\,b_n]$ به دست می‌آید، که هر کدام، نیمی از بازهٔ قبلی را تشکیل می‌دهد. همهٔ این بازه‌ها، این ویژگی را

دارند، که هیچ‌کدام از آن‌ها، بـا تعدادی متناهی از بـازه‌های σ پوشانـده نمی‌شوند. بنا بر پیش‌قضیهٔ بازه‌های تودرتو [۳۸]، نقطهٔ c، مشترك بین همهٔ آن‌ها ، وجود دارد که دو انتهای a_n و b_n، به‌سمت آن، میل می‌کنند.

این نقطهٔ c، مثل همهٔ نقطه‌هـای بازهٔ $[a, b]$، به‌یکی از بازه‌های σ، و مثلاً به‌بازهٔ $\sigma_0 = [\alpha, \beta]$، تعلق دارد، به‌نحوی که $\alpha < c < \beta$. ولی واریانت‌های a_n و b_n، که به‌سمت c میل می‌کنند، با آغاز از شماره‌ای به‌بعد، خودشان هم بین α و β قرار دارند [۱،۲۶°] به‌نحوی که بازهٔ $[a_n, b_n]$، کـه به‌وسیلهٔ آن‌ها معین شده است، تنها بـه‌وسیلهٔ بـازهٔ σ_0 پوشیده شده است. تناقض حاصل، درستی حکم قضیه را ثابت می‌کند.

اثبات دیگری را هـم می‌آوریم کـه بر اندیشه‌نوی تکیه دارد و متعلق بـه له‌بگ (H.Lebesgue) است.

اثبات II. نقطهٔ x^* از بازهٔ $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم، دارای این ویژگی، که بازهٔ $[a, x^*]$، با تعدادی متناهی از بازه‌های σ پوشیده شود. این نقطهٔ x^*، درحالت کلی، پیدا می‌شود، زیرا نقطهٔ a، در یکی‌از σها قـرار دارد، دراین‌صورت، همهٔ نقطه‌هـای نزدیك به‌آن‌هـم، درهمین σ واقع‌انـد و ، درنتیجه، می‌توان نقطـهٔ x^* را؛ مثلاً، از میان آن‌ها انتخاب کرد.

مسالهٔما، عبارت ازاثبات این‌حکم‌است که، نقطهٔ b هم، از جملهٔ نقطه‌های x^* است.

چون، برای همه x^*ها داریم $x^* \leqslant b$، بنابراین

$$\sup\{x^*\} = c \leqslant b$$

وجود دارد [۱۱].

مثل‌همهٔ نقطه‌های $[a, b]$، نقطهٔ c هم به‌یك $\sigma_0 = [\alpha, \beta]$ تعلق دارد $(\alpha < c < \beta)$. ولی، بنا بر ویژگی مرز بالا، می‌توان x_0^* را چنان پیدا کرد که داشته باشیم: $\alpha < x_0^* < c$. بازهٔ $[a, x_0^*]$ با تعدادی متناهی ازبازه‌های σ پوشانده می‌شود (بنا برخود تعریف نقطه‌های x^*)؛ اگر به‌این بازه‌ها، تنها یك‌بازهٔ σ_0 را اضافه‌کنیم، آن‌وقت، همهٔ بازهٔ $[a, c]$ پوشیده می‌شود، به‌نحوی که c، یکی‌از نقطه‌های x^* است.

ضمناً، روشن است که c نمی‌تواند کوچکتر از b باشد، زیرا دراین‌صورت، بین c و β، علی‌رغم تعریف عدد c به‌عنوان مرز بالای همهٔ x^*ها، بازهم نقطه‌های x^* پیدا می‌شود. به‌این ترتیب، به‌ناچار $c = b$. و این، به‌معنای آن است که b یکی از x^*هاست، یعنی بازهٔ $[a, b]$، با تعدادی متناهی از بازه‌های σ پوشانده می‌شود. فهوالمطلوب.

توجه‌کنیم که برای درستی نتیجهٔ پیش قضیه، بـه‌همان اندازه‌که فـرض بسته بودن بازهٔ اصلی $[a, b]$ اساسی است، فرض بـاز بودن بازه‌های σ (که دستگاه $\sum$ را تشکیل

می‌دهند) نیز مهم و اساسی است. مثلاً، دستگاه بازه‌های باز

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots$$

بازهٔ $[1, 0]$ را می‌پوشانند، ولی از آن، نمی‌توان زیر دستگاهی متناهی، با همان ویژگی، به‌دست آورد. به‌همین ترتیب، دستگاه بازه‌های بستهٔ

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right], \ldots$$

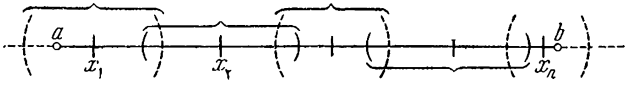
بازهٔ $[2, 0]$ را می‌پوشانند، ولی در این‌جا هم، نمی‌توان، زیر دستگاهی متناهی را بیرون آورد.

۸۹. اثباتی نو برای قضیه‌های اساسی. حالا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از پیش قضیهٔ بورل، برای اثبات قضیه‌های بولزانو ـ کوشی، ویرشتراس و کانتور، دربارهٔ تابع‌های پیوسته، استفاده کرد.

۱°. قضیهٔ اول بولزانو ـ کوشی [۸۵]. این‌بار، آن را با برهان خُلف ثابت می‌کنیم فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، با توجه به‌فرض قضیه، حتی در یک‌نقطه هم، صفر نشود. بنابر پیش‌قضیهٔ شماره ۸۵، هر نقطهٔ x' از بازهٔ $[a, b]$ را، می‌توان با چنان همسایگی $\sigma' = (x'-\delta', x'+\delta')$ احاطه کرد، که در حدود* آن، $f(x)$ دارای علامت ثابتی باشد.

دستگاه نامتناهی $\Sigma = \{\sigma\}$ این همسایگی‌ها، که به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید، تمامی بازهٔ مفروض $[a, b]$ را می‌پوشاند. آن‌گاه، بنابر پیش‌قضیهٔ بورل، تعدادی متناهی از همسایگی‌های نامبرده ـ که دستگاه Σ^* را می‌دهند ـ برای این منظور کفایت می‌کند.

انتهای چپ a، از بازه، به‌یکی از همسایگی‌های Σ^* تعلق دارد، مثلاً به همسایگی $\sigma_1 = (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1)$. انتهای راست $x_1+\delta_1$ این همسایگی، به‌نوبهٔ خود، به‌همسایگی $\sigma_2 = (x_2-\delta_2, x_2+\delta_2)$ از Σ^* متعلق است. نقطهٔ $x_2+\delta_2$، در همسایگی $\sigma_3 = (x_3-\delta_3, x_3+\delta_3)$ از Σ^* واقع است و همین‌طور تا آخر (شکل ۳۵). اگر تعداد محدودی گام به‌سمت راست برداریم، به همسایگی $(\sigma_n = x_n-\delta_n, x_n+\delta_n)$ از



شکل ۳۵

---

*) یعنی در بخش مشترک این همسایگی و بازهٔ $[a, b]$، که تنها در آن، x می‌تواند تغییر کند.

Σ^* می‌رسیم که شامل انتهای راست بازهٔ مفروض می‌شود. اگر Σ^*، شامل بازه‌های دیگری هم، به‌جز

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 , \dots , \sigma_n \qquad (۶)$$

باشد، روشن است که می‌توان، به‌سادگی، از آن‌ها صرف‌نظر کرد.

تابع $f(x)$، در همسایگی σ_1، علامت ثابتی، علامت $f(a)$، را دارد. در σ_2 هم، به‌خاطر تکیه‌ای که σ_1 و σ_2 متقابلاً به‌هم دارند، باید همان علامت $f(a)$ حفظ شود. به‌همین‌ترتیب، تابع در همسایگی σ_3 هم، به‌خاطر اتکای به σ_2، باید همان علامت را حفظ کند و ... سرانجام، به‌این نتیجه می‌رسیم که در همسایگی آخری، یعنی σ_n، هم باید تابع همان علامت $f(a)$ را داشته باشد، یعنی $f(b)$، ازلحاظ علامت، با $f(a)$ یکی می‌شود و این هم، متناقض با فرض است، قضیه ثابت شد.

۲°. قضیهٔ اول ویرشتراس [۸۴]. اگر با توجه به‌پیوستگی تابع $f(x)$، نقطهٔ x' را به هرنحو در بازهٔ $[a, b]$ انتخاب کنیم، با در نظرگرفتن $\varepsilon > 0$، می‌توان، این نقطه را با همسایگی به‌دلخواه کوچك $\sigma' = (x'-\delta' , x'+\delta')$ احاطه کرد، تا برای همهٔ نقطه‌های متعلق به‌آن داشته باشیم:

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

یا

$$f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon$$

به‌این‌ترتیب، درمحدودهٔ هر همسایگی از این نوع، روشن است که تابع $f(x)$، از پایین باعدد $f(x')-\varepsilon$ و از بالا با عدد $f(x')+\varepsilon$، کران‌دار است.

برخواننده روشن است که در این‌جا هم، در دستگاه نامتناهی Σ از همسایگی‌ها، که خاصیت نامبرده را دارند، باید پیش‌قضیهٔ بورل را به‌کار برد. از آن نتیجه می‌شود که در Σ، تعدادی متناهی از همسایگی‌ها (۶) پیدا می‌شود، که در مجموع، همهٔ بازهٔ $[a, b]$ را می‌پوشانند. اگر

$$m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1 \quad (\text{در } \sigma_1)$$

$$m_2 \leqslant f(x) \leqslant M_2 \quad (\text{در } \sigma_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$m_n \leqslant f(x) \leqslant M_n \quad (\text{در } \sigma_n)$$

در آن‌صورت، اگر m را کوچکترین عدد از بین عددهای m_1، m_2، ...، m_n، و M را

بزرگترین عدد از بین عددهای M_1، M_2، ...، M_n بگیریم، به‌روشنی، در تمامی بازهٔ $[a, b]$ خواهیم داشت:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

۳°. قضیهٔ کانتور [۸۷]. عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را مفروض می‌گیریم. این بار، هر نقطهٔ x' از بازهٔ $[a, b]$ را در داخل چنان همسایگی $\sigma' = (x' - \delta', x' + \delta')$ در نظر می‌گیریم، که در حدود آن، این نابرابری برقرار باشد:

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

اگر x_0 نیز نقطه‌ای از این همسایگی باشد، آن‌گاه، در عین حال، خواهیم داشت:

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

به‌این ترتیب، به‌ازای نقطه‌های دلخواه x و x_0 از σ'، داریم:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

هر همسایگی σ' را، با حفظ مرکز آن، نصف می‌کنیم، یعنی به‌جای σ'، این همسایگی را در نظر می‌گیریم:

$$\overline{\sigma'} = \left(x' - \frac{\delta'}{2}, x' + \frac{\delta'}{2}\right)$$

از این همسایگی‌ها هم، دستگاه $\overline{\Sigma}$ تشکیل می‌شود، که بازهٔ $[a, b]$ را می‌پوشاند. در مورد این دستگاه هم، پیش‌قضیهٔ بورل را به‌کار می‌بریم: بازهٔ $[a, b]$، با تعدادی متناهی از بازه‌های مربوط به $\overline{\Sigma}$، پوشیده می‌شود:

$$\overline{\sigma_i} = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

حالا فرض کنید، δ کوچکترین، از میان همهٔ $\frac{\delta_i}{2}$ها و x_0 و x، دو نقطهٔ دلخواه از بازهٔ ما باشند، که در شرط زیر صدق کنند:

$$|x - x_0| < \delta \qquad (۷)$$

نقطهٔ x_0، باید به‌یکی از همسایگی‌های انتخاب شده تعلق داشته باشد، و مثلاً به همسایگی

$$\overline{\sigma_{i_0}} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{۲} , x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{۲}\right)$$

به‌نحوی که داشته باشیم: $|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{۲}$.

چون $\frac{\delta_{i_0}}{۲} \leqslant \delta$، پس با توجه به (۷) $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{۲}$ واز آن‌جا $|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}$،
یعنی، نقطهٔ x (و طبعاً نقطهٔ x_0)، به‌همان همسایگی تعلق دارد که در ابتدا انتخاب کردیم:

$$(x_{i_0} - \delta_{i_0} , x_{i_0} + \delta_{i_0})$$

و با به‌هم‌فشردن آن، همسایگی σ_{i_0} را به‌دست آوردیم. درچنین‌حالتی، بنا به‌خاصیت همهٔ همسایگی‌هایی که در ابتدا انتخاب کردیم

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

از آن‌جا که δ، بدون بستگی به‌وضع نقطهٔ x_0 انتخاب‌شده است، پیوستگی یکنواخت تابع $f(x)$ ثابت می‌شود.

همان‌طور که دیده می‌شود، پیش‌قضیهٔ بـورل را، می‌توان بـا موفقیت در همهٔ آن موردهایی به‌کاربرد که بخواهیم خاصیت «موضعی» مربوط به همسایگی نقطه‌های جداگانه را، برای تمامی بازهٔ مورد بررسی، گسترش دهیم.

MATH75.IR

فصل سوم

مشتق‌ها و دیفرانسیل‌ها

§۱. مشتق و محاسبهٔ آن

۹۰. مسألهٔ محاسبهٔ سرعت حرکت نقطه. از مثالی ساده آغاز می‌کنیم و سقوط آزاد نقطه مـادی وزین را (درخلاء ــ برای آن‌که مقاومت هوا، وجود نداشته باشد)، در نظر می‌گیریم.

شکل ۳۶

اگر زمان t (ثانیه)، از ابتدای سقوط در نظر گرفته شود، فاصلهٔ s (متر) پیموده شده در این زمان، با رابطهٔ معلوم زیربیان می‌شود:

$$s=\frac{g}{۲}t^{۲} \qquad (۱)$$

که در آن $g=۹/۸۱$. بر این اساس، می‌خـواهیم، سرعت v حرکت نقطه را، در لحظه مفـروض t، وقتی کـه نقطـه در وضع M است، تعیین کنیم (شکل ۳۶).

به متغیر t، نمو Δt را می‌دهیم و لحظهٔ $t+\Delta t$ را، وقتی کـه نقطه در وضع $M_۱$ است، درنظر می‌گیریم. نمو $MM_۱$ مسیر، درفاصلهٔ زمانی Δt را، با Δs نشان می‌دهیم.

اگردر (۱)، $t+\Delta t$ را به‌جای t قراردهیم، برای مقدارجدید فاصله، عبارت

$$s+\Delta s=\frac{g}{۲}(t+\Delta t)^{۲}$$

را به‌دست می‌آوریم. ازآن‌جا

$$\Delta s=\frac{g}{۲}(۲t.\Delta t+\Delta t^{۲})$$

اگر Δs را بر Δt تقسیم‌کنیم، سرعت متوسط سقوط نقطه، درجزء $MM_۱$، به‌دست می‌آید:

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}.\Delta t$$

می‌بینیم که این سرعت متوسط، با تغییر Δt، تغییرمی‌کند وهرقدر فاصلهٔ Δt، که‌پس از لحظهٔ t می‌گذرد، کوچکتر باشد، کیفیت سقوط نقطه در لحظهٔ t، بیشتر نمایان می‌شود.

سرعت v نقطه در لحظهٔ t، عبارت است از حدی‌که، سرعت متوسط v_m، در فاصلهٔ زمانی Δt، وقتی‌که Δt به‌سمت ۰ میل کند، به‌سمت‌آن میل می‌کند.

دراین حالت، به‌روشنی دیده می‌شود

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}.\Delta t\right)=gt$$

سرعت v، درحالت کلی حرکت مستقیم‌الخط نقطه، نیز به‌طریق مشابهی، محاسبه می‌شود. موضع نقطهٔ M، با فاصلهٔ s آن، که ازیك نقطهٔ مبداء O درنظر گرفته می‌شود، تعیین می‌شود. این مسافت را، راه پیموده شده می‌نامیم. زمان t هم، ازیك مبداء زمانی، در نظر گرفته می‌شود. ضمناً، اجباری نیست‌که، دراین لحظه، نقطه در O باشد، حرکت وقتی کاملاً مفروض است‌که، معادلهٔ حرکت $s=f(t)$، که از روی‌آن، موضع نقطه درهر لحظهٔ دلخواه مشخص می‌شود، معلوم باشد. درمثال بالا، این نقش، به‌عهدهٔ معادلهٔ (۱) است.

برای تعیین سرعت v، درلحظهٔ مفروض t، همان‌طورکه دیدیم، به t نمو Δt را می‌دهیم و، متناظر با آن، نمومسافت s، یعنی Δs، را به‌دست می‌آوریم، نسبت

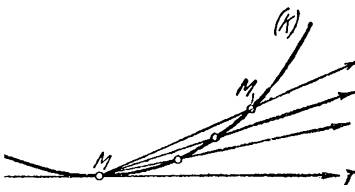
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

سرعت متوسط v_m را دربازهٔ Δt بیان‌می‌کند. سرعت مطلوب v در لحظهٔ t نیز، ازهمین‌جا، وبا گذر به‌حد، به‌دست می‌آید:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}v_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

در زیر، مسالهٔ مهم دیگری را، که به‌عمل حدی مشابهی منجرمی‌شود، می‌آوریم.

۹۱. مسالهٔ رسم مماس برمنحنی. منحنی (K) ونقطهٔ M، روی این منحنی، را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷). به تعریف مماس برمنحنی در نقطهٔ M آن، برمی‌گردیم.



شکل ۳۷

در دورهٔ دبیرستانی، مماس بر دایره، مانند T «خطی‌که با دایره، تنها دارای یك نقطهٔ مشترك»

باشد، تعریف می‌شود. ولی این تعریف، خصلت خاصی دارد که ماهیت امر را آشکار نمی‌سازد. مثلاً، اگر بخواهیم همین تعریف را، برای سهمی $y=ax^2$ به‌کار بریم (شکل ۳۸-a)، در این صورت، در مبداء مختصات O، هر دو محور مختصات، با این تعریف سازگارند. ولی ــ همان‌طور که بی‌تردید برای خواننده روشن است ــ درعمل، تنها محور x در نقطهٔ O، برسهمی مماس است.

بنابراین، برای مماس بر منحنی، باید تعریف کلی‌تری پیدا کرد. برمنحنی (K) (شکل ۳۷)، علاوه بر M، نقطهٔ M_1 را نیز انتخاب می‌کنیم و قاطع MM_1 را می‌کشیم. وقتی نقطهٔ M_1 درطول منحنی تغییر جا بدهد، این قاطع، دور نقطهٔ M می‌چرخد.

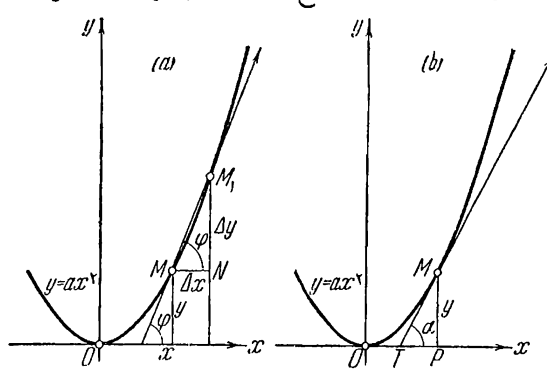
مماس برمنحنی (K) در نقطهٔ M، عبارت است از وضع حدی MT از قاطع MM_1، وقتی که نقطهٔ M_1، در روی منحنی، به‌سمت نقطهٔ M میل کند (مفهوم این تعریف، این است که زاویهٔ M_1MT، تنها وقتی به‌اندازهٔ دلخواه کوچك می‌شود، که وتر MM_1 به قدر کافی کوچك باشد).

به‌عنوان نمونه، این تعریف را، درمورد سهمی $y=ax^2$، در نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ آن، به‌کار می‌بریم. چون مماس از این نقطه می‌گذرد، برای مشخص بودن آن، کافی است، ضریب زاویهٔ آن را بدانیم. بنابراین، به مسالهٔ پیداکردن ضریب زاویهٔ مماس $(tg\alpha)$، در نقطهٔ M می‌رسیم.

به‌طول x، نمو Δx را می‌دهیم، ازنقطهٔ M منحنی به‌نقطهٔ M_1 می‌رسیم که طول آن $x+\Delta x$ وعرض آن، چنین است:

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2$$

(شکل ۳۸). ضریب زاویهٔ قاطع MM_1، یعنی $tg\varphi$، ازمثلث MNM_1 به‌دست می‌آید، که در آن، ضلع MN برابر نمو طول x، و ضلع NM، نمو عرض متناظر آن است:



شکل ۳۸

$$\Delta y = a(2x\cdot\Delta x + \Delta x^2)$$

به‌نحوی که

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\cdot\Delta x$$

روشن است که برای به‌دست‌آوردن ضریب زاویهٔ مماس، باید حد این عبارت را، وقتی $\Delta x \to 0$، پیدا کرد، به‌این ترتیب، سرآخر به‌دست می‌آید:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}(2a\cdot x + a\cdot\Delta x) = 2ax$$

[ضمناً ملاحظه می‌کنیم که، ازهمین جا، می‌توان روش ساده‌ای، برای رسم عملی مماس بر سهمی پیدا کرد. ازمثلث MPT (شکل ۳۸–b)، پاره‌خط

$$TP = \frac{y}{tg\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}$$

چنان است که T وسط پاره‌خط OP می‌شود. بنابراین، برای این‌که مماس برسهمی را در نقطهٔ M رسم کنیم، کافی است، پاره‌خط OP را نصف کنیم و وسط آن را به نقطهٔ M وصل کنیم.]

درحالت کلی، که معادلهٔ منحنی با تابع

$$y = f(x)$$

معین شده باشد، بازهم، ضریب‌زاویهٔ مماس، به‌ترتیب مشابهی به‌دست می‌آید. به‌طول، نمو Δx را می‌دهیم، که درنتیجه، برای عرض، نمو Δy پیدا می‌شود، نسبت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

معرف ضریب زاویهٔ قاطع، یعنی $tg\varphi$، است. ضریب زاویهٔ مماس هم، از روی آن و با گذر به‌حد، وقتی $\Delta x \to 0$، پیدا می‌شود:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

۹۲. تعریف مشتق. اگر به عمل‌هایی که برای‌حل مساله‌های‌اساسی فوق انجام‌دادیم، دقت کنیم، به‌سادگی می‌بینیم که درهردوحالت ــ اگرازاختلافی که درتفسیر متغیرها وجود داشت، صرف‌نظر کنیم ــ اساساً به یک‌ترتیب عمل کرده‌ایم: نمو تابع را برنمو متغیر تقسیم

و، سپس، حد نسبت آن‌ها را محاسبه کرده‌ایم. و به‌این ترتیب، به‌مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل ــ به‌مفهوم مشتق می‌رسیم.

فرض کنیم، تابع $y=f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین باشد. با آغاز از مقدار $x=x_0$ متغییرمستقل، نمو Δx را (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد)، به‌نحوی که آن را از بازهٔ $\mathfrak{D}$ خارج نکند، می‌دهیم: مقدار جدید $x+\Delta x$ هم به بازهٔ $\mathfrak{D}$ تعلق داشته باشد. در این صورت، مقدار $y=f(x_0)$ تابع، به مقدار جدید $y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ تبدیل می‌شود، یعنی برای نمو تابع، خواهیم داشت:

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

حد نسبت نمو تابع Δy، به‌نمو نظیر Δx متغیرمستقل، وقتی $\Delta x\to 0$، یعنی

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

را مشتق تابع $y=f(x)$، نسبت به‌متغیر مستقل x، به‌ازای مقدار مفروض (یا در نقطهٔ مفروض) $x=x_0$ می‌نامند.

به این ترتیب، مشتق در نقطهٔ مفروض $x=x_0$، درصورت وجود، عددی معین است*. اگرمشتق درسراسر بازهٔ $\mathfrak{D}$، یعنی به ازای هرمقدار x دراین بازه، وجود داشته باشد، در آن صورت، این مشتق، تابعی از x خواهد بود.

با استفاده ازمفهومی که دراین‌جا آوردیم، می‌توانیم آن چه راکه در شمارهٔ ۹۰، دربارهٔ سرعت حرکت نقطه گفتیم، به‌این ترتیب، خلاصه کنیم:

سرعت حرکت v، عبارت است ازمشتق مسافت پیموده شدهٔ s، نسبت به‌زمان t.

اگروازهٔ «سرعت» را، به‌مفهوم‌وسیع خود، درنظر بگیریم، می‌توان مشتق را،همیشه، همچون یک «سرعت» تعبیر کرد. وقتی که تابع y را ازمتغیرمستقل x در دست داریم، می‌توان مسالهٔ سرعت تغییر متغیر y، نسبت به متغیر x را (برای مقدارهای مفروض x) مطرح کرد.

اگرنمو Δx، که به‌متغیر مستقل x داده شده است، موجب نمو Δy برای y بشود، دراین صورت، شبیه آن چه درشمارهٔ ۹۰ دیدیم، می‌توان سرعت متوسط تغییر y نسبت به‌x را، وقتی که x به‌اندازهٔ Δx تغییر کرده است، با نسبت زیر نشان داد:

$$V_m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

---

*) فعلا، به‌حالتی اکتفا می‌کنیم که حد مفروض، متناهی باشد [۱۰۱ را ببینید].

طبیعی است که، سرعت تغییر y، در نقطهٔ مفروض x، برابر با این نسبت باشد، وقتی که Δx به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

یعنی درست مشتق y نسبت به x.

در شمارهٔ ۹۱، منحنی مفروض با معادلهٔ $y = f(x)$ را در نظر گرفتیم و مسالهٔ مربوط به‌رسم مماس بر آن، در نقطهٔ مفروض را حل کردیم. اکنون می‌توانیم، نتیجهٔ حاصل را، این طور تنظیم کنیم:

ضریب زاویهٔ مماس، $tg\alpha$، عبارت است از مشتق عرض y نسبت به طول آن.

این تعبیر هندسی مشتق، غالباً مفید می‌افتد.

در تکمیل آن چه تا این جا گفته‌ایم، چند مثال دیگر هم می‌آوریم، تا نقش مفهوم مشتق را روشن‌تر کرده باشیم.

اگر سرعت حرکت v ثابت نباشد و خودش در جریان زمان t تغییر کند: $v = f(t)$، در آن صورت، شتاب را، به‌عنوان «سرعت تغییر سرعت»، در نظر می‌گیریم.

اگر نمو Δt زمان، متناظر با نمو Δv سرعت باشد، در آن صورت، نسبت

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

معرف شتاب متوسط در فاصلهٔ زمانی Δt، و حد آن، شتاب حرکت در لحظهٔ مفروض را، به‌دست می‌دهد:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

به‌این ترتیب، شتاب عبارت است از مشتق سرعت نسبت به‌زمان.

به‌مفهوم گرما بپردازیم، و به‌کمک مشتق، مفهوم ظرفیت حرارتی، در درجهٔ حرارت مفروض را، تعیین کنیم.

کمیت‌های فیزیکی موجود در مساله را، به این ترتیب، علامت گذاری می‌کنیم: θ، درجهٔ حرارت (سانتی گراد)؛ W، مقدار گرمای لازم، تا جسم از ۰ درجه به θ درجه برسد (به‌کالری). روشن است که W تابعی است از θ: $W = f(\theta)$. به θ، نمو $\Delta\theta$ را می‌دهیم. آن‌گاه، W هم دارای نمو ΔW می‌شود. ظرفیت حرارتی متوسط، برای گرم شدن از θ درجه به $\theta + \Delta\theta$ درجه، عبارت است از

$$c_m = \frac{\Delta W}{\Delta \theta}$$

ولی چون، در حالت کلی، با تغییر $\Delta\theta$، مقدار ظرفیت حرارتی متوسط تغییر می‌کند، نمی‌توانیم آن را، به‌عنوان ظرفیت حرارتی مفروض θ اختیار کنیم. برای به‌دست آوردن این ظرفیت حرارتی؛ باید مقدار حدی را پیدا کرد:

$$c = \lim_{\Delta\theta \to 0} c_m = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta \theta}$$

بنابراین می‌توان گفت: ظرفیت حرارتی جسم، عبارت است از مشتق مقدار گرما نسبت به درجهٔ حرارت.

در پایان، مثالی از الکتریسیته می‌آوریم و مفهوم شدت جریان متغیر را در لحظهٔ مفروض، روشن می‌کنیم.

زمان را با t (ثانیه) ــ که از یک لحظهٔ اولیه به‌حساب می‌آید ــ و مقدار الکتریسیته‌ای را که در این مدت، از مقطع عرضی سیم جریان می‌یابد با θ (کولن)، نشان می‌دهیم. روشن است که Q، تابعی است از t: $Q = f(t)$. شدت جریان متوسط برق، در فاصلهٔ زمانی Δt، عبارت است از

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

و شدت جریان، در لحظهٔ مفروض، به‌وسیلهٔ حد

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

بیان می‌شود. یعنی: شدت جریان برق، عبارت است از مشتق مقدار الکتریسیتهٔ جاری نسبت به زمان.

همهٔ این کاربردهای مشتق (که به‌سادگی می‌توان، تعداد آن‌ها را زیاد کرد)، به‌روشنی، این واقعیت را آشکار می‌کنند که مفهوم مشتق، به‌صورتی جدی، با مفهوم‌های اساسی مبحث‌های مختلف آنالیز ریاضی، بستگی دارد.

محاسبهٔ مشتق‌ها، بررسی و مطالعهٔ مشتق‌ها و استفاده از ویژگی‌های آن‌ها، موضوع اصلی محاسبهٔ دیفرانسیلی را تشکیل می‌دهد.

برای نمایش مشتق، نمادهای مختلفی به‌کار می‌رود:

لایب‌نیتس*: (G. W. Leibnitz) $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{df(x_0)}{dx}$

لاگرانژ: (J. L. Lagrange) y' یا $f'(x_0)$

کوشی: (A. L. Cauchy) Dy یا $Df(x_0)$

ما، به‌علامت برتری خود، ازعلامت‌های سادهٔ لاگرانژ استفاده‌خواهیم‌کرد. اگر از علامت تابعی استفاده شود (ستون دوم)، در آن صورت، حرف x_0، در درون پرانتزها، نمایندهٔ مقداری ازمتغیر مستقل است که، به‌ازای آن، مشتق گرفته می‌شود. بالاخره، یادآوری می‌کنیم که اگر دربارهٔ متغیری که نسبت به‌آن مشتق گرفته می‌شود، احتمال تردیدی وجود داشته باشد، این متغیر را، به‌صورت اندیس، قرار می‌دهند:

$$y'_x \text{ ، } f'_x(x_0) \text{ ، } D_x y \text{ ، } D_x f(x_0)$$

ضمناً، علامت x، ارتباطی با مقدارخاص x_0 از متغیرمستقل ــ که به ازای آن مشتق گرفته می‌شود ــ ندارد.

[به‌معنایی، می‌توان گفت که نمادهای «یك پارچه»

$$\frac{df}{dx} \text{ و } f' \text{ یا } f'_x \text{ ، } Df \text{ یا } D_x f$$

نقش علامت تابعی را، برای مشتق تابع، به‌عهده دارند.]

حالا، بـا استفاده از نمادهای مشتق، تعدادی از نتیجه‌گیری‌های قبل را می‌نویسیم.

برای سرعت حرکت داریم:

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ یا } v = s'_t$$

و برای شتاب

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ یا } a = v'_t$$

به‌همین ترتیب، ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y = f(x)$ را، می‌توان، این‌طور نشان داد:

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} \text{ یا } tg\alpha = y'_x$$

---

*) فعلاً، نشانهٔ لایب‌نیتس را، نماد «یك پارچه» درنظر می‌گیریم. بعداً [۱۰۴] خواهیم دید که می‌توان آن را، به‌صورت یك کسر تلقی کرد.

و به‌همین ترتیب تا آخر.

۹۳. مثال‌های محاسبهٔ مشتق. به عنوان مثال، مشتق تابع‌های مقدماتی را محاسبه می‌کنیم:

۱°. قبل ازهمه، به‌این دونتیجهٔ روشن می‌پردازیم: اگر $y=c=\text{const}$، آن‌گاه $\Delta y=0$ (هرچه باشد Δx)، به‌نحوی‌که $y'=0$. اگرهم $y=x$، آن‌گاه $\Delta y=\Delta x$ و $y'=1$.

۲°. حالافرض می‌کنیم $y=x^n$، که درآن، n عددی طبیعی است.

به‌x، نمو Δx را می‌دهیم*، مقدارجدید y چنین می‌شود:

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=$$

$$=x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots$$

به‌نحوی‌که

$$\Delta y=nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\dots$$

چون، به‌ازای $\Delta x\to 0$، همهٔ جمله‌ها، به‌جزاولی، به‌سمت صفرمیل می‌کنند، داریم:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

۳°. اگر $y=\frac{1}{x}$، آن‌گاه $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$، به‌نحوی‌که

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

و

---

*) وقتی‌که‌مشتق، به‌ازای‌مقدار دلخواه‌آوند‌محاسبه می‌شود، درآن‌صورت، معمولاآن را، بدون هیچ‌اندیسی، باهمان‌علامت‌آوند، می‌نویسند.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{۱}{x(x+\Delta x)}$$

و از آن جا

$$y'=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{۱}{x^{۲}}$$

(در این‌جا، حتماً، باید فرض شود: $x\neq ۰$).

۴°. تابع $y=\sqrt{x}$ (برای $x>۰$) را در نظر می‌گیریم. به‌ترتیب، داریم:

$$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x},$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

و سرانجام، با استفاده از پیوستگی ریشه:

$$y'=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

همهٔ این نتیجه‌ها را، می‌توان مانند حالت خاصی از حالت زیر دانست:

۵°. تابع توانی: $y=x^{\mu}$ (μ عددی است حقیقی و دلخواه). حوزهٔ تغییر x، بستگی به μ دارد و ما آن را در ۴۸، ۲° نشان داده‌ایم. داریم (برای $x\neq ۰$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu-۱}\cdot\frac{\left(۱+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-۱}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

که اگر از حدی که در ۷۷ [۵]، (c)] محاسبه کردیم، استفاده کنیم، نتیجه می‌شود*:

$$y'=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-۱}$$

---

*) اگر $\mu>۱$ باشد، به‌سادگی و مستقیماً معلوم می‌شود که به‌ازای $x=۰$ داریم: $y'=۰$.

و درحالت‌های خاص:

اگر $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$، آن‌گاه $y'=(-1)x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$؛

اگر $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$، آن‌گاه $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۶°. تابع نمائی: $y=a^x$ $(a>0$ و $-\infty<x<+\infty)$. داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

که با استفاده ازحد شمارهٔ ۷۷ [(۵)، (b)]، به‌دست می‌آید:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x.\ln a$$

و درحالت خاص:

اگر $y=e^x$، آن‌گاه: $y'=e^x$

بنابراین، سرعت افزایش تابع نمائی (برای $a>1$)، با مقدار خود تابع، متناسب است: هرقدر تابع، مقدارهای بزرگتری را اختیار کند، صعود تابع هم تُندتر خواهد بود. واین، ویژگی رشد تابع نمائی را، به‌خوبی نشان می‌دهد، که ما هم [در ۶۵]، دربارهٔ آن بحث کرده‌ایم.

۷°. تابع لگاریتمی: $y=\log_a x$ $(0<x<+\infty$، $0<a\neq 1)$، دراین حالت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

که با استفاده ازحد شمارهٔ ۷۷ [(۵)، (a)]، به‌دست می‌آید:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a e}{x}$$

که درحالت خاص لگاریتم طبیعی، نتیجهٔ بسیار ساده‌ای حاصل می‌شود:

برای $y=\ln x$ داریم: $y'=\frac{1}{x}$

و این نتیجهٔ (اگرچه، اساساً، چیز تازه‌ای نیست)، می‌تواند دلیلی برای برتری لگاریتم طبیعی، در بررسی‌های مورد نظر باشد.

این کیفیت، که سرعت رشد تابع لگاریتمی (برای $a>1$)، متناسب باعکس مقدار آوند و، ضمناً، مقداری مثبت است و با رشد نامحدود آوند، به سمت صفر میل می‌کند، به‌خوبی، با آن چه، در این‌باره، قبل ازاین [۶۵] گفته‌ایم، مطابقت دارد.

۸°. تابع‌های مثلثاتی. فرض کنیم $y=\sin x$، آن گاه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

که با استفاده ازپیوستگی تابع $\cos x$ و حد معلوم $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ [۵۴، (۸)]، داریم*:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x$$

و به‌طریق مشابهی، به‌دست می‌آید:

اگر $y=\cos x$، آن گاه: $y'=-\sin x$

درحالت $y=\operatorname{tg}x$ داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cos(x+\Delta x)}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$$

---

*) سادگی این دستور، به این دلیل است که زاویه را با رادیان بیان کرده‌ایم. اگرمی‌خواستیم، مثلاً، x را بادرجه اندازه بگیریم، حد نسبت‌سینوسی به‌زاویه، برابر واحد نمی‌شد، بلکه، برای این حد، به‌عدد $\frac{\pi}{180}$ می‌رسیدیم و درنتیجه،

$$(\sin x^\circ)'=\frac{\pi}{180}\cdot\cos x^\circ$$

که از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

ومشابه‌آن

اگر $y = \cot g x$، آن‌گاه $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

۹۴. مشتق تابع معکوس. پیش از آن‌که، به‌محاسبهٔ‌مشتق از تابع‌های معکوس مثلثاتی بپردازیم، قضیهٔ کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. ۱) تابع $f(x)$، درشرط‌های قضیهٔ شمارهٔ ۸۳، دربارهٔ وجود تابع معکوس، صدق می‌کند، ۲) درنقطهٔ x_0، دارای‌مشتق‌متناهی‌ومخالف‌صفر $f'(x_0)$ است. دراین‌صورت، برای تابع معکوس $g(y)$، درنقطه نظیر $y_0 = f(x_0)$، مشتقی برابر $\frac{1}{f'(x_0)}$ وجوددارد.

اثبات. به $y = y_0$، نمودلخواه Δy را می‌دهیم، در این صورت، تابع $x = g(y)$ نیز، نمونظیر Δx را اختیارمی‌کند. توجه‌کنیم که‌به‌ازای $\Delta y \neq 0$، وباتوجه به‌یك‌ارزشی‌بودن خود تابع $y = f(x)$ و $\Delta x \neq 0$، داریم:

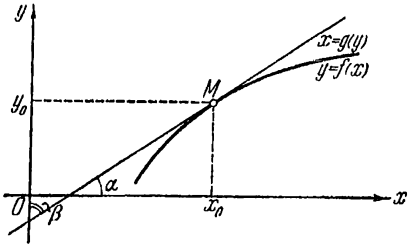
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

حالا اگر، طبق قانونی، Δy به سمت صفرمیل‌کند، بـه اعتبارپیوستگی تابع $x = g(y)$، Δx هم بـه‌سمت صفرمیل می‌کند و، دراین صورت، مخرج سمت راست برابری، به‌سمت $f'(x_0) \neq 0$ میل خواهدکرد. درنتیجه، حد سمت چپ برابری، وجود دارد وبرابراست با $\frac{1}{f'(x_0)}$، که همان مشتق $g'(y_0)$ است.

به‌این ترتیب، دستورسادهٔ زیرپیدا می‌شود:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

مفهوم هندسی این رابطه، به سادگی، روشن می‌شود. می‌دانیم که مشتق y'_x، عبارت است ازتانژانت زاویهٔ α، که مماس برمنحنی تابع $y = f(x)$ با محور x تشکیل می‌دهد.



شکل ۳۹

ولی، تابع معکوس $x=g(y)$ نیز دارای همان نمودار است، تنها متغیر مستقل در مورد آن، روی محور y قرار دارد. به همین دلیل، مشتق x'_y، برابر است با تانژانت زاویه β، که همان مماس با محور y تشکیل می‌دهد (شکل ۳۹). به این ترتیب، دستور بالا، به‌صورت

$$tg\beta=\frac{1}{tg\alpha}$$

درمی‌آید که، در واقع هم، بین تانژانت‌های دو زاویهٔ α و β (به مجموع $\frac{\pi}{2}$) برقرار است.

به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم $y=a^x$، که تابع معکوس آن عبارت است از: $x=log_a y$.

چون داریم $y'_x=a^x\cdot\ln a$ [۶° را ببینید]، بنا به‌دستور فوق

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{log_a e}{y}$$

که با رابطه ۷° تطبیق می‌کند.

حالا، به‌محاسبهٔ مشتق تابع‌های معکوس مثلثاتی می‌پردازیم و، برای سادگی کار، نقش x و y را عوض می‌کنیم و دستور بالا را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

۹°. تابع‌های معکوس مثلثاتی. تابع $y=\arcsin x\ (-1<x<1)$ را در نظر می‌گیریم، ضمناً $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. این تابع، معکوس تابع $x=\sin y$ است، که برای همان مقدارهای y، دارای مشتق مثبت $x'_y=\cos y$ است. در چنین حالتی، مشتق y'_x هم وجود دارد و چنین است:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ریشه را، به‌این مناسبت، با علامت مثبت در نظر گرفتیم که $\cos y>0$.

مقدارهای $x=\pm 1$ را استثنا کردیم، زیرا، به‌ازای مقدارهای نظیر $y=\pm\frac{\pi}{2}$، داریم $x'_y=\cos y=0$.

تابع $y=\operatorname{arc}tgx\ (-\infty<x<+\infty)$، معکوس تابع $x=tgy$ است و داریم:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

و به‌طریق مشابهی، می‌توان به‌دست آورد:

برای $y=\operatorname{arc}\cos x$ داریم: $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$

برای $y=\operatorname{arc}ctgx$ داریم: $y'=-\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<+\infty)$

۹۵. فهرست دستورهای مشتق. همهٔ دستورهای مشتق را، که تا این جا دیده‌ایم، فهرست می‌کنیم:

۱)	$y=c$,	$y'=0$
۲)	$y=x$,	$y'=1$
۳)	$y=x^\mu$,	$y'=\mu x^{\mu-1}$
	$y=\frac{1}{x}$,	$y'=-\frac{1}{x^2}$
	$y=\sqrt{x}$,	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
۴)	$y=a^x$,	$y'=a^x\cdot\ln a$
	$y=e^x$,	$y'=e^x$
۵)	$y=\log_a x$,	$y'=\frac{\log_a e}{x}$
	$y=\ln x$,	$y'=\frac{1}{x}$
۶)	$y=\sin x$,	$y'=\cos x$

۷) $y=\cos x$ $y'=-\sin x$

۸) $y=tgx$ $y'=sec^{۲}x=\frac{۱}{cos^{۲}x}$

۹) $y=cotgx$ $y'=-cosec^{۲}x=-\frac{۱}{sin^{۲}x}$

۱۰) $y=\text{arc}\sin x$ $y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۱) $y=\text{arc}\cos x$ $y'=-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۲) $y=\text{ara}tgx$ $y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$

۱۳) $y=\text{arc}cotgx$ $y'=-\frac{۱}{۱+x^{۲}}$

۹۶. دستور برای نمو تابع‌ها. در این جا، دو حکم ساده را ثابت می‌کنیم، که در آینده، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

تابع $y=f(x)$ را، که در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین است، در نظر می‌گیریم. با آغاز از مقدار معین $x=x_۰$ از این بازه، نمو دلخواه x را با Δx (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد) نشان می‌دهیم. تنها محدودیتی که در نظر می‌گیریم، این است که نقطهٔ $x_۰+\Delta x$ از محدودهٔ $\mathfrak{D}$ تجاوز نکند. در این صورت، نمو نظیر تابع، چنین است:

$$\Delta y=\Delta f(x_۰)=f(x_۰+\Delta x)-f(x_۰)$$

۱°. اگر تابع $y=f(x)$، در نقطهٔ $x_۰$ دارای مشتق (متناهی) $y'_x=f'(x_۰)$ باشد، نمو تابع را می‌توان به‌صورت

$$\Delta f(x_۰)=f'(x_۰)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x) \qquad (۲)$$

یا

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x) \qquad (۲a)$$

نوشت، که در آن، α کمیتی وابسته به Δx است و، همراه با آن، به‌سمت صفر میل می‌کند.

چون بنا به تعریف مشتق، به‌ازای $\Delta x\to ۰$ داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to y'_x$$

درآن‌صورت، با فرض

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'_x$$

معلوم می‌شود که، ضمناً $\alpha\to 0$. اگر Δy را، ازاین‌جا، پیدا کنیم، به‌رابطهٔ (۲a)می‌رسیم.

چون کمیت $a.\Delta x$ (به‌ازای $\Delta x\to 0$)، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از Δx است، دراین صورت، با استفاده از علامتی که درشمارهٔ ۶۰ داشتیم ، می‌توان رابطه را به‌این‌صورت نوشت:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0).\Delta x+o(\Delta x) \qquad (۳)$$

یا

$$\Delta y=y'_x.\Delta x+o(\Delta x) \qquad (۳a)$$

یادداشت. تا این‌جا Δx را مثبت یا منفی گرفتیم؛ کمیت α هم، به‌ازای $\Delta x=0$، نامعین‌می‌شود. وقتی که‌می گوییم، $\alpha\to 0$ به‌ازای $\Delta x\to 0$، به‌این معناست که Δx به‌سمت صفر میل می‌کند، ولی مقدار صفر را اختیار نمی‌کند. حالا فرض‌کنیم $\alpha=0$ به‌ازای $\Delta x=0$؛ درآن‌صورت روشن است که رابطهٔ (۲) برای $\Delta x=0$ هم درست است. علاوه برآن، مفهوم $\alpha\to 0$ به‌ازای $\Delta x\to 0$، را می‌توان به‌معنای وسیع‌تری گرفت: وقتی که می‌گوییم $\Delta x\to 0$، می‌توان حالتی را هم که مساوی صفر می‌شود، استثنا نکرد.

از رابطه‌هایی که ثابت کردیم، مستقیماً نتیجه می‌شود:

۲°. اگر تابع $f(x)$، درنقطهٔ x_0 دارای مشتق متناهی باشد،آن‌گاه، دراین نقطه، الزاماً تابعی پیوسته است.

در واقع، از (۲a) روشن است که از $\Delta x\to 0$، نتیجه می‌شود $\Delta y\to 0$.

۹۷. قانون‌های سادهٔ محاسبهٔ مشتق. تا این‌جا، مشتق تابع‌های مقدماتی را محاسبه کردیم. دراین شماره و شمارهٔ بعد، قاعده‌های ساده‌ای را ثابت می‌کنیم که، به‌کمک آن‌ها، بتوان، مشتق‌هر تابعی را که ازتابع‌های مقدماتی ــ با تعداد متناهی عمل و انطباق [۵۱]ــ به‌دست آمده است، پیدا کرد.

I. فرض‌کنیم، تابع $u=f(x)$ (درنقطهٔ معین x) دارای مشتق u' باشد؛ ثابت می‌کنیم‌که تابع $y=cu$ $(c=\text{const.})$ هم (در همین نقطه) دارای مشتق است، وآن را محاسبه می‌کنیم.

اگر متغیر مستقل x، نمو Δx را اختیار کند، در آن صورت، تابع u، نمو Δu را اختیار می‌کند و از مقدار اولیهٔ u به‌مقدار $u+\Delta u$ می‌رسد. مقدار جدید تابع y، عبارت خواهد بود از $y+\Delta y=c(u+\Delta u)$ و از آن‌جا $\Delta y=c.\Delta u$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=c.u'$$

بنابراین، مشتق وجود دارد و برابر است با

$$y'=(c\cdot u)'=c\cdot u'$$

با این دستور، این قاعده بیان می‌شود: ضریب ثابت را، می‌توان از علامت مشتق‌گیری بیرون آورد.

II. فرض کنیم تابع‌های $u=\varphi(v)$ و $v=\psi(x)$، در نقطهٔ معین، دارای مشتق‌های u' و v' باشند. ثابت می‌کنیم که تابع $y=u\pm v$ نیز دارای مشتق (درهمین نقطه) است و آن را محاسبه می‌کنیم.

به x نمو Δx را می‌دهیم، برای u، v و y به‌ترتیب، نموهای Δu، Δv و Δy به‌دست می‌آید. مقدارهای جدید آن‌ها، $u+\Delta u$، $v+\Delta v$ و $y+\Delta y$، با رابطه

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)$$

به‌هم مربوط‌اند. از این‌جا

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

و

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'$$

به‌نحوی که، مشتق y وجود دارد و برابر است با

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'$$

این نتیجه را می‌توان، به‌سادگی و با همان روش، برای تعداد دلخواه جمله‌ها هم، به‌دست آورد.

III. باتوجه به‌همان فرض‌ها در مورد تابع‌های u و v، ثابت می‌کنیم که تابع $y=u.v$ نیز دارای مشتق است و آن را به‌دست می‌آوریم.

مثل حالت قبل، نمو Δx، نظیر نموهای Δu، Δv و Δy است و ضمناً $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$، به‌نحوی که

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

چون به‌ازای $\Delta x\to 0$، بنابر ۹۶، ۲°، $\Delta v\to 0$، بنابراین

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v'$$

یعنی مشتق y وجود دارد و برابر است با

$$y'=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

اگر فرض کنیم $y=u\cdot v\cdot w$، و ضمنا u' ، v' و w' وجود داشته باشند، آن‌گاه

$$y'=[(uv)\cdot w]'=(uv)'\cdot w+(u\cdot v)\cdot w'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$$

به‌سادگی فهمیده می‌شود که درحالت n عامل به‌طور مشابهی، داریم:

$$\overbrace{(u\cdot v\cdot w\cdots s)}^{n}{}'=u'\cdot v\cdot w\cdots s+u\cdot v'\cdot w\cdots s+u\cdot v\cdot w'\cdots s+\cdots+u\cdot v\cdot w\cdots s'. \qquad (۴)$$

برای اثبات این‌دستور، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، دستور (۴) برای n عامل درست باشد، آن‌وقت، درستی آن را برای $(n+1)$ عامل ثابت می‌کنیم:

$$\overbrace{(u\cdot v\cdot w\cdots s\cdot t)}^{n+1}{}'=[\overbrace{(u\cdot v\cdot w\cdots s)}^{n}\cdot t]'=(u\cdot v\cdot w\cdots s)'\cdot t+(u\cdot v\cdot w\cdots s)\cdot t'$$

اگر مشتق $(u\cdot v\cdot w\cdots s)'$ را از دستور (۴) قرار دهیم، به‌دستور زیر می‌رسیم:

$$(u\cdot v\cdot w\cdots s\cdot t)'=u'\cdot v\cdot w\cdots s\cdot t+u\cdot v'\cdot w\cdots s\cdot t+\cdots$$

$$\cdots+u\cdot v\cdot w\cdots s'\cdot t+u\cdot v\cdot w\cdots s\cdot t'$$

که کاملاً مشابه (۴) است. از آن‌جا که درستی (۴) را برای $n=۲$ و $n=۳$، مستقیماً ثابت کرده‌ایم، این دستور، برای هر n دلخواه درست است.

IV. بالاخره اگر u و v را بافرض‌های قبل داشته باشیم و ، علاوه برآن، v مخالف

صفر باشد، درآن‌صورت ثابت می‌کنیم‌که تابع $y=\frac{u}{v}$ دارای‌مشتق‌است وآن را پیدامی‌کنیم.

شبیه حالت قبل، داریم:

$$x+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

به‌نحوی که

$$\Delta y=\frac{\Delta u.v-u.\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}.v-u.\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v.(v+\Delta v)}$$

که با میل Δx به‌سمت صفر (که هم‌زمان با آن $\Delta v\to 0$)، به‌وجود مشتق متقاعد می‌شویم:

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$$

۹۸. مشتق تابع مرکب. حالا می‌توانیم مهم‌ترین قاعده را، برای پیدا کردن عملی مشتق، بیاوریم. منظور ما، پیدا کردن قاعـده‌ای برای مشتق‌گرفتن از تابع مرکب است، وقتی‌که مشتق‌های تابع‌های تشکیل‌دهنده آن، معلوم باشد.

V. فرض‌کنیم، تابع $u=\varphi(x)$ درنقـطهٔ x_0 دارای مشتق $u'_x=\varphi'(x_0)$ و تـابع $y=f(u)$ درنقطهٔ نظیر $u_0=\varphi(x_0)$ دارای مشتق $y'_u=f'(u_0)$ باشد ، آن‌گاه، تابع مرکب $y=f(\varphi(x))$ هم درنقطهٔ x_0 هم، دارای‌مشتقی برابرحاصل‌ضرب مشتق‌های $f(u)$ و $\varphi(x)$ خواهد بود*:

$$[f(\varphi(x))]'=f'_u(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

یا کوتاه‌تر

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

برای اثبات، بـه x_0 نمو Δx را می‌دهیم. فرض می‌کنیم Δu ، نمـو نظیر تـابع

---

*) یادآوری می‌کنیم‌که نماد $f'_u(\varphi(x_0))$ به‌معنای مشتق تـابع $f(u)$، نسبت به‌آوند u (ونـه نسبت به x)، به‌ازای مقدار $u_0=\varphi(x_0)$ این آوند است.

$u=\varphi(x)$ و Δy نمو نظیر تابع $y=f(u)$ باشد. از دستور (۲a) استفاده می‌کنیم و آن را با تبدیل نقش x به u در نظر می‌گیریم:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α به Δu بستگی دارد و همراه با آن، به‌سمت صفر میل می‌کند). این رابطه را، عضو به‌عضو، بر Δx تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وقتی Δx به‌سمت صفر میل کند، Δu هم به‌سمت صفر میل می‌کند [۲،۹۶°] و، همان‌طور که می‌دانیم، مقدار α وابسته به Δu نیز به‌سمت صفر میل خواهد کرد. در نتیجه، حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

که همان مشتق مطلوب y'_x است.

یادداشت. در این‌جا، اهمیت یادداشت‌شمارهٔ ۹۶، دربارهٔ کمیت α، به‌ازای $\Delta x = 0$ معلوم می‌شود: تا وقتی که Δx، نمو متغیرمستقلی است، می‌توانیم آن را مخالف صفر فرض کنیم، ولی وقتی Δx، با نمو تابع $u=\varphi(x)$ عوض می‌شود، آن‌گاه حتی به‌ازای $\Delta x \neq 0$ حق نداریم $\Delta u \neq 0$ به‌حساب آوریم.

۹۹ چند مثال*. ابتدا چند مثال، برای استفاده از قاعده‌های I تا IV، می‌آوریم.

۱) چندجمله‌ای

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

را در نظر می‌گیریم. بنا بر قاعدهٔ II و، سپس، I، خواهیم داشت:

$$y' = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \cdots + (a_{n-2} x^2)' + (a_{n-1} x)' + (a_n)' =$$
$$= a_0 (x^n)' + a_1 (x^{n-1})' + \cdots + a_{n-2} (x^2)' + a_{n-1} (x)' + (a_n)'$$

که، سرانجام، با استفاده از دستورهای ۱ و ۲ و ۳ [۹۵]، به‌دست می‌آید:

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}$$

۲) $y = (2x^2 - 5x + 1) e^x$. بنا بر قاعدهٔ III

---

*) حرف‌های x ، y ، u ، v را برای متغیرها، و دیگر حرف‌ها را، برای مقدارهای ثابت در نظر گرفته‌ایم.

$$y'=(۲x^۲-۵x+۱)'\cdot e^x+(۲x^۲-۵x+۱)\cdot(e^x)'$$

و با تکیه بر مثال قبل و دستور (۴) [۹۵] داریم:

$$y'=(۴x-۵)\cdot e^x+(۲x^۲-۵x+۱)\cdot e^x=(۲x^۲-x-۴)\cdot e^x$$

۳) $y=\frac{ax+b}{x^۲+۱}$. بنا به قاعدهٔ IV

$$y'=\frac{(ax+b)'(x^۲+۱)-(ax+b)(x^۲+۱)'}{(x^۲+۱)^۲}=$$

$$=\frac{a(x^۲+۱)-(ax+b)\cdot ۲x}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-ax^۲-۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}$$

۴) مشتق تابع $y=tgx$ را، دوباره، از روی رابطهٔ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$، حساب می‌کنیم. با استفاده از قاعدهٔ IV (و دستورهای ۶ و ۷، ۹۵] داریم:

$$y'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^۲x}=\frac{\cos^۲x+\sin^۲x}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

(با ۸، ۹۵ مقایسه کنید).

۵) $y=\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$. در این‌جا بهتر است، ابتدا قاعدهٔ IV و ، سپس، قاعده‌های II و III (و دستورهای ۶ و ۷، ۹۵) را به‌کار بریم:

$$y'=\frac{(x\sin x+\cos x)'(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(x\cos x-\sin x)'}{(x\cos x-\sin x)^۲}=$$

$$=\frac{x\cos x\cdot(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)\cdot(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^۲}=$$

$$=\frac{x^۲}{(x\cos x-\sin x)^۲}$$

محاسبهٔ مشتق صورت و مخرج را، بدون تجزیهٔ آن به گام‌های جداگانه ، انجام دادیم. باید عادت کرد که، حتی‌الامکان، مشتق را یک‌باره نوشت.

و حالا، می‌رسیم، به‌مثال‌هایی، برای محاسبهٔ مشتق تابع‌های مرکب.

۶) فرض می‌کنیم $y=\ln\sin x$، به‌دیگر بیان، $y=\ln u$ و $u=\sin x$. بنا بر قاعدهٔ V،

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$، داریم $y'_u = (\ln u)'_u = \frac{۱}{u}$ (رابطهٔ ۵) که باید به ازای $u = \sin x$ در نظر گرفته شود. بنابراین

$$y'_x = \frac{۱}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x \qquad \text{(رابطهٔ ۶)}$$

۷) $y = \sqrt{۱+x^۲}$، یعنی $y = \sqrt{u}$، که در آن $u = ۱+x^۲$. بنابه‌قاعدهٔ V

$$y'_x = \frac{۱}{۲\sqrt{۱+x^۲}} \cdot (۱+x^۲)' = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \qquad \text{(رابطهٔ ۳، مثال ۱)}$$

۸) $y = e^{x^۲}$، یعنی $y = e^u$، که در آن $u = x^۲$:

$$y'_x = e^{x^۲} \cdot (x^۲)' = ۲x \cdot e^{x^۲} \qquad \text{(۴،۳؛V)}$$

و روشن است که عملاً ضرورتی ندارد، تابع‌های تشکیل‌دهنده را، به‌طور جداگانه محاسبه کنیم.

۹) $y = \sin ax$ ؛ $y'_x = \cos ax (ax)' = a \cdot \cos ax$ (۲،۱،۷؛V)

۱۰) $y = (x^۲+x+۱)^n$ ؛

$$y'_x = n(x^۲+x+۱)^{n-۱}(x^۲+x+۱)' =$$

$$= n(۲x+۱)(x^۲+x+۱)^{n-۱}$$ V؛ ۳، مثال ۱)

۱۱) $y = ۲^{\sin x}$؛

$$y'_x = ۲^{\sin x} \cdot \ln ۲ \cdot (\sin x)' = \ln ۲ \cdot \cos x \cdot ۲^{\sin x} \qquad \text{(۶،۴؛V)}$$

۱۲) $y = \operatorname{arc}tg \frac{۱}{x}$،

$$y'_x = \frac{۱}{۱+\left(\frac{۱}{x}\right)^۲} \cdot \left(\frac{۱}{x}\right)' = \frac{x^۲}{۱+x^۲} \cdot \left(-\frac{۱}{x^۲}\right) = -\frac{۱}{۱+x^۲} \qquad \text{(۳،۱۲؛V)}$$

حالا، به‌حالت‌هایی از تابع مرکب می‌پردازیم که بغرنج‌ترند و باید ازقاعدهٔ V، چندبار متوالی استفاده کرد.

۱۳) $y = \sqrt{tg \frac{۱}{۲}x}$؛ داریم:

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{tg\frac{1}{2}x}}\left(tg\frac{1}{2}x\right)'_x = \qquad (۳;۷)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{tg\frac{1}{2}x}} \cdot \sec^2\frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)'_x = \qquad (۸;۷)$$

$$= \frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\sqrt{tg\frac{1}{2}x}}$$

۱۴) $y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$؛ در این حالت، داریم:

$$y'_x = e^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'_x = \qquad (۴;۷)$$

$$= e^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)'_x = \qquad (۳;۷)$$

$$= e^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'_x = \qquad (۶;۷)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2\frac{1}{x}} \qquad (۳;۷)$$

بازهم چند مثال، در کاربرد همهٔ قاعده‌ها.

۱۵) $y = \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$؛

$$y' = \frac{1}{2}[(e^x)'_x - (e^{-x})'_x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}x$$

برعکس، اگر $y = \operatorname{ch}x$، آن‌گاه $y' = \operatorname{sh}x$. بالاخره، به مانند ۴)، به سادگی به‌دست می‌آید:

اگر $y = \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$، آن‌گاه: $y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

اگر $y = \operatorname{cth}x$، آن‌گاه: $y' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

(۱۶ $$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

$$y'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

همین نتیجه را می‌شد از راه دیگری هم به‌دست آورد. می‌دانیم [۴۹، ۴)] که تابع $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$، عکس تابع $y=\operatorname{sh}x$ است، بنابراین [۹۴؛ مثال ۱۵؛ ۴۸، ۶°]

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\operatorname{ch}y}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2y+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(۱۷ $$y=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y'=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+a^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{(\sqrt{x^2+a^2})^2}=\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(۱۸ $$y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\quad(-1<x<1);$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

(۱۹ $$y=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\quad(\text{با فرض } b-ac>0);$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\left[\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}-\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right]=$$

$$=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$$

(۲۰ $y=\frac{۲}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}$ (با فرض $ac-b>۰$)؛

$$y'=\frac{۲}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{ax+b}{ac-b}}\cdot\frac{۱}{۲\sqrt{ax+b}}\cdot\frac{a}{\sqrt{ac-b}}=\frac{۱}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$$

(۲۱ $y=\frac{۱}{\sqrt{a^۲-b^۲}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$ $\left(|b|<a;\ -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$؛

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{a^۲-b^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^۲}}\times$$

$$\frac{a\cos x\cdot(a+b\sin x)-(a\sin x+b)\cdot b\cos x}{(a+b\sin x)^۲}=\frac{۱}{a+b\sin x}$$

(۲۲ $y=\frac{۱}{\sqrt{b^۲-a^۲}}\ln\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^۲-a^۲}\cdot\cos x}{a+b\sin x}$ $(|a|<|b|)$؛

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{b^۲-a^۲}}\left[\frac{a\cos x+\sqrt{b^۲-a^۲}\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^۲-a^۲}\cos x}-\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right]=$$

$$=\frac{۱}{a+b\sin x}$$

۲۳) مسالهٔ مربوط به‌مشتق تابع نما ـ توانی $y=u^v$ $(u>۰)$ را، به‌عنوان یك‌مثال، مورد بررسی قرار می‌دهیم، که در آن، u و v، تابع‌هایی از x و در نقطهٔ مفروض، دارای مشتق‌های u' و v' هستند.

اگر از رابطهٔ $y=u^v$، لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\ln y=v\cdot\ln u \qquad (۵)$$

بنابراین، عبارت y را، می‌توان به صورت $y=e^{v\ln u}$ نوشت؛ از این جا، روشن است که مشتق y' وجود دارد. خود محاسبهٔ این مشتق را هم، می‌توان به‌سادگی و با برابر قرار دادن مشتق‌دوطرف تساوی (۵)، نسبت به x، به‌دست آورد. این‌بار، از قاعده‌های V و III استفاده می‌کنیم (با یادآوری این‌نکته که u و v، تابع‌هایی از x هستند)، داریم:

$$\frac{۱}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{۱}{u}\cdot u'$$

و ازآن‌جا

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u\right)$$

که با قراردادن مقدار y، به‌دست می‌آید:

$$y' = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u\right)$$

این دستور، نخستین‌بار، به‌وسیلهٔ لایب‌نیتس و یوهان برنولی (Johan Bernoulli)، ثابت شد.

به‌عنوان مثال:

اگر $y = x^{\sin x}$، آن‌گاه: $y'_x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos y \cdot \ln x\right)$

۲۴) به‌فرض‌آن‌که، تابع $f(x)$ دارای مشتق $f'(x)$ باشد، مشتق هرکدام از تابع‌های زیر را بنویسید:

a) $\sin f(x)$، b) $e^{f(x)}$، c) $\ln f(x)$

(نسبت به x)، و مشتق تابع‌های

d) $f(\sin t)$، e) $f(e^t)$، f) $f(\ln t)$

(نسبت به t).

پاسخ: a) $\cos f(x) \cdot f'(x)$ ، b) $e^{f(x)} \cdot f'(x)$ ، c) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ؛

d) $f'(\sin t) \cdot \cos t$ ، e) $f'(e^t) \cdot e^t$ ، f) $f'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}$.

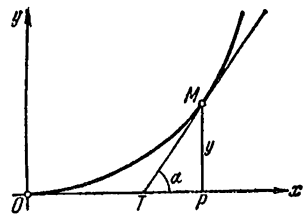
به‌بهانهٔ سه‌مثال آخری d)، e) و f)، توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که نماد $f'(\ldots)$ به‌معنای‌مشتق‌نسبت به‌آوند xاست، اگرتابع را به‌صورت $f(x)$ درنظر بگیریم؛ در مثال‌های ما، این آوند به‌ترتیب عبارت است از $x = \sin t$ ، $x = e^t$ و $x = \ln t$، که ضمناً تابعی از t هستند. با زیرصفحهٔ مربوط به‌شمارهٔ ۹۸ (صفحهٔ ۲۵۰) مقایسه کنید.

۲۵) تابع $f(x)$، معین در بازهٔ متقارن نسبت به O را زوج گویند، به‌شرطی‌که $f(-x) = f(x)$، وفرد گویند، به‌شرطی‌که $f(-x) = -f(x)$ (نمونه‌های‌تابع زوج را می‌توان‌تواهای زوج x^2 ، x^4 ،... و همچنین $\cos x$ و $\operatorname{ch} x$ ونمونه‌های تابع فرد را،

توان فرد x^3 ، x^5 ، ... و همچنین $\sin x$ و $\operatorname{sh} x$، به‌حساب آورد).

ثابت کنید، مشتق تابع زوج (درصورت وجود)، یك تابع فرد ومشتق تابع فرد، یك تابع زوج است.

۲۶) مشتق تابع $y=\ln|x|$ را، وقتی که x می‌تواند مثبت یا منفی باشد، پیدا کنید.



شکل ۴۰

برای $x>0$ ، روشن است که $y'=\frac{1}{x}$. ثابت‌می‌کنیم که همین‌دستور، برای $x<0$ نیز درست است. اگر دراین‌حالت، شبیه یك تابع مرکب، عمل کنیم، برای تابع

$$y=\ln|x|=\ln(-x)$$

خواهیم داشت:

$$y'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

۲۷) منحنی تابع

$$y=a\cdot x^m \qquad (m>0)$$

را درنظر می‌گیریم. ضریب زاویهٔ مماس برآن، درنقطهٔ $(x;y)$ آن، عبارت‌است از [۹۱-۹۲]:

$$tg\,\alpha=y'=max^{m-1}$$

از روی شکل ۴۰ دیده می‌شود که پاره‌خط TP (که «زیر مماس» نام دارد)، برابر است با

$$TP=\frac{y}{tg\,\alpha}=\frac{ax^m}{max^{m-1}}=\frac{x}{m}$$

و این‌نتیجه، روش‌رسم‌مماس را، برمنحنی‌مفروض، نشان می‌دهد (تعمیم نتیجهٔ شمارهٔ ۹۱).

۲۸) برای منحنی («منحنی زنجیری»)

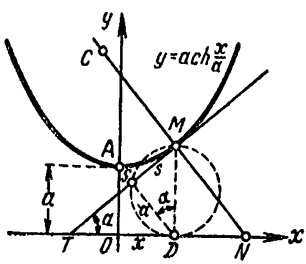
$$y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a} \qquad (a>0)$$

داریم:

$$tg\,\alpha = y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$$

این‌بار (با فرض $x > 0$) داریم:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{a}{y}$$



شکل ۴۱

به‌طوری که $y \cdot \cos\alpha = a$. اگر از انتهای D عرض $y = DM$ (شکل ۴۱)، عمود DS را برمماس MT فرود آوریم، در آن‌صورت، پاره‌خط DS برابر a خواهد بود. از این‌جا، وسیلهٔ ساده‌ای، برای رسم مماس بر منحنی مفروض به دست می‌آید: نیم‌دایره‌ای به‌قطر عرض DM رسم می‌کنیم و به مرکز D و شعاع a، نقطهٔ S را معین می‌کنیم. خط MS، در نقطهٔ M، بر منحنی مماس است.

۲۹) فرض کنیم، نقطهٔ مادی، بر روی محور، نزدیک وضع مرکزی، از روی قانون زیر، نوسان می‌کند:

$$s = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \qquad (A, \omega > 0)$$

چنین نوسانی را، نوسان همساز (هارمونیک) می‌گویند، که A دامنه (آمپلیتود)، ω بسامد (فرکانس) و α فاز آن می‌باشد.

اگر از مسافت s نسبت به‌زمان t، مشتق بگیریم، سرعت حرکت به‌دست می‌آید:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

بزرگترین مقدار سرعت، یعنی $\pm A\omega$، مربوط به لحظه‌ای است که $s = 0$ داشته باشیم، یعنی نقطه از وضع مرکزی می‌گذرد. برعکس، وقتی که نقطه در دورترین فاصله از این وضع باشد ($s = \pm A$)، سرعت $v = 0$ است.

مشتق v نسبت به t

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

شتاب حرکت را به‌دست می‌دهد. دیده می‌شود که

$$a = -\omega^2 s$$

از این‌جا، اگر جرم m نقطهٔ متحرك را واردکنیم. بنابر قانون نیوتون، نیروی F که بر اثر آن، نوسان همساز انجام می‌شود، با این رابطه بیان می‌شود:

$$F = -m\omega^2 s$$

به‌طوری که می‌بینیم، این نیرو، همواره در جهت وضع مرکزی است (علامتی عکس علامت s دارد) و با فاصلهٔ نقطه از این وضع متناسب است.

۳۰) حرکتی که طبق قانون

$$s = A.e^{-kt}\sin\omega t \qquad (A, k, \omega > 0)$$

انجام شود، حرکت نوسانی میرا نامیده می‌شود، زیرا وجود عامل e^{-kt} موجب می‌شود که نقطه، همچنان‌که در نزدیکی وضع مرکزی نوسان می‌کند، به‌سمت آن میل کند.

$$\lim_{t\to+\infty} s = 0$$

در این حالت

$$v = s'_t = Ae^{-kt}(\omega.\cos\omega t - k.\sin\omega t)$$

و

$$a = v'_t = -Ae^{-kt}(\omega^2\sin\omega t + 2\omega k\cos\omega t - k^2\sin\omega t)$$

که اگر جملهٔ $\pm k^2\sin\omega t$ را در پرانتز واردکنیم، پس از تبدیل ساده‌ای، خواهیم داشت:

$$a = -Ae^{-kt}[(\omega^2+k^2)\sin\omega t + 2k(\omega.\cos\omega t - k\sin\omega t)] =$$
$$= -(\omega^2+k^2)s - 2kv$$

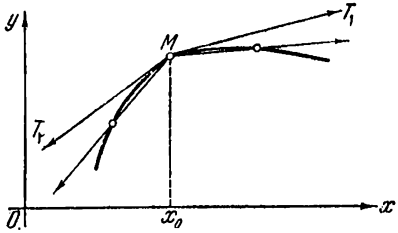
و نیروئی که، زیر تاثیر آن، این حرکت انجام می‌پذیرد، برابر است با

$$F = -(\omega^2+k^2)ms - 2kmv$$

می‌بینیم که این نیرو، از دو نیرو تشکیل‌شده است: ۱) نیرو، متناسب با فاصلهٔ نقطه تاوضع مرکزی ودر جهت این وضع است (درست، مثل نوسان‌های همساز) و ۲) نیروی ترمزکنندهٔ حرکت، متناسب با سرعت و در جهت عکس سرعت است.

۱۰۰. مشتق یك طرفه. در خاتمه، به‌بعضی قاعده‌های خاص می‌پردازیم که‌می‌توانند بامشتق مربوط باشند. ازمفهوم مشتق‌های یك‌طرفه آغازمی‌کنیم. فرض کنیم، تابع $y = f(x)$ در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین باشد و بخواهیم مشتق آن را، دریکی از دو نقطهٔ انتهایی این بازه، به‌دست آوریم. در چنین حالتی، وقتی که می‌خواهیم حد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را، پیدا کنیم: تنها می‌توانیم Δx

را از طرف راست (اگر صحبت از انتهای چپ بازه باشد) و یا از طرف چپ (وقتی که با انتهای راست سروکار داریم) به سمت صفر میل دهیم. در این حالت، با مشتق یک‌طرفه سروکار داریم: مشتق از راست یا مشتق از چپ.



شکل ۴۲

در چنین نقطه‌ای، منحنی تابع، دارای مماس یک‌طرفه است.

برای مقدارهای داخلی بازهٔ $\mathscr{D}$ هم ممکن است، تنها حد یک‌طرفهٔ نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (به‌ازای $\Delta x \to +0$ یا $\Delta x \to -0$) وجود داشته باشد، یعنی این دو حد با هم برابر نباشند. در این مورد هم، آن‌ها را، مشتق‌های یک‌طرفه گویند. برای منحنی تابع، درچنین نقطه‌هایی، تنها مماس‌های یک‌طرفه وجود دارد، به نحوی که باهم، زاویه‌ای را تشکیل می‌دهند و، به همین مناسبت، منحنی را، در این نقطه، زاویه‌ای گویند (شکل ۴۲).

به عنوان مثال. تابع $y = f(x) = |x|$ را در نظر می‌گیریم. با آغاز از مقدار $x = 0$، داریم:

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|$$

اگر $\Delta x > 0$. آن‌گاه $\Delta y = \Delta x$ و

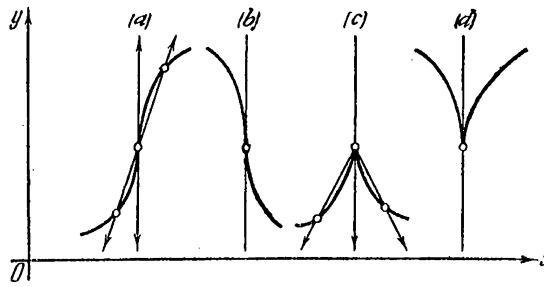
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

و اگر $\Delta x < 0$، آن‌گاه $\Delta y = -\Delta x$ و

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

نمودار این تابع، از نیمسازهای دوربع اول و دوم مختصات تشکیل‌شده است و، همان‌طور که می‌بینیم، این نمودار در مبداء مختصات، بایک نقطهٔ زاویه‌ای سروکار دارد.

۱۰۱. مشتق نامتناهی. اگر نسبت نموها، یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، بامیل Δx به‌سمت صفر، به‌سمت $+\infty$ (یا $-\infty$) میل کند، بازهم آن را مشتق تابع به‌حساب می‌آورند (و طبق معمول هم آن را نشان می‌دهند). مفهوم مشتق نامتناهی یک‌طرفه را هم، به‌ترتیب مشابهی، می‌توان توضیح داد. تعبیر هندسی مشتق را، به عنوان ضریب زاویهٔ مماس، در این‌جا هم می‌توان به کار برد. در این حالت، مماس بر منحنی، موازی محور y خواهد بود (شکل ۴۳، a)، b)، c) و d)).



شکل ۴۳

در حالت‌های a) و b)، این مشتق، به‌ترتیب، برابر $+\infty$ و $-\infty$ (برای هردو مشتق یك‌طرفه) می‌باشند و در حالت‌های c) و d)، مشتق‌های یك‌طرفه، علامت‌های مختلف دارند.

به عنوان مثال، $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $(x\neq 0)$ را در نظر می گیریم. از دستور ۳، شمارهٔ ۹۵ داریم:

$$f'_1(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

و این مشتق، برای $x=0$ بی‌معناست. با استفادهٔ مستقیم از تعریف مشتق، مشتق تابع را در این نقطه محاسبه می کنیم؛ نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f_1(0+\Delta x)-f_1(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$$

می بینیم که حدآن، وقتی $\Delta x\to 0$، برابر است با $+\infty$. به همین ترتیب، می‌توان دوشن کرد که برای تابع $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$، به‌ازای $x=0$، مشتق ازسمت چپ برابر $-\infty$ و از سمت راست برابر $+\infty$ است.

با استفاده از مفهوم گسترده‌تر مشتق، می‌توان قضیهٔ شمارهٔ ۹۴ در بازهٔ مشتق تابع معکوس را، با اشاره‌ای، تکمیل کرد: درحالت‌هایی که $f'(x_0)$ برابر 0 یا $\pm\infty$ می‌شود، مشتق تابع معکوس، یعنی $g'(y_0)$، وجود دارد و، به ترتیب، برابر است با $\pm\infty$ و 0. مثلاً، چون تابع $y=\sin x$، به‌ازای $x=\pm\frac{\pi}{2}$، دارای مشتق $\cos(\pm\frac{\pi}{2})=0$ است، پس برای تابع معکوس $\arcsin y$، به ازای $y=\pm 1$، مشتق نامتناهی (و به‌خصوص $+\infty$)

وجود دارد.

۱۰۲. چند مثال دیگر از حالت‌های خاص. ۱°. مثال‌هایی ازعدم وجودمشتق.دیدیم که تابع $y=|x|$، در نقطهٔ $x=0$، دارای مشتق دوطرفهٔ معمولی نیست، ولی مثال تابع زیر جالب‌تر است:

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0) \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

که در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است [۷۰، ۵)]، ولی در این نقطه، حتی‌مشتق یك‌طرفه هم ندارد. در واقع نسبت

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

به ازای $x\to \pm 0$، به‌سمت هیچ حدی میل نمی‌کند.

از روی نمودار این تابع (شکل ۲۴)، به‌سادگی دیده می‌شودکه قاطع OM_1ـ که از مبداء O رسم شده است ـ با میل M_1 بـه سمت O، هیچ وضع مشخصی پیدا نمی‌کند، به‌طوری‌که مماس بر منحنی در مبداء وجود ندارد (حتی مماس یك‌طرفه).

بعداً (در جلد دوم)، با نمونه تابع‌هایی آشنا خواهیم شدکه، به‌ازای همهٔ مقدارهای آوند پیوسته‌اند، ولی حتی در یکی از آن‌ها، هم، دارای مشتق نیستند.

۲°. چند مثال از مشتق‌های ناپیوسته. اگر برای تابـع مفروض $y=f(x)$، مشتق متناهی $y'=f'(x)$، در هر نقطه ازبازهٔ $\mathfrak{P}$، وجود داشته باشد، آن‌گاه، این مشتق، به‌نوبهٔ خود، در بازهٔ $\mathfrak{P}$، تابعی از x است. در مثال‌های زیادی کـه تا این‌جا دیده‌ایم، خود این تابع، پیوسته بود. ولی، ممکن است، چنین نباشد. مثلاً، این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0) \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

مشتق این تابع، در حالت $x\neq 0$، با روش معمولی محاسبه می‌شود:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

ولی نتیجهٔ حاصل، برای $x=0$ به درد نمی‌خورد، مستقیماً، به تعریف مشتق در این نقطه، مراجعه می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

ضمناً، روشن است که $f'(x)$، به‌ازای $x \to 0$، به‌سمت هیچ‌حدی میل نمی‌کند، به نحوی که تابع $f'(x)$، در نقطهٔ $x=0$، دارای ناپیوستگی است.

همین نتیجه، برای هر تابع به‌صورت زیر، درست است (تنها باشرط $1<\alpha<2$):

$$f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0) \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

در این مثال‌ها ناپیوستگی مشتق، از نوع دوم است؛ و این امر، تصادفی نیست: خواهیم دید [۱۱۳]، که ناپیوستگی نوع اول، یعنی جهش، برای مشتق، ممکن نیست.

§۲. دیفرانسیل

۱۰۳. تعریف دیفرانسیل. تابع $y=f(x)$ را در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین و در نقطهٔ مفروض x_0 پیوسته می‌گیریم. در این صورت، نمو Δx آوند، منجر به نمو Δy می‌شود:

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

این Δy، همزمان با Δx، یك بی‌نهایت‌کوچك است. این مطلب بسیارمهم است که: آیا برای Δy، بی‌نهایت‌کوچك $A\cdot\Delta x$ $(A=\text{const.})$ وجود دارد که تفاضل آن‌ها درمقایسه با Δx، بی‌نهایت کوچکی از مرتبه بالاتر باشد:

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad (1)$$

برای $A\neq 0$، وجود تساوی (۱) نشان می‌دهد که بی‌نهایت‌کوچك $A\cdot\Delta x$، با بی‌نهایت کوچك Δy، هم‌ارز است، یعنی اگر بی‌نهایت کوچك اصلی را Δx بگیریم، $A\cdot\Delta x$، جزء اصلی Δy می‌شود [۶۲، ۶۳].

اگر برابری (۱) برقرار باشد، تابع $f(x)$ را دیفرانسیل‌پذیر یا قابل دیفرانسیل‌گیری (در نقطهٔ مفروض $x=x_0$) گویند، و خود عبارت $A\cdot\Delta x$، دیفرانسیل تابع نامیده می‌شود و به‌صورت dy یا $df(x_0)$ نشان‌داده می‌شود.

[در نماد $df(x_0)$، در داخل پرانتز، مقدار اولیهٔ x، نشان داده شده است*].

یك بار دیگر تکرار می‌کنیم که، دیفرانسیل تابع با دو ویژگی مشخص می‌شود: (a) به‌صورت تابعی خطی (متجانس) از نمو Δx آوند و (b) تفاوت آن با نمو تابع، کمیتی است که وقتی $\Delta x \to 0$، به صورت بی‌نهایت‌کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از Δx درمی‌آید.

---

*) نماد df، همچون نمادی یك پارچه و یگانه، نقش علامت‌گذاری تابعی را به‌عهده دارد.

به چند مثال می‌پردازیم.

۱) مساحت Q از دایرهٔ به شعاع r، ازدستور $Q=\pi r^2$ به‌دست می‌آید. اگر شعاع r، به‌اندازهٔ Δr نمو کند، نمو نظیر ΔQ از کمیت Q، عبارت است ازمساحت حلقه‌دایره‌ای واقع در بین دایره‌های هم مرکز، به‌شعاع‌های r و $r+\Delta r$. از عبارت

$$\Delta Q=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r.\Delta r+\pi(\Delta r)^2$$

بلافاصله معلوم می‌شود که جزء اصلی ΔQ، وقتی $\Delta r \to 0$، عبارت است از $2\pi r.\Delta r$؛ و این، همان دیفرانسیل dQ است، که از نظر هندسی، معرف مساحت مستطیلی است [اگر «حلقهٔ دایره‌ای» را باز کنیم] با قاعده‌ای برابر $2\pi r$ (محیط دایره) و ارتفاع Δr.

۲) به‌همین ترتیب برای حجم $V=\frac{4}{3}\pi r^3$، ازکرهٔ به شعاع r، به ازای افزایش r به‌اندازهٔ Δr، نمو زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta V=\frac{4}{3}\Delta(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2.\Delta r+4\pi r(\Delta r)^2+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3$$

و روشن است که جزء اصلی آن، وقتی $\Delta r \to 0$، برابر است با $dV=4\pi r^2.\Delta r$؛ که عبارت است از حجم قشر مسطحی باقاعدهٔ برابر $4\pi r^2$ ـسطح کره‌ـ و ارتفاع Δr: دراین قشر، در واقع، حجمی قرار گرفته است‌که بین دو کرهٔ هم مرکز به‌شعاع‌های r و $r+\Delta r$ واقع است.

۳) بالاخره، به سقوط آزاد نقطهٔ مادی، تحت قانون $s=\frac{1}{2}gt^2$ می‌پردازیم. در فاصلهٔ زمانی Δt (از t تا $t+\Delta t$)، نقطهٔ متحرك، راه

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2=gt.\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2$$

را می‌پیماید‌که، وقتی $\Delta t \to 0$، جزء اصلی‌آن عبارت است از $ds=gt.\Delta t$. با توجه به این‌که سرعت درلحظه t، عبارت است از $v=gt$ [۹۰]، می‌بینیم‌که دیفرانسیل راه پیموده شده (که می‌توان، به تقریب، آن را، نمو این مسافت دانست)، به این معناست که راه طی شده را، این طور در نظر بگیریم که نقطهٔ مفروض، تمام‌آن‌را، درفاصلهٔ زمانی Δt، باهمین سرعت پیموده باشد.

۱۰۴. رابطهٔ بین دیفرانسیل‌پذیری و وجود مشتق. اکنون، به‌سادگی، می‌توان این حکم را ثابت کرد:

برای آن‌که تابع $y=f(x)$، درنقطهٔ x_0، دیفرانسیل‌پذیر باشد، لازم و کافی است که، برای آن دراین نقطه، مشتق متناهی $y'=f'(x_0)$ وجود داشته باشد. برای برقراری این شرط، تساوی (۱) برای کمیت ثابتی از A، که برابراین مشتق است، صادق خواهد بود:

$$\Delta y = y'_x \Delta x + O(\Delta x) \qquad (1a)$$

شرط لازم است. اگر (۱) برقرار باشد، داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

به‌طوری که، با میل Δx به‌سمت ۰، در واقع، به‌دست می‌آید:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$$

شرط کافی است. مستقیماً و از **۹۶**، ۱ [3a را ببینید]، نتیجه می‌شود.

به‌این‌ترتیب، دیفرانسیل تابع $y=f(x)$، همواره برابراست با*

$$dy = y'_x \cdot \Delta x \qquad (۲)$$

خاطرنشان می‌کنیم که، در این عبارت، Δx به‌معنای نمو دلخواه متغیر مستقل است، یعنی عددی نامشخص (که غالباً بهتراست، مستقل از x به‌حساب آید). ضمناً، اصلاً اجباری نیست که Δx، بی‌نهایت کوچك فرض شود، والا اگر $\Delta x \to 0$، آن‌گاه، دیفرانسیل dy هم، بی‌نهایت کوچك‌خواهدبود، و (به‌ازای $y'_x \neq 0$)، دراین حالت، جزء اصلی بی‌نهایت کوچك dy را تشکیل می‌دهد. همین مطلب، اساس فرض تقریبی

$$\Delta y \doteq dy \qquad (۳)$$

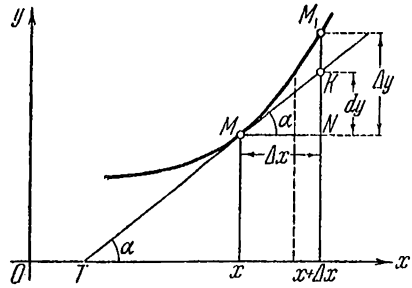
را به‌دست می‌دهد، که هرقدر Δx کوچکتر باشد، بیشتر به‌حقیقت نزدیك است. در **۱۰۷**، دوباره به‌برابری تقریبی (۳) برخواهیم گشت.

برای تعبیرهندسی دیفرانسیل dy و رابطهٔ آن با نمو Δy تابع $y=f(x)$، به

---

*) به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، درهمهٔ مثال‌های قبلی، دیفرانسیل، به‌همین شکل تشکیل می‌شود. مثلاً، درحالت اول داریم:

$$Q=\pi r^2 \quad , \quad Q'_r = 2\pi r \qquad dQ = 2\pi r \cdot \Delta r$$



شکل ۴۴

نمودار این تابع (شکل ۴۴) مراجعه می‌کنیم. مقدارهای x آوند و y تابع، نقطهٔ M از منحنی را معین می‌کنند. مماس MT برمنحنی را، دراین نقطه، رسم می‌کنیم، همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم [۹۲]، ضریب زاویهٔ آن ، $tg\alpha$، برابراست با مشتق y'_x. اگر به‌طول x، نمو Δx را بدهیم، برای عرض y هم،نمو $\Delta y = NM_1$ به‌دست می‌آید. درعین حال، عرض مماس، نمو NK را پیدا می‌کند. با محاسبهٔ NK، با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ MNK، داریم:

$$NK = MN \cdot tg\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy$$

بنا براین، درهمان جاکه Δy نموعرض منحنی است، dy عبارت است از نمونظیر عرض مماس.

در پایان، به‌خود متغیر مستقل x توجه‌کنیم: دیفرانسیل آن عبارت است از نمو Δx، یعنی، بنا بر شرط، فرض می‌شود:

$$dx = \Delta x \qquad (۴)$$

اگردیفرانسیل متغیرمستقل x را با متغیر تابع $y = x$ متحد قراردهیم (که این هم، طبق قرارداد است!)، آن‌گاه، دستور (۴) را، با استناد به (۲)، می‌توان ثابت‌کرد:

$$dx = x'_x \cdot \Delta x = ۱ \cdot \Delta x = \Delta x$$

با در نظر گرفتن قرارداد (۲)، حالا دیگر می‌توان، دستور (۲) را، که تعریف دیفرانسیل را می‌دهد، به‌صورت زیرنوشت:

$$dy = y'_x \cdot dx \qquad (۵)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \qquad (۶)$$

و به‌این ترتیب، عبارتی را که قبلا به‌صورت نمادی یک‌پارچه درنظر می‌گرفتیم، حالا می‌توانیم، همچون یک کسر به‌حساب آوریم. این که درسمت چپ، عددی کاملا معین وجود دارد و، درهمان حال، درسمت راست، با دوعدد نامعین dy و dx (آخر $dx=\Delta x$، اختیاری‌است)، نباید خواننده‌را ناراحت کند؛ عددهای dx و dy، به‌صورتی متناسب تغییر می‌کنند، ضمناً، مشتق y'_x، همیشه برابر نسبت آن‌هاست.

مفهوم دیفرانسیل و خود اصطلاح «دیفرانسیل»*، به لایب‌نیتس تعلق دارد که، البته، تعریف‌دقیق‌این‌مفهوم را مطرح نکرد. لایب‌نیتس، همراه‌با دیفرانسیل‌ها، «خارج‌قسمت‌های دیفرانسیلی»، یعنی خارج قسمت دو دیفرانسیل را هم‌ــ که با مشتق هم‌ارز است ــ درنظر می‌گرفت؛ با همهٔ‌این‌ها، دیفرانسیل، برای لایب‌نیتس، مفهوم نخستین را تشکیل می‌داد. در زمان‌کوشی، که نظریهٔ حد او، مبنایی برای تمامی آنالیز ریاضی شد، و برای نخستین بار، مفهوم مشتق را، به‌عنوان یک حد، تعریف‌کرد، به‌طور طبیعی، از مشتق آغازکرد و مفهوم دیفرانسیل را براساس مشتق بنا نهاد.

۱۰۵. دستورهای اساسی وقانون‌های دیفرانسیل‌گیری. محاسبهٔ دیفرانسیل تابع‌ها، دیفرانسیل‌گیری** نامیده می‌شود. چون دیفرانسیل dy، تنها در ضریب dx، با مشتق y'_x فرق دارد، به‌سادگی، می‌توان‌ازجدول مشتق‌تابع‌های مقدماتی [۹۵]،جدول دیفرانسیل‌های آن‌ها را تشکیل داد:

۱)	$y=c$	$dy=0$
۲)	$y=x^{\mu}$	$dy=\mu x^{\mu-1}\cdot dx$
	$y=\frac{1}{x}$	$dy=-\frac{dx}{x^2}$
	$y=\sqrt{x}$	$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$
۳)	$y=a^x$	$dy=a^x\cdot\ln a\cdot dx$
	$y=e^x$	$dy=e^x\cdot dx$

---

*) از واژهٔ لاتینی differentio، به‌معنی «تفاضل».

**) دربعضی از زبان‌ها، برای مشتق‌گیری، واژه جداگانه‌ای ندارند وازهمین اصطلاح‌برای آن هم استفاده می‌کنند، ولی دربرخی دیگر از زبان‌ها، برای «دیفرانسیل‌گیری» و «مشتق‌گیری»، دواصطلاح جداگانه وجود دارد.

۴) $y=\log_a x \qquad dy=\dfrac{\log_a e\cdot dx}{x}$

$y=\ln x \qquad dy=\dfrac{dx}{x}$

۵) $y=\sin x \qquad dy=\cos x\cdot dx$

۶) $y=\cos x \qquad dy=-\sin x\cdot dx$

۷) $y=tgx \qquad dy=\sec^2 x\cdot dx=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$

۸) $y=\cot gx \qquad dy=-\operatorname{cosec}^2 x\cdot dx=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

۹) $y=\arcsin x \qquad dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۰) $y=\arccos x \qquad dy=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱) $y=\arctg x \qquad dy=\dfrac{dx}{1+x^2}$

۱۲) $y=\operatorname{arccot} gx \qquad dy=-\dfrac{dy}{1+x^2}$

قاعده‌های دیفرانسیل‌گیری*، به‌این صورت درمی‌آیند:

I. $d(cu)=c\cdot du$

II. $d(u\pm v)=du\pm dv$

III. $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$

IV. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}$

همهٔ این قاعده‌ها، به‌سادگی، از قاعده‌های نظیرمشتق به‌دست می‌آیند. برای مثال دوقاعدهٔ آخری را ثابت می‌کنیم:

---

*) اگرصحبت، برسرمحاسبه دیفرانسیل‌ها باشد.

$$d(u\cdot v)=(u\cdot v)'\cdot dx=(u'\cdot v+u\cdot v')dx=$$
$$=v\cdot(u'\cdot dx)+u\cdot(v'\cdot dx)=v\cdot du+u\cdot dv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{v\cdot(u'\cdot dx)-u\cdot(v'\cdot dx)}{v^2}=$$
$$=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}$$

۱۰۶. بی‌تغییری شکل دیفرانسیل. دیفرانسیل گیری تابع‌های مرکب، ما را به‌یکی ازمهم‌ترین ویژگی‌های دیفرانسیل، راهنمائی می‌کند.

فرض کنیم تابع‌هـای $y=f(x)$ و $x=\varphi(t)$، چنان باشندکه بتوان ازآن‌ها تابع مرکب $y=f(\varphi(t))$ را تشکیل داد. اگرمشتق‌های y'_x و x'_t وجود داشته باشند، با توجه به‌قاعدهٔ V[۹۸]، این مشتق وجود دارد.

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t \qquad (۷)$$

دیفرانسیل dy، اگر x را متغیرمستقل به‌حساب آوریم، از روی دستور (۵) به‌دست می‌آید. ولی، اگرمتغیرمستقل را t بگیریم، عبارت دیگری برای دیفرانسیل پیدا می‌شود:

$$dy=y'_t\cdot dt$$

اگر به‌جای y'_t، مقدار آن را ازعبارت (۷) قـراردهیم، وچون x تابعی از t است، به‌جای $x'_t\cdot dt$، مقدار آن، یعنی dt را قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$dy=y'_x\cdot x'_t dt=y'_x\cdot dx$$

یعنی، به‌همان شکل نخستین دیفرانسیل گیری می‌رسیم.

به‌این ترتیب می‌بینیم که شکل دیفرانسیل، حتی اگر متغیرمستقل سابق‌بامتغیرجدیدی عوض شود، تغییرنمی‌کند. همیشه حـق داریم، دیفرانسیل y را به‌شکل (۵) بنویسیم، خواه x متغیرمستقل باشد یا نباشد؛ تفاوت، تنها درآن است‌که اگرمتغیرمستقل، t باشد، آن‌وقت dx، نه به‌عنوان نمودلخواه Δx، بـلکه به‌عنوان دیفرانسیل x (همچون تـابعی از t) معنا می‌دهد. این ویژگی را بی‌تغییری شکل دیفرانسیل گویند.

چون دستور (۶)، مستقیماً از دستور (۵) بـه‌دست می‌آید ومشتق y'_x را بـرحسب دیفرانسیل‌های dx و dy می‌دهد، بنابراین، دستور (۶)هم، همیشه‌وهرچه باشد متغیرمستقل، دارای اعتباراست.

مثلاً، فرض می‌کنیم $y=\sqrt{1-x^2}\ (-1<x<1)$، به‌طوری‌که

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

حالا فرض می‌کنیم $x=sint\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$. آن‌گاه $y=\sqrt{1-sin^2t}=cost$ وخواهیم داشت: $dx=cost\cdot dt$ و $dy=-sint\cdot dt$. به‌سادگی تحقیق می‌شود که دستور

$$y'_x=\frac{-sint\cdot dt}{cost\cdot dt}=-\frac{sint}{cost}$$

تنها صورت دیگری ازهمان عبارت بالا، درمورد مشتق است.

این کیفیت، به‌خصوص بـرای حالت‌هایی مورد استفاده است، که بستگی y به x، مستقیماً داده نشده باشد و، به‌جای آن، بستگی دومتغیر x و y به‌یك متغیر کمکی سوم (به‌نام پارامتر) معلوم باشد:

$$x=\varphi(t)\ ,\ y=\psi(t) \qquad (۸)$$

با فـرض این‌کـه، هردو تابع، دارای مشتق باشند و برای تـابع اولی، تـابع معکوس $t=\theta(x)$، که به‌نوبـهٔ خود دارای مشتق است، وجود داشته باشد، [۹۴،۸۳]، به‌سادگی دیده می‌شود که y هم، تابعی از x است:

$$y=\psi(\theta(x))=f(x) \qquad (۹)$$

که در مورد آن هم، مشتق وجود دارد. محاسبهٔ این مشتق را می‌توان، با توجه به قاعدهٔ بالا، انجام داد:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t\cdot dt}{x'_t\cdot dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (۱۰)$$

بدون‌این‌که بستگی مستقیم y از x را برقرارکرده باشیم.

مثلاً، اگر $x=sint$ و $y=cost\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$، می‌توان‌مشتق y'_x را،همان‌طور که دربالا دیدیم، ومطلقاً بی‌استفاده از $y=\sqrt{1-x^2}$، معین کرد.

اگر x و y را، مانندمختصات مستقیم‌الخط نقطه درصفحه بگیریم، رابطه‌های (۸)، هرمقدار پارامتر t را، درتناظر با یك نقطهٔ قرارمی‌دهد؛ در نتیجه، این نقطهٔ، با تغییر t، یك

منحنی را در صفحه رسم می‌کند، که معادله‌های (۸)، به معادله‌های پارامتری این منحنی، موسوم‌اند.

درحالتی‌که معادلهٔ منحنی، به‌صورت پارامتری داده شود، می‌توان ضریب زاویهٔ مماس را، به‌کمك دستور(۱۰) و بلافاصله‌ازمعادله‌های (۸) تعیین‌کرد، بدون این‌که‌ناچار باشیم، معادلهٔ منحنی را، به‌صورت معادلهٔ (۹) درآوریم. به‌خصوص داریم:

$$tg\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (۱۱)$$

یادداشت: امکان بیان مشتق برحسب دیفرانسیل‌ها ــ که برحسب متغیر دلخواه گرفته شده‌اند ــ درحالت خاص، به‌این جا منجرمی‌شودکه دستورهای

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

که با علامت‌های‌لایب‌نیتسی، معرف قاعده‌های مشتق‌گیری ازتابع‌های معکوس وتابع‌های مرکب هستند، به‌صورت اتحادهای جبری ساده‌ای درآیند (زیرا، همهٔ دیفرانسیل‌ها را، می‌توان برحسب یك متغیر گرفت). ولی نباید گمان‌کردکه، به‌این ترتیب، نتیجه تازه‌ای از این دستورها به دست‌آورده‌ایم: قبل ازهمه، وجود مشتق‌های سمت چپ را ثابت نکردیم و، مهم‌تراز همه، اساساً ازبی‌تغییری شکل دیفرانسیل استفاده کردیم، که خود نتیجه‌ای از قاعدهٔ V است.

۱۰۷. دیفرانسیل‌ها، به‌عنوان سرچشمه‌ای برای رابطه‌های تقریبی. دیدیم که به‌ازای $\Delta x \to 0$، دیفرانسیل dy تابع y (تنها با شرط $y'_x \neq 0$)، عبارت است از جزء اصلی بی‌نهایت‌کوچك نمو Δy؛ بنابراین $\Delta y \sim dy$، به‌نحوی‌که

$$\Delta y \doteq dy \qquad (۳)$$

یا مفصل‌تر

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (۳a)$$

با تقریب بی‌نهایت‌کوچکی ازمرتبهٔ بالاتر از Δx. واین، به‌معنای آن است [۶۲] که خطای نسبی این برابری، وقتی که Δx به قدر کافی کوچك باشد به اندازهٔ کافی کوچك می‌شود.

مثال ساده‌ای را درنظربگیریم. فرض‌کنیم $y = x^3$، دراین صورت

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3$$

جزء اصلی Δy (همان‌طور که در بالا، آن‌را به‌صورت کلی خود، ثابت کردیم)، در واقع، عبارت است از دیفرانسیل $dy=3x^2\Delta x=y'_x\Delta x$. به‌طور مشخص، فرض می‌کنیم $x_0=2/3$. اگر $\Delta x=0/1$ بگیریم، خواهیم داشت $\Delta y=2/4^3-2/3^3=1/657$ و $dy=3.2/3^2.0/1=1/587$ و خطای حاصل برابر $0/070$ است و خطای نسبی از ۴٪ تجاوز می‌کند. به‌ازای $\Delta x=0/01$ داریم $\Delta y=0/159391$ و $dy=0/1587$، که خطای نسبی آن کوچکتر می‌شود و به $0/5\%$ می‌رسد. اگر $\Delta x=0/001$ بگیریم، خطای نسبی، کمتر از $0/05\%$ می‌شود وغیره.

همین وضع را، می‌توان، مستقیماً، و از شکل ۴۴ ــ که تغییرهندسی دیفرانسیل را به‌دست می‌دهد ــ نتیجه گرفت. روی شکل دیده می‌شود که با کوچکترشدن Δx، با تقریب نسبی بهتری، می‌توانیم نمودعرض منحنی را با نمو عرض مماس عوض کنیم.

فایدهٔ عوض کردن نمو تابع Δy، با دیفرانسیل dy آن، همان‌طور که برای خواننده روشن است، دراین‌جاست که dy به‌طور خطی به Δx بستگی دارد، درحالی که Δy، معمولاً، تابعی مرکب از Δx است.

اگر فرض شود $\Delta x=x-x_0$ و $x_0+\Delta x=x$، آن‌گاه، برابری (3a) به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$f(x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

یا

$$f(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

با توجه به‌این دستور، تابع $f(x_0)$، به ازای مقدارهای x نزدیک به x_0، به‌تقریب، تبدیل به‌تابعی خطی می‌شود. ازنظر هندسی، این وضع، نظیرعوض شدن قسمتی از منحنی $y=f(x)$، درمجاورت نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ با پاره‌ای ازمماس برمنحنی دراین نقطه است. معادلهٔ مماس برمنحنی دراین نقطه، چنین است:*

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

---

*) در واقع، معادلهٔ خطی با ضریب زاویهٔ k، که ازنقطهٔ (x_0, y_0) می‌گذرد، چنین است،

$$y=y_0+k(x-x_0)$$

که دراین‌جا، باید $y_0=f(x_0)$ و $k=f'(x_0)$ گرفته شود.

(شکل ۴۴ را ببینید). برای سادگی، $x_0 = 0$ می‌گیریم و با اکتفا به‌مقدارهای کوچک x، دستور تقریبی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0).x$$

ازاین‌جا، باقراردادن تابع‌های مقدماتی ساده به‌جای $f(x)$، دستورهای زیر به‌دست می‌آید:

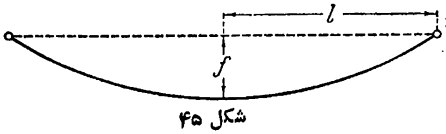
$$(1+x)^{\mu} \doteq 1+\mu x, \quad \sqrt{1+x} \doteq 1+\frac{1}{2}x \quad \text{(حالت خاص)},$$

$$e^{x} \doteq 1+x, \quad \ln(1+x) \doteq x, \quad \sin x \doteq x, \quad tgx \doteq x, \ldots$$

(که بعضی از آن‌ها را، قبلاً هم دیده بودیم).

به‌نمونه‌هائی از دستورهای تقریبی، از نوع دیگر، می‌پردازیم، که سرچشمهٔ همه‌آن‌ها، برابری (۳) است.

۱) نخ وزینی (مفتول، طناب، تسمه) را، ازدوانتهای خودآویخته‌ایم. اگر طول نخ را $2l$، دهنهٔ آن را $2l$ وسهم‌خمیدگی آن‌را f فرض کنیم (شکل ۴۵)، معمولاً، برای‌محاسبهٔ s، از رابطهٔ (تقریبی) زیر استفاده می‌کنند:



شکل ۴۵

$$s = l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)$$

f را متغیرمستقل و s را تابعی از f به حساب می‌آوریم. مطلوب است تعیین رابطهٔ بین Δs طول s وتغییر Δf سهم خمیدگی f.

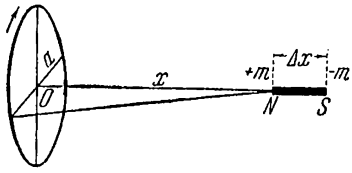
با عوض‌کردن Δs به ds داریم

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3}\frac{f}{l}.\Delta s \Rightarrow \Delta f \doteq \frac{3}{4}\frac{l}{f}.\Delta s$$

اگر، مثلاً، تغییرطول مفتول‌را، نتیجه‌ای از تغییردرجه حرارت‌یا سنگینی باردرنظر بگیریم، از آن‌جا، می‌توانیم تغییرسهم خمیدگی را هم پیش‌بینی کنیم.

۲) می‌دانیم که‌جریان دورانی برق (شکل۴۶)، برواحد به‌اصطلاح «بارمغناطیسی»، که روی محور و به فاصلهٔ x از O قرارداداد، با نیروی

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل ۴۶

عمل می‌کند، که در آن، k ضریب ثابت و a شعاع است. مطلوب است تعیین عبارت نیروئی که جریان دورانی برق، روی آهن‌ربای NS به‌طول Δx واقع برمحور، عمل می‌کند. ضمناً، فرض می‌کنیم که در قطب N «بارمغناطیسی» مثبت m و در قطب S «بارمغناطیسی» منفی برابر $m-$، متمرکز شده باشد.

نیروی کلی F، که جریان برق بر آهن‌ربا عمل می‌کند، این‌طور بیان می‌شود:

$$F=\frac{km}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{km}{[a^2+(x+\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}}=-km\cdot\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

که با عوض‌کردن نمو تابع (با این‌فرض که Δx کوچك است) با دیفرانسیل آن، به‌دست می‌آید:

$$F=-km\cdot d\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=3k\cdot m\Delta x\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

۱۰۸. کاربرد دیفرانسیل در برآورد خطاها. مخصوصاً، از مفهوم دیفرانسیل در محاسبه‌های تقریبی، می‌توان به‌سادگی و راحتی، برای برآورد خطاها استفاده کرد. مثلاً فرض کنید، کمیت x را مستقیماً اندازه بگیریم یا حساب کنیم، ولی کمیت y وابسته به‌آن را، از روی دستور $y=f(x)$، تعیین کنیم. برای اندازه‌گیری x، معمولاً، خطای Δx رخ می‌دهد که، به‌نوبهٔ خود، موجب خطای Δy برای کمیت y می‌شود. باتوجه به‌مقدار کوچك این خطاها، فرض می‌کنیم:

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x$$

یعنی نمو را با دیفرانسیل، عوض می‌کنیم. δx را خطای مطلق حداکثر، برای کمیت x می‌گیریم: $|\Delta x|\leqslant\delta x$. (در موارد معمولی، مرز خطای اندازه‌گیری، معلوم است.) آن‌وقت، می‌توان خطای مطلق حداکثر (مرز خط) را برای y، این‌طور انتخاب کرد:

$$\delta=|y'_x|\cdot\delta x \qquad (۱۲)$$

۱) فرض کنیم، مثلاً، برای تعیین حجم کره‌ای، مستقیماً (و به کمک کولیس، ضخامت‌یاب، میکرومتر یا چیز دیگری) قطر D از کره را اندازه بگیرند و، سپس، حجم آن را، با این دستور، به‌دست آورند:

$$V=\frac{\pi}{۶}D^{۳}$$

چون $V'_D=\frac{\pi}{۲}D^{۲}$، بنابراین، دراین حالت، بنابر (۱۲)

$$\delta V=\frac{\pi}{۲}D^{۲}.\delta D$$

که از تقسیم این رابطه، به‌رابطهٔ حجم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\delta V}{V}=۳\frac{\delta D}{D}$$

به‌نحوی که خطای نسبی (حداکثر) مقدار حساب شدهٔ حجم، دو برابر بیشتر از خطای نسبی (حداکثر) مقدار اندازه‌گیری شده برای قطر است.

۲) اگر عدد x، که به‌ازای آن، لگاریتم دهدهی $y=\log x$ محاسبه می‌شود، همراه با خطا باشد، این خطا، به‌لگاریتم آن منعکس می‌شود و در آن ایجاد خطا می‌کند.

دراین جا $y'_x\doteq\frac{M}{x}$ $(M=۰/۴۳۴۳)$، و از دستور (۱۲) داریم:

$$\delta y=۰/۴۳۴۳.\frac{\delta x}{x}$$

به‌این ترتیب، خطای مطلق (حداکثر) لگاریتم، به‌سادگی، از روی خطای مطلق (حداکثر) خود عدد معین می‌شود و برعکس.

این نتیجه‌گیری، کاربردهای گوناگونی دارد. مثلاً، به‌کمک آن می‌توان، تصوری دربارهٔ دقت خط‌کش‌های لگاریتمی معمولی با مقیاس ۲۵ سانتیمتر $(=۲۵۰$ میلی‌متر) به‌دست آورد. برای محاسبه یا تنظیم منظره‌یاب، تقریباً ۰/۱ میلی‌متر اشتباه، دراین یا آن طرف، ممکن است پیش آید، که در لگاریتم، متناظر با این خطاست:

$$\delta y=\frac{۰/۱}{۲۵۰}=۰/۰۰۰۴$$

از آن‌جا، بنابر رابطه‌ای که داریم:

$$\frac{\delta_1}{x}=\frac{0/0004}{0/43434}=0/000092\ldots\doteq 0/001$$

دقت نسبی محاسبه‌ها، درهمهٔ قسمت‌های مقیاس، یکی است.

۳) برای محاسبهٔ زاویه φ از روی جدول‌های لگاریتم مثلثاتی، مواجه با این پرسش می‌شویم که کدام جدول مناسب‌تراست، جدول سینوس‌ها یا جدول تانژانت‌ها؟ فرض کنیم

$$y_1=\log\sin\varphi,\qquad y_2=\log\operatorname{tg}\varphi$$

وخطاهای حداکثر δy_1 و δy_2 را برابرمی‌گیریم (مثلاً، نصف آخرین رقم مانتیس). اگر خطای حداکثر نظیر را در زاویهٔ φ، بـا $\delta_1\varphi$ و $\delta_2\varphi$ نشان دهیم، همان‌طور که در بالا به‌دست آوردیم:

$$\delta y_1=\frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\delta_1\varphi$$

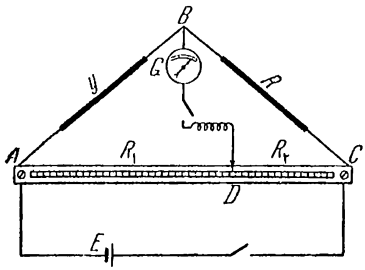
$$\delta y_2=\frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi\cdot\delta_2\varphi$$

به نحوی که

$$\delta_2\varphi=\delta_1\varphi\cdot\cos^2\varphi<\delta_1\varphi$$

به این ترتیب، دیده می‌شود که بافرض خطای یکسان در لگاریتم، جدول تانژانت‌ها، خطای کمتری را روی زاویه می‌دهد تا جدول سینوس‌ها و، بنابراین، جدول تانژانت‌ها، مفیدتر به‌نظرمی‌رسد*.

۴) به‌عنوان آخرین مثال، مسالهٔ مربوط به‌ـ اندازه‌گیری مقاومت‌مجهول y، به‌کمك پل وتستون** را مطرح می‌کنیم (شکل ۴۷). ضمناً، اتصال‌متحرك D، برخط‌کش مدرج AC تا آن‌جا حرکت‌می‌کند، که گالوانومتر G، فقدان برق را نشان دهد. مقاومت y، ازدستور زیرمعین می‌شود:



شکل ۴۷

*) دراین‌جا، فرض را براین گرفتیم که زاویه‌ها برحسب رادیان بیان می‌شوند، ولی معلوم‌است که نتیجه، بدون توجه به‌واحد زاویه، درست است.

**) مدار منشعب الکتریکی، برای اندازه‌گیری مقدارمقاومت یك مقاومت نامعلوم.

$$y=\frac{Rx}{a-x} \qquad (۱۳)$$

که در آن، $a=AC$، $x=AD$ و R، مقاومت معلوم شاخهٔ BC است.

بنا به‌دستور (۱۲)، داریم:

$$\delta y=\left(\frac{Rx}{a-x}\right)'_x dx=\frac{aR}{(a-x)^2}\delta x$$

اگر این برابری را بر برابری (۱۳) تقسیم کنیم، عبارت خطای نسبی (حداکثر) را، برای y، به‌دست می‌دهد:

$$\frac{\delta y}{y}=\frac{a\cdot\delta x}{x(a-x)}$$

چون مخرج $x(a-x)$، وقتی به بزرگترین مقدارخود می‌رسد که داشته باشیم $x=\frac{a}{2}$ *، وخطای δx را، در اندازه‌گیری طول‌ها، می‌توان مستقل از x به‌حساب آورد، بنابراین، کوچکترین مقدار، برای خطای نسبی، به‌ازای همین $x=\frac{a}{2}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، معمولاً، برای به‌دست آوردن نتیجهٔ به‌قدرممکن درست مقاومت R (به‌کمك جعبه مقاومت‌ها)، طوری حساب می‌کنند که اتصال D، تا حد ممکن، به‌وسط AC نزدیك‌تر باشد.

§۳. قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل

۱۰۹. قضیهٔ فرما. با در دست داشتن مشتق $f'(x)$ از تابع $f(x)$، غالباً، می‌توان به‌رفتار خود تابع $f(x)$ پی برد. موضوع‌هایی از این نوع را در این بند و بندهای بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد.

ابتدا، پیش‌قضیهٔ سادهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

---

*) از نابرابری معلوم

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0$$

مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$x(a-x)\leqslant\frac{a^2}{4}$$

پیش‌قضیه. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$، در نقطه x_0، دارای مشتقی متناهی باشد. اگر برای این مشتق داشته باشیم $f'(x_0)>0$ [$f'(x_0)<0$]، آنگاه، برای مقدارهای x به قدرکافی نزدیک به x_0 از طرف راست داریم $f(x)>f(x_0)$ [$f(x)<f(x_0)$] و برای مقدارهای x به‌قدرکافی نزدیک به x_0 ازطرف چپ داریم $f(x)<f(x_0)$ [$f(x)>f(x_0)$].

این کیفیت، به‌زبان دیگر، این‌طور بیان می‌شود: تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0 صعودی [نزولی] است، اگر تنها بامشتق یك طرفه، و مثلاً از راست، سروکار داشته باشیم، همین حکم، منتهی در مورد نقطه‌هائی از x، که در سمت راست x_0 واقع شده‌اند، برقرار است.

اثبات. بنا به‌تعریف مشتق داریم:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر داشته باشیم $f'(x_0)>0$ (به همین حالت، اکتفا می‌کنیم)، بنا به ۵۵، ۲°، چنان همسایگی $(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta)$ برای نقطه x_0 وجود دارد که در آن (به ازای $x\neq x_0$) داشته باشیم:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

ابتدا فرض می‌کنیم $x_0<x<x_0+\delta$، به نحوی که $x-x_0>0$. در این‌صورت باتوجه به نامساوی فوق نتیجه می‌شود $f(x)-f(x_0)>0$، یعنی $f(x)>f(x_0)$. در حالتی‌هم که‌داشته باشیم $x_0-\delta<x<x_0$ و $x-x_0<0$، به‌نتیجهٔ $f(x)-f(x_0)<0$ یا $f(x)<f(x_0)$ می‌رسیم، پیش‌قضیه ثابت شد.

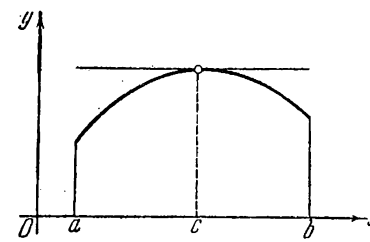
قضیهٔ فرما (P. Fermat). فرض کنیم $f(x)$ در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین باشد و در نقطهٔ c متعلق به‌این بازه، به‌بزرگترین [کوچکترین] مقدارخود برسد. اگرمشتق متناهی دوطرفهٔ $f'(c)$ در این نقطه وجود داشته باشد، آنگاه الزاماً داریم $f'(c)=0$*.

اثبات. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم که تابع، در نقطهٔ c، به بزرگترین مقدار خود برسد. فرض $f'(c)\neq 0$ به این تناقض منجر می‌شود که: یا $f'(c)>0$ و آن وقت (بنا به پیش‌قضیه) $f(x)>f(c)$ (اگر $x>c$ و به قدرکافی نزدیك به c باشد)، یا $f'(c)<0$، آنگاه $f(x)>f(c)$ (اگر $x<c$ و به‌قدرکافی نزدیك به c باشد). در هر دو حالت $f(c)$ نمی‌تواند بزرگترین مقدار تابع $f(x)$ در بازهٔ $\mathfrak{D}$ باشد. تناقض حاصل،

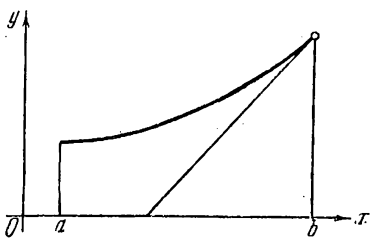
*) البته، این حکم، تنها از محتوی آن‌چه‌که فرما، برای جست‌وجوی حداکثر و حداقل به‌کار می‌برد، استنباط می‌شود (فرما، از مفهوم مشتق، چیزی نمی‌دانست).

درستی حکم قضیه را ثابت می‌کند.

تعبیر هندسی مشتق $y'=f'(x)$ را، همچون ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=f(x)$ به یاد بیاوریم [۹۱، ۹۲]. برابر صفر شدن مشتق $f'(x)$، از نظر هندسی، به این معناست که مماس برمنحنی، در نقطهٔ نظیر، موازی با محور x است. شکل ۴۸، این کیفیت را، کاملاً روشن می‌کند.



شکل ۴۸



شکل ۴۹

در اثبات، در واقع، از این وضع استفاده کردیم که c، نقطهٔ درونی بازه است. چرا که نقطهٔ x را، هم در سمت راست c و هم در سمت چپ آن، در نظر گرفتیم. بدون این فرض، قضیه درست نیست: اگر تابع $f(x)$ در بازه بسته‌ای معین باشد و در یکی از دو نقطهٔ انتهایی آن، به بزرگترین [کوچکترین] مقدار برسد، آن‌وقت، مشتق $f'(x)$، در این انتها (اگر وجود داشته باشد)، ممکن است برابر صفر نشود. پیداکردن مثال را ـ که مشکل هم نیست ـ به‌خواننده وامی‌گذاریم. از نظر هندسی، این حقیقت، در شکل ۴۹، نشان داده شده است.

به عنوان کاربرد قضیهٔ فرما، یك قضیهٔ جالب، درمورد مشتق، ثابت می‌کنیم.

۱۱۰. قضیهٔ داربو (G. Darboux). اگر تابع $f(x)$، دارای مشتق متناهی در $[a, b]$ باشد*، آن‌گاه تابع $f'(x)$ می‌تواند هر عددی را که بین $f'(a)$ و $f'(b)$ واقع است به عنوان مقدار خود، اختیار کند.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم که $f'(a)$ و $f'(b)$، دارای علامت‌های مختلف باشند و مثلاً $f'(a)>0$ و $f'(b)<0$ و وجود نقطهٔ c بین a و b را ثابت می‌کنیم، که در آن مشتق برابر صفر می‌شود. در واقع، از وجود مشتق متناهی $f'(x)$، پیوستگی تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود [۹۶، ۲°] و آن وقت، بنابر قضیهٔ ۲ ویرشتراس [۸۵]، $f(x)$ در نقطه‌ای مثل c به بزرگترین مقدار خود می‌رسد. این نقطهٔ c، نمی‌تواند نه بر a و نه بر b منطبق شود،

---

*) ضمناً، فرض می‌کنیم که در نقطهٔ a، مشتق راست و در نقطهٔ b، مشتق چپ وجود دارد، که بعد از این، آن‌ها را به‌طور ساده، به‌صورت $f'(a)$ و $f'(b)$ نشان خواهیم داد.

زیرا، بنابر پیش‌قضیهٔ، $f(x)$ در نزدیکی راست نقطهٔ a، از $f(a)$ و در نزدیکی چپ نقطهٔ b، از $f(b)$ بزرگتر است. بنابراین $a<c<b$ و بنابر قضیهٔ فرما خواهیم داشت: $f'(c)=0$.

به‌حالت کلی می‌پردازیم وعدد دلخواه C را، بین $f'(a)$ و $f'(b)$ انتخاب می‌کنیم. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم: $f'(a)>C>f'(b)$. تابع کمکی $\varphi(x)=f(x)-Cx$ را در نظر می‌گیریم. این تابع پیوسته و در بازهٔ $[a\,,b]$، دارای مشتق $\varphi'(x)=f'(x)-C$ است.

چون $\varphi'(a)=f'(a)-C>0$ و $\varphi'(b)=f'(b)-C<0$، پس بنابر آن چه ثابت شد، چنان نقطهٔ c $(a<c<b)$ وجود دارد که در آن

$$\varphi'(c)=f'(c)-C=0 \Rightarrow f'(c)=C$$

قضیه‌ای که ثابت کردیم، شباهت زیادی به قضیهٔ ۲ کوشی [۸۲] دارد، که طبق آن، هر تابع پیوسته‌ای، ضمن عبور از یك مقدار به‌مقدار دیگر، از جمیع عددهای بینابینی می‌گذرد. ولی، قضیهٔ داربو، نتیجه‌ای از قضیهٔ کوشی نیست، زیرا مشتق $f'(x)$ یك تابع پیوسته، ممکن است پیوسته نباشد.

۱۱۱. قضیهٔ رول. قضیهٔ ساده ومهم زیر، که با نام رول* (M. Rolle) بستگی دارد، اساس اغلب قضیه‌ها و دستورهای محاسبهٔ دیفرانسیلی و کاربردهای آن را تشکیل می‌دهد.

قضیهٔ رول. فرض می‌کنیم، ۱) تابع $f(x)$، در بازهٔ بسته $[a\,,b]$، معین و پیوسته باشد، ۲) مشتق متناهی $f'(x)$، دست‌کم در بازهٔ باز $(a\,,b)$، وجود داشته‌باشد، ۳) تابع در دو انتهای بازه، مقدارهای برابر اختیار کند: $f(a)=f(b)$.

در چنین صورتی، بین a و b، چنان نقطه c پیدا می‌شود $(a<c<b)$ که داشته باشیم: $f'(c)=0$.

اثبات. $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ پیوسته است، بنابراین، طبق قضیهٔ ۲ ویرشتراس [۸۵]، در این بازه، به بزرگترین مقدار خود M و کوچکترین مقدار خود m می‌رسد.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

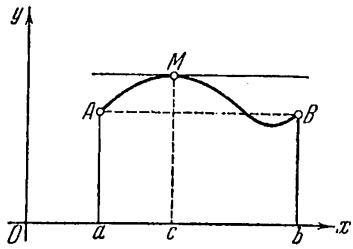
۱. $M=m$، که دراین‌صورت، $f(x)$ در بازهٔ $[a\,,b]$، مقدار ثابتی را حفظ می‌کند. در واقع، نابرابری‌های $m\leqslant f(x)\leqslant M$، در این حالت، برای همهٔ مقدارهای x، تبدیل به برابری $f(x)=M$ می‌شود و، بنابراین، در سراسر بازه داریم $f'(x)=0$، به‌نحوی که هر نقطهٔ دلخواه از $(a\,,b)$ را می‌توان، به عنوان c، اختیار کرد.

---

*) در واقع، رول این حکم را، تنها برای چندجمله‌ای‌ها بیان کرده است.

۲. $m < M$. می‌دانیم که هر دوی این‌ها، مقدارهایی از تابع هستند، ولی چون $f(a)=f(b)$، بنابراین، تابع، دست‌کم به یکی از این مقدارها، در نقطهٔ c، بین a و b می‌رسد. در چنین حالتی، از قضیهٔ فرما نتیجه می‌شود که مشتق $f'(x)$ در این نقطه، برابر صفر می‌شود و قضیه ثابت است.

قضیهٔ رول‌را، به‌زبان هندسی، می‌توان‌این‌طور بیان‌کرد‌که: اگرعرض‌های دوطرف منحنی $y=f(x)$ برابر باشند، آن‌گاه، برمنحنی، می‌توان‌نقطه‌ای پیداکرد که در آن‌جا، مماسی‌موازی محورxداشته باشد (شکل ۵۰).



شکل ۵۰

توجه داشته باشیم که، پیوستگی تابع $f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ و وجود مشتق در تمامی بازهٔ باز (a, b)، برای درستی نتیجه، جنبهٔ اساسی دارد. تابع $f(x)=x-E(x)$، در بازهٔ $[1\ و\ 0]$ با همهٔ شرط‌های قضیهٔ سازگاز است، به جز این که، به ازای $x=1$، ناپیوستگی دارد. و در همه‌جا در بازهٔ $(1, 0)$، مشتق $f'(x)=1$. همچنین، تابعی که با تساوی‌های $f(x)=x$ به‌ازای $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$ و $f(x)=-1-x$ به‌ازای $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$،معین شده باشد، با همهٔ شرط‌ها سازگار است، جز این که به‌ازای $x=\frac{1}{2}$، مشتق (دوطرفه) وجود ندارد، به‌این معنا که مشتق $f'(x)$، در نیمهٔ چپ بازه برابر $+1$ و در نیمهٔ راست آن، برابر -1 است.

درست به همین ترتیب، شرط۳) هم‌اساسی‌است: تابع $f(x)=x$، در بازهٔ$[1, 0]$، باهمهٔشرط‌های قضیه، به‌جز شرط۳)، سازگار است، مشتق‌آن درهمه‌جا $f'(x)=1$ است. شکل‌ها را به خواننده وامی‌گذاریم.

۱۱۲. رابطهٔلاگرانژ. برمی‌گردیم به‌نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ رول.

قضیهٔ لاگرانژ. فرض‌کنیم: ۱)تابع$f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، معین و پیوسته باشد، ۲)مشتق‌متناهی $f'(x)$،دست‌کم در بازهٔباز (a, b)، وجود داشته باشد،*، آن‌گاه، بین aو b، چنان نقطهٔ c $(a<c<b)$ وجود دارد‌که، به‌ازای‌آن، برابری زیر برقرار باشد:

---

*) البته، پیوستگی تابع در (a,b) که در ۱) فرض شده است، از ۲) هم نتیجه می‌شود، ولی‌ما نه دراین‌جا و نه بعداً، خود را موظف به‌این ندیده‌ایم‌که فرض‌های‌قضیه‌را مستقل ازیکدیگر انتخاب کنیم.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (۱)$$

اثبات. تابعی کمکی در نظر می‌گیریم، که در بازهٔ $[a,b]$، با برابری زیر تعریف شده باشد:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

این تابع هم با شرطهای قضیه سازگار است. در واقع، این تابع، در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، زیرا به صورت تفاضل بین تابع پیوسته $f(x)$ و یك تابع خطی است. مشتق آن، در بازهٔ (a,b) متناهی و معین و برابر است با

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

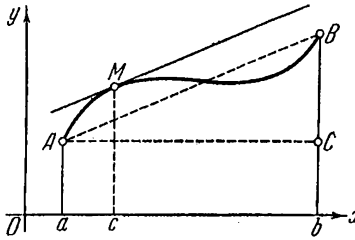
بالاخره، مستقیماً، معلوم می‌شود که $F(a)=F(b)=۰$، یعنی $F(x)$، در دو انتهای بازه، مقدارهای برابر اختیار می‌کند.

در نتیجه، می‌توان قضیهٔ رول را در بازهٔ تابع $F(x)$ به کار برد و نقطهٔ c را در (a,b) چنان پیدا کرد که $F'(c)=۰$ باشد. به‌این ترتیب

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=۰$$

و از آن‌جا

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



شکل ۵۱

این قضیه را، قضیه مقدارهای میانگین (در محاسبهٔ دیفرانسیلی) می‌گویند.

قضیهٔ رول، حالت خاصی از قضیهٔ لاگرانژ است؛ ملاحظه‌هایی که در مورد شرطهای ۱) و ۲) قضیه آوردیم، در این‌جا هم به قوت خود باقی است.

با توجه به تعبیر هندسی قضیهٔ لاگرانژ (شکل ۵۱)، یادآوری می‌کنیم که نسبت

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CD}{AC}$$

برابر است باضریب زاویهٔ قاطع AB و $f'(c)$، برابراست باضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=f(x)$، درنقطهٔ به‌طول $x=c$. به‌این‌ترتیب قضیهٔ لاگرانژ حاکی از آن است که: روی کمان AB، همواره، دست‌کم یک نقطهٔ M پیدا می‌شود که مماس در آن موازی وتر AB است.

رابطه‌ای که ثابت کردیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{یا} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

به‌رابطهٔ لاگرانژ یا رابطه نموهای محدود، موسوم است. روشن است که این دستور، درحالت $a>b$ نیز دارای اعتبار است.

مقدار دلخواه x_0 را از بازهٔ $[a,b]$ اختیار می‌کنیم و نمو Δx (مثبت یا منفی) را به‌آن می‌دهیم، به‌نحوی که از محدودهٔ بازهٔ تجاوز نکند. دستور لاگرانژ را درمورد بازهٔ $[x_0, x_0+\Delta x]$، درحالت $\Delta x>0$، ودرمورد بازهٔ $[x_0+\Delta x, x_0]$، درحالت $\Delta x<0$، به‌کار می‌بریم. عدد c را، که دراین‌حالت، بین x_0 و $x_0+\Delta x$ قرار دارد، می‌توان چنین فرض کرد:

$$c=x_0+\theta\Delta x, \qquad (0<\theta<1)^*$$

آن‌وقت، دستور لاگرانژ، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x) \qquad (1a)$$

یا

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1) \quad (2)$$

این برابری، که بیان دقیق نمو تابع را، به‌ازای هر نمو متناهی Δx از آوند، به‌دست می‌دهد، طبعاً دربرابر این تساوی تقریبی قرار می‌گیرد [۱۰۷ ، (3a)]:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\doteq f'(x_0)\cdot\Delta x$$

که خطای نسبی آن، تنها وقتی به‌سمت صفر میل می‌کند که Δx بی‌نهایت کوچک باشد. خود نام‌گذاری «دستور نموهای محدود» از همین‌جا پیدا شده است.

---

*) گاهی گفته می‌شود که θ یک «کسر کوچکتر از واحد» است. تنها نباید گمان کرد که صحبت برسر کسر گویا است، عدد θ، گنگ هم می‌تواند باشد.

اشکال دستور لاگرانژ این است که بـاعدد نامعلوم θ * (یا c) سروکار دارد. ولی، این وضع، مانعی برای کاربردهای گوناگون این‌دستور، در آنالیز ریاضی، نیست.

۱۱۳. حد مشتق. ملاحظهٔ زیر، نمونهٔ خوبی از این‌کاربرد است. فرض کنیم که‌تابع $f(x)$ در بازهٔ $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ پیوسته و به‌ازای $x>x_0$، دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد. اگر حد (متناهی یا نامتناهی) زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=K$$

آن‌گاه، درنقطه x_0، مشتق یک‌طرفه از سمت راست نیز وجود خـواهد داشت. در واقـع، برای $0<\Delta x\leqslant H$، (۱a) را داریـم. وقتی $\Delta x\to 0$، باتوجه بـه محدودبودن کمیت θ، آوند مشتق، یعنی $x_0+\theta\Delta x$، به‌سمت x_0 میل می‌کند، به‌نحوی که سمت راست برابری، و همراه بـا آن، سمت چپ آن، به‌سمت K میل می‌کند. فهوالمطلوب. بـه‌همین‌تـرتیب می‌توان حکم را درمورد همسایگی چپ نقطهٔ x_0 نیز ثابت کرد.

به‌عنوان مثال، این تابع را، دربازهٔ $[-1+1]$، درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=x\cdot \arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

اگر $-1<x<1$، از روی قاعدهٔ عادی مشتق‌گیری، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$$

وقتی $x\to 1-0$ $(x\to -1+0)$، روشن است کـه حـد ایـن مشتق بـرابر $\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ می‌شود، یعنی به‌ازای $x=\pm 1$ نیز، مشتق (یک‌طرفه) وجود دارد:

$$f'(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}$$

اغلب، از این مـلاحظه، در موقعیت‌های زیـر استفاده می‌شود: از ایـن‌حقیقت که عبارت مشتق، با نزدیـک‌شدن x به x_0 از این یـا آن طرف به‌سمت $+\infty$ $(-\infty)$ میل کند، نتیجه می‌شود که درخود نقطهٔ x_0 هم، مشتق یک‌طرفهٔ برابر $+\infty$ $(-\infty)$ وجود دارد.

به‌عنوان مثال، به‌تابع‌هـای $f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}$ و $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$، که در ۱۰۱ بـررسی

---

*) تنها در بعضی حـالت‌هـا، می‌تـوانیم آن را معین کنیم. مثلا، بـرای تـابع درجـه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، همان‌طورکه به‌سادگی قابل تحقیق است، داریم $\theta=\frac{1}{2}$.

کردیم، برمی‌گردیم. درمورد این دوتابع (به‌ازای x مثبت یا منفی) داریم:

$$f'_1(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad f'_2(x)=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

عبارت اول، به‌ازای $x=\pm 0$، به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند و عبارت دوم، به‌ازای $x\to +0$ و $x\to -0$، به‌ترتیب، به‌سمت $+\infty$ و $-\infty$ میل می‌کند، بنابراین، نتیجه می‌گیریم که درنقطهٔ $x=0$، برای $f_1(x)$، مشتق دوطرفه وجود دارد: $+\infty$؛ درحالی که $f_2(x)$، دراین‌نقطه، تنها مشتق یك‌طرفه دارد: $+\infty$ از راست و $-\infty$ از چپ.

از آن چه گفتیم، همچنین نتیجه می‌شود که، اگر مشتق متناهی $f'(x)$ دربازه‌ای وجود داشته باشد، این مشتق، چنان تابعی است که نمی‌تواند دارای ناپیوستگی‌های عادی یا جهش باشد: درهرنقطه یا پیوسته است و یا دارای ناپیوستگی از نوع دوم [۱۰۲، ۲° را ببینید].

۱۱۴. دستور کوشی. دستورنموهای محدود را، می‌توان به‌این‌ترتیب، تعمیم داد.

قضیهٔ کوشی. فرض می‌کنیم: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، دربازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته‌اند، ۲) مشتق‌های متناهی $f'(x)$ و $g'(x)$، دست‌کم دربازهٔ باز (a,b)، وجود دارند، ۳) دربازهٔ (a,b) داریم $g'(x)\neq 0$.

دراین‌صورت، بین a و b، چنان نقطه c $(a<c<b)$ پیدا می‌شودکه داشته باشیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (۳)$$

این دستور، به دستور کوشی معروف است.

اثبات. ابتدا روشن کنیم که مخرج سمت چپ تساوی (۲)، برابر صفر نیست، زیرا در غیراین‌صورت، عبارت مفروض، معنای خود را از دست می‌دهد. اگر $g(b)=g(a)$ باشد، بنابرقضیهٔ رول، مشتق $g'(x)$، در نقطه‌ای بینابینی برابر صفر می‌شودکه خلاف شرط ۳) است. یعنی $g(b)\neq g(a)$.

حالا، تابع کمکی زیر را درنظر می گیریم:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

این تابع، باهمهٔ شرط‌های قضیهٔ رول، سازگار است. در واقع، $F(x)$ در $[a,b]$ پیوسته است، زیرا $f(x)$ و $g(x)$، دراین بازه، پیوسته‌اند؛ مشتق $F(x)$ در (a,b) وجود دارد

و برابر است با

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

بالاخره، مستقیماً نتیجه می‌شود که $F(b)=F(a)=0$. بنابراین، در بازهٔ (a,b)، چنان نقطهٔ c وجود دارد که در آن‌جا داشته باشیم: $F'(c)=0$. به‌زبان دیگر

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

یا

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$

که با تقسیم دوطرف برابری بر $g'(c)$ (این تقسیم ممکن است، زیرا $g'(c)\neq 0$)، برابری مطلوب، به‌دست می‌آید.

روشن است که قضیهٔ لاگرانژ، حالت خاصی از قضیهٔ کوشی است. برای این‌که به‌دستور نموهای محدود برسیم، کافی است در دستور کوشی فرض کنیم $g(x)=x$. قضیهٔ کوشی را، قضیهٔ عام مقدارهای میانگین (درمحاسبهٔ دیفرانسیلی) هم می‌گویند.

تعبیر هندسی قضیهٔ کوشی، شبیه قضیهٔ لاگرانژ است. برای این‌که، خواننده بهتر به این مطلب پی ببرد، علامت‌های دیگری را در نظر می‌گیریم: x را به t تبدیل می‌کنیم و تابع‌ها را $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ می‌نامیم. اگر t در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ تغییر کند، از روی دستور کوشی می‌نویسیم:

$$\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}\quad(\alpha<\gamma>\beta)\qquad(۴)$$

حالا، منحنی را در نظر می‌گیریم که با معادله‌های پارامتری

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

داده شده باشد. سمت چپ دستور (۴) عبارت است از ضریب زاویهٔ وتری که دو انتهای کمان این منحنی را به‌هم وصل می‌کند و سمت راست آن عبارت است ازضریب زاویهٔ مماس دریك نقطهٔ درونی کمان، نظیر $t=\gamma$ [۱۰۶، (۱۱)].

یادداشت. این ملاحظه‌ها، اندیشهٔ امکان درآوردن دستورکوشی از دستورلاگرانژ را، به‌وجود می‌آورد. اهمیت این استنتاج در آن است که به‌جای بستگی‌های پارامتری،

بستگی مستقیم $y=f(x)$ برقرار می‌شود و ، آن‌گاه، دستور (۴) همان ارزش دستور(۱) را پیدا می‌کند.

§۴. مشتق‌ها و دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر

۱۱۵. تعریف مشتق مرتبهٔ بالاتر. اگر تابع $y=f(x)$، در یک بازهٔ $\mathfrak{X}$، دارای مشتق متناهی $y'=f'(x)$ باشد، به‌نحوی که خود این مشتق، تابع جدیدی از x بشود، در آن‌صورت، ممکن است که این تابع جدید، در یک نقطهٔ x_0 از $\mathfrak{X}$، به‌نوبهٔ خود، دارای مشتق متناهی یا نامتناهی باشد، که آن را مشتق مرتبهٔ دوم یا مشتق دوم تابع $y=f(x)$، در نقطهٔ مفروض، گویند و آن را، با یکی از نمادهای زیر، نشان می‌دهند:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'',\quad D^2y,\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad f''(x_0),\quad D^2f(x_0)$$

همان‌طور که در ۹۲ دیدیم، سرعت v حرکت نقطه ، برابر است با مشتق مسافت s، که نقطه در زمان t می‌پیماید: $v=\dfrac{ds}{dt}$؛ شتاب a نیز ، عبارت است از مشتق سرعت v، نسبت به‌زمان t: $a=\dfrac{dv}{dt}$. یعنی، شتاب عبارت است از مشتق دوم مسافت، نسبت به زمان t:

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

به همین‌ترتیب، اگر تابع $y=f(x)$، دارای مشتق دوم متناهی در همان بازهٔ $\mathfrak{X}$ باشد (یعنی، در هر نقطهٔ این بازه)، در آن‌صورت. مشتق آن، اعم از این‌که، در یک نقطهٔ x_0 از $\mathfrak{X}$، متناهی باشد یا نامتناهی، مشتق مرتبه سوم یا مشتق سوم $y=f(x)$ در این نقطه، نامیده و به‌یکی از این نمادها، نشان داده می‌شود:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad y''',\quad D^3y,\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\quad f'''(x_0),\quad D^3f(x_0)$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم، از مشتق مرتبهٔ سوم به‌مشتق مرتبهٔ چهارم وغیره، برسیم. اگر فرض کنیم که مفهوم مشتق مرتبهٔ $(n-1)$ام معلوم باشد و اگر این مشتق $(n-1)$ام در $\mathfrak{X}$ وجود داشته ومتناهی باشد، آن‌گاه، مشتق آن در یک نقطهٔ x_0 این بازه، مشتق مرتبه nام یا مشتق nام تابع $y=f(x)$ نامیده می‌شود. برای نمایش این مشتق، از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{d^n y}{dx^n},\quad y^{(n)},\quad D^n y,\quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\quad f^{(n)}(x_0),\quad D^n f(x_0)$$

ضمن استفاده از نمادهای لاگرانژ یا کوشی، ممکن است لازم باشد به‌متغیری که نسبت به‌آن،مشتق گرفته‌ایم، اشاره‌ای بشود، دراین‌صورت، این‌متغیر را، به‌صورت‌اندیس، می‌آوریم:

$$y''_{x^2}\qquad D^3_{x^3} y,\qquad f^{(n)}_{x^n}(x_0),\ \dots$$

ضمناً، x^2 ، x^3 و... را، به‌جای xx ، xxx و... نوشته‌ایم. مثلا می‌توان نوشت: $a = s''_{t^2}$
(برای خواننده روشن است که، دراین‌جا هم، نمادهای یك‌پارچه

$$\frac{d^n f}{dx^n}\ \text{یا}\ f^{(n)}_{x^n},\quad D^n f\ \text{یا}\ D^n_{x^n} f$$

را باید، همچون علامت تابعی، درنظر گرفت.)

به‌این‌ترتیب، مفهوم مشتق مرتبهٔ nام را، به‌شکل استقرائی، و با آغاز از مشتق اول، تعریف کردیم. رابطه‌ای را که معرف مشتق مرتبهٔ nام است:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

رابطه بازگشتی (یا رابطهٔ «کاهشی») هم می‌گویند، چرا که، بنابراین رابطه، محاسبهٔ مشتق nام، به‌محاسبهٔ‌مشتق $(n-1)$ام «بازمی‌گردد».

خود محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ n ام، وقتی‌که عدد n معلوم باشد، با قاعده‌ها و دستورهای آشنا انجام می‌گیرد. مثلا، اگر داشته باشیم:

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$$

آن‌گاه

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3},\quad y'' = 6x^2 - x + 4,$$

$$y''' = 12x - 1,\qquad y^{IV} = 12$$

ومشتق‌های بعدی، متحد باصفر می‌شوند. یا فرض می‌کنیم:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

آن‌گاه

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},\quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}},\ \dots$$

یادآوری می‌کنیم که، مفهوم مشتق یک‌طرفه را هم [با ۱۰۰ را مقایسه کنید]، می‌توان به‌شیوهٔ استقرائی، درمورد مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر، تعریف کرد. وقتی که تابع $y=f(x)$، تنها در بازهٔ $\mathfrak{D}$ معین باشد، وقتی که ازمشتق مرتبهٔ nام در یکی از دو انتهای بازه صحبت می‌کنیم، منظور، مشتق یک‌طرفه است.

۱۱۶. دستورهای کلی، برای مشتق‌های مرتبهٔ دلخواه. به‌این‌ترتیب، برای آن‌که مشتق مرتبهٔ nام از تابعی را حساب کنیم، درحالت کلی، باید قبلا، همهٔ مشتق‌های مرتبه‌های قبل‌از آن را به‌دست آوریم، ولی دربسیاری موردها، می‌توان چنان عبارت‌کلی، برای مشتق مرتبهٔ nام، پیدا کرد که تنها به n بستگی داشته باشد و شامل علامت‌های مربوط به مشتق‌های قبلی نشود.

برای پیدا کردن چنین عبارت‌های کلی، غالباً، دستورهای زیر مفیدند:

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)} \quad , \quad (cu)^{(n)}=c\cdot u^{(n)}$$

که درواقع، تعمیم قاعده‌های I و II شمارهٔ ۹۷، درمورد مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر است و، با به‌کاربردن متوالی همان قاعده‌های معلوم قبلی، به‌دست می‌آیند.

۱) تابع توانی $y=x^{\mu}$ را درنظر می‌گیریم، که در آن، μ عدد حقیقی دلخواهی است. پشت‌سرهم داریم:

$$y'=\mu x^{\mu-1}\,,\quad y''=(\mu-1)x^{\mu-2}\,,\quad y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}\,,\ \dots$$

که از آن‌جا، به‌سادگی، قانون کلی زیر به‌دست می‌آید:

$$y^{(n)}=(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

ولی، اگر بخواهیم دقیق باشیم، هنوز نیاز به‌اثبات دارد. به این منظور، روش استقرای ریاضی را به‌کار می‌بریم. فرض کنیم که این دستور، به‌ازای مقداری از n، درست باشد، یک‌بار دیگر از آن مشتق می‌گیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$[y^{(n)}]'=y^{(n+1)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)[x^{\mu-n}]'=$$

$$=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)x^{\mu-(n+1)}$$

به‌این‌ترتیب، اگر این دستور، برای n درست باشد، برای $(n+1)$ هم درست است و، در این‌جا، درستی آن، برای همهٔ مقدارهای طبیعی n، ثابت می‌شود.

مثلا، اگر $\mu=-1$ اختیار شود، داریم:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$$

و برای $\mu=-\frac{۱}{۲}$:

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{(n)}=\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)\cdots\left(-\frac{۲n-۱}{۲}\right)x^{-\frac{۱}{۲}-n}=$$

$$=\frac{(-۱)^n(۲n-۱)!!^*}{(۲x)^n\cdot\sqrt{x}}$$

وقتی که μ، برابر بـا عدد طبیعی m باشد، مشتق mام از x^m، برابر مقدار ثابت $m!$ می‌شود و ، درنتیجه، همهٔ مشتق‌های بعدی، برابر صفرند. از همین‌جا، روشن است که، برای چند جمله‌ای صحیح درجهٔ m هم، وضع مشابهی وجود دارد.

۲) برای عبارت اندکی کلی‌تر

$$y=(a+bx)^\mu \quad (a,\ b=\text{const.})$$

نیز به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$y^{(n)}=\mu(\mu-۱)\cdots(\mu-n+۱)\cdot b^n\cdot(a+bx)^{\mu-n}$$

و درحالت‌های خاص، مثل قبل، داریم:

$$\left(\frac{۱}{a+bx}\right)^{(n)}=\frac{(-۱)^n\cdot n!\cdot b^n}{(a+bx)^{n+۱}},$$

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)}=\frac{(-۱)^n\cdot(۲n-۱)!!\cdot b^n}{۲^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}$$

۳) حالا فرض کنیم $y=\ln x$. قبل‌از هرچیز، داریم:

$$y'=(\ln x)'=\frac{۱}{x}$$

بنابراین، اگر از $\frac{۱}{x}$، طبق دستور ۱)، مشتق مرتبهٔ $(n-۱)$ام بگیریم، مشتق مرتبهٔ nام $\ln x$ به‌دست می‌آید:

---

*) نماد $n!!$، حاصل‌ضرب عددهای طبیعی را نشان می‌دهد، که از n نگذرند و همهٔ آن‌ها زوج، یا همهٔ آن‌ها فرد باشند. مثلاً

$$۱۰!!=۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰ \qquad ۷!!=۱\times۳\times۵\times۷,$$

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{x^n}$$

۴) اگر $y=a^x$، آن گاه

$$y'=a^x.\ln a\,,\quad y''=a^x.(\ln a)^2,\ \ldots$$

و به‌طور کلی

$$y^{(n)}=a^x.(\ln a)^n$$

که به‌سادگی، و با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت می‌شود.

درحالت خاص، روشن است که

$$(e^x)^{(n)}=e^x$$

۵) فرض می‌کنیم $y=\sin x$، داریم:

$$y'=\cos x,\qquad y''=-\sin x,\qquad y'''=-\cos x,$$

$$y^{IV}=\sin x,\qquad y^{V}=\cos x,\ \ldots$$

از این راه، به‌سختی، می‌توان به‌عبارت کلی، برای مشتق nام، رسید. ولی، اگر پاسخ مشتق اول را، به صورت $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ بنویسیم، کار به‌کلی ساده می‌شود. معلوم می‌شود که با هرمشتق‌گیری، به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به‌آوند اضافه می‌شود. به‌نحوی که

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

و به‌طریق مشابهی، به‌دست می‌آید:

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

۶) تابع $y=\frac{1}{x^2-a^2}$ را درنظرمی‌گیریم. ابتدا، آن را به‌این شکل می‌نویسیم:

$$y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

که با استفاده ازقاعدهٔ کلی ۲)، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

۷) درحالت $y=e^{ax}\sin bx$، می‌توان از روش ظریف‌تری استفاده کرد. داریم:

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$$

زاویهٔ کمکی φ را، با این شرط‌ها، درنظر می‌گیریم:

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

حالا، عبارت مشتق اول را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$y'=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}(\sin bx\cdot\cos\varphi+\cos bx\cdot\sin\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+\varphi)$$

که با تکرار مشتق‌گیری، به‌سادگی، قانون کلی به‌دست می‌آید:

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi)$$

(اثبات را، می‌توان، با روش استقرای ریاضی، داد).

۸) حالا به‌تابع $y=\operatorname{arctg}x$ می‌پردازیم. ابتدا، سعی‌می‌کنیم $y^{(n)}$ را برحسب y بیان کنیم. چون داریم $x=\operatorname{tg}y$، بنابراین

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

که اگر، دوباره، نسبت به x مشتق بگیریم (با توجه به این‌که، y تابع x است)، به‌دست می‌آید:

$$y''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$

$$=\cos^2 y\cdot\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

مشتق‌گیری بعدی، نتیجه می‌دهد:

$$y'''=\left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cdot\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$

$$= ۲\cos^{۳}y.\cos\left(۳y+۲.\frac{\pi}{۲}\right) = ۲\cos^{۳}y.\sin ۳\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)$$

دستور کلی:

$$y^{(n)} = (n-۱)!\cos^{n}y.\sin n\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)$$

که با روش استقرای ریاضی، قابل تحقیق است.

اگر (برای $x \geqslant ۰$)، زاویهٔ

$$z = \operatorname{arc}tg\frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲} - y$$

را واردکنیم، می‌توان دستور کلی را، به‌این صورت نوشت:

$$y^{(n)} = (n-۱)!\frac{۱}{(۱+x^{۲})^{\frac{n}{۲}}}.\sin n(\pi - z)$$

یا بالاخره:

$$y^{(n)} = (-۱)^{n-۱}(n-۱)!\frac{۱}{(۱+x^{۲})^{\frac{n}{۲}}}.\sin n\operatorname{arc}tg\frac{۱}{x}$$

۹) درپایان، به‌عنوان تمرین، این رابطه را ثابت می‌کنیم:

$$D^{n}(x^{n-۱}.e^{\frac{۱}{x}}) = (-۱)^{n}\frac{e^{\frac{۱}{x}}}{x^{n+۱}} \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

درستی این رابطه، برای $n = ۱$ و $n = ۲$، مستقیماً قابل تحقیق است. فرض کنیم که این رابطه، برای همهٔ مقدارهای n تا $n \geqslant ۲$ درست باشد، ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n+۱$ هم، درست است*. به‌این منظور، عبارت زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$D^{n+۱}(x^{n}.e^{\frac{۱}{x}}) = D^{n}[D(x^{n}.e^{\frac{۱}{x}})] = D^{n}[nx^{n-۱}.e^{\frac{۱}{x}} - x^{n-۲}.e^{\frac{۱}{x}}] =$$

---

*) توجه خواننده را، به‌این شکل خاص استفاده از روش استقرای ریاضی جلب می‌کنیم. در این‌جا، عملاً، ازدرستی رابطه، برای n و $n-۱$ استفاده کرده‌ایم.

$$= n\cdot D^n(x^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{x}}) - D[D^{n-1}(x^{n-2}\cdot e^{\frac{1}{x}})]$$

که با استفاده ازفرض، این عبارت را می‌توان چنین نوشت:

$$D^{n+1}(x^n\cdot e^{\frac{1}{x}}) = n\cdot(-1)^n\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - D\left[(-1)^{n-1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right] = (-1)^{n+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

بنابراین، دستور برای همهٔ مقدارهای طبیعی n درست است.

۱۱۷. دستور لایب‌نیتس. همان‌طور که در ابتدای شمارهٔ قبل گفتیم، قاعده‌های I و II، **۹۷** را درمورد مشتق‌های مرتبهٔ دلخواه هم، می‌توان به‌کاربرد. درمورد قاعدهٔ III، که به‌مشتق‌گیری ازحاصل‌ضرب مربوط می‌شود، وضع پیچیده‌تری وجود دارد.

فرض کنیم، u و v تابع‌هایی از x وهرکدام، به طورجداگانه، دارای مشتق‌های تا مرتبهٔ nام باشند. ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، حاصل‌ضرب آن‌ها $y = u\cdot v$ نیزدارای مشتق مرتبهٔ nام است وعبارت آن را پیدا می‌کنیم.

با به‌کار گرفتن قاعدهٔ III، از این حاصل‌ضرب، پی‌درپی، مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$y' = u'\cdot v + u\cdot v', \qquad y'' = u''\cdot v + 2u'\cdot v' + u\cdot v'',$$

$$y''' = u'''\cdot v + 3u''\cdot v' + 3u'\cdot v'' + u\cdot v''', \ldots$$

از روی این رابطه‌ها می‌توان، به‌سادگی، قانونی را پیدا کرد: سمت راست این رابطه‌ها، بسط توان دوجمله‌ای را به یاد می‌آورد: $u+v$، $(u+v)^2$، $(u+v)^3$ و... تنها، به‌جای توان‌های u و v مشتق‌های مرتبه‌های نظیرقراردارند. شباهت، وقتی کاملاً برقرارمی‌شودکه، دراین رابطه‌ها، به‌جای u و v، بنویسیم $u^{(0)}$ و $v^{(0)}$. اگراین قانون را، به‌حالت nدلخواه، تعمیم دهیم، به‌دستورکلی زیر می‌رسیم*:

---

*) نماد Σ، به‌معنای مجموع جمله‌های یك نوع است. وقتی که این جمله‌ها، به‌علامتی مربوط باشندکه در مرزهای معینی تغییرمی‌کند، این مرزها را (در پایین و بالای) Σ نشان می‌دهند. مثلاً

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}, \ldots$$

$$y^{(n)}=(u.v)^{(n)}=\sum_{i=0}^{(n)}C_n^i\,u^{(n-i)}.v^{(i)}=$$

$$=u^{(n)}.v+nu^{(n-1)}.v'+\frac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}.v''+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots i}u^{(n-i)}.v^{(i)}+\dots+u.v^{(n)} \qquad (1)$$

برای اثبات درستی این رابطه، دوباره، به‌روش استقرای ریاضی، متوسل می‌شویم. فرض کنیم که این رابطه، برای مقداری از n، درست باشد. اگر برای تابع‌های u و v، مشتق‌های مرتبهٔ $(n+1)$ام نیز وجود داشته باشد، می‌توان یک‌بار دیگر، نسبت به x، مشتق گرفت، که به‌دست می‌آید:

$$y^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i[u^{(n-i)}.v^{(i)}]'=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(n-i+1)}.v^{(i)}+\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(n-i)}.v^{(i+1)}$$

حالا، جمله‌هایی از دومجموع آخری‌را، که شامل حاصل‌ضرب‌های یکسان‌مشتق‌های تابع‌های u و v هستند، به‌صورت یک جمله می‌نویسیم (مجموع مرتبه‌های مشتق‌ها، درچنین حاصل‌ضرب‌هایی، همیشه برابر است با $n+1$). حاصل‌ضرب $u^{(n+1)}.v^{(0)}$، تنها درمجموع اول (به ازای $i=0$) داده می‌شود، و ضریب آن در این جمله، برابر است با $C_n^0=1$. به‌همین‌ترتیب، $u^{(0)}.v^{(n+1)}$ هم، تنها درمجموع دوم (درجملهٔ با شمارهٔ $i=n$)، وباضریب $C_n^n=1$ وجود دارد. بقیهٔ حاصل‌ضرب‌های موجود در دومجموع، به‌صورت $u^{(n+1-k)}.v^{(k)}$ هستند و، ضمناً، $1\leqslant k\leqslant n$. چنین حاصل‌ضربی، هم درمجموع اول (جملهٔ با شمارهٔ $i=k$) و هم در مجموع دوم (جملهٔ با شمارهٔ $i=k-1$) دیده می‌شود، که مجموع ضریب‌های نظیر، عبارت است از $C_n^k+C_n^{k-1}$. ولی می‌دانیم:

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$$

به‌این‌ترتیب، سرانجام داریم:

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}.v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^ku^{[(n+1)-k]}.v^{(k)}+u^{(0)}.v^{(n+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^ku^{[(n+1)-k]}.v^{(k)}$$

زیرا داریم: $C_{n+1}^{0} = C_{n+1}^{n+1} = ۱$.

برای $y^{(n+1)}$، عبارتی کاملاً شبیه عبارت (۱) به‌دست آوردیم (تنها n، به $n+۱$ تبدیل شده است) و، به‌این ترتیب، درستی رابطهٔ (۱) برای همهٔ مقدارهای طبیعی n، ثابت شد.

رابطه‌ای را که ثابت کردیم، به رابطهٔ لایب‌نیتس موسوم است. این رابطه، اغلب، برای به‌دست آوردن عبارت کلی مشتق مرتبهٔ nام، به‌درد می‌خورد.

یادآوری می‌کنیم که این رابطه را می‌توان برای مشتق مرتبهٔ nام حاصل‌ضرب چند عامل $y = u.v...t$ هم، تعمیم داد. نتیجهٔ این تعمیم، با بسط چند جمله‌ای $(u+v+...+t)^n$، شباهت دارد.

۱۱۸. مثال‌ها. ۱) به‌کمک دستور لایب‌نیتس (۱)، این مشتق را محاسبه کنید:

$$(x^{۲}.\cos ax)^{(۵۰)}$$

با فرض $u = \cos ax$ و $v = x^{۲}$، داریم:

$$u^{(k)} = a^{k}.\cos\left(ax + k.\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$v' = ۲x, \qquad v'' = ۲, \qquad v''' = v^{IV} = ... = ۰$$

به‌این ترتیب، در دستور (۱)، همهٔ جمله‌ها، به‌جز سه جملهٔ اول، برابر صفرند و داریم:

$$(u.v)^{(۵۰)} = x^{۲}.a^{۵۰}.\cos\left(ax + ۵۰.\frac{\pi}{۲}\right) + \frac{۵۰}{۱}.۲x.a^{۴۹}.\cos\left(ax + ۴۹.\frac{\pi}{۲}\right) +$$

$$+ \frac{۵۰.۴۹}{۱\times۲}.۲.a^{۴۸}.\cos\left(ax + ۴۸.\frac{\pi}{۲}\right) =$$

$$= a^{۴۸}[(۲۴۵۰ - a^{۲}x^{۲})\cos ax - ۱۰۰ax\sin ax]$$

۲) به‌مثال ۷)، **۱۱۶** برمی‌گردیم و عبارت کلی مشتق nام این تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = e^{ax}.\sin bx$$

مستقیماً، از روی دستور لایب‌نیتس، داریم:

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[\sin bx\left(an - \frac{n(n-۱)}{۱.۲}a^{n-۲}b^{۲} + ...\right) + \right.$$

$$\left. + \cos bx\left(na^{n-۱}b - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱.۲.۳}a^{n-۳}b^{۳} + ...\right)\right]$$

۳) مطلوب است مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ام، برای تابع $y=\arcsin x$.

قبل از همه داریم:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

به‌نحوی که، با توجه به‌دستور لایب‌نیتس، داریم:

$$y^{(n+1)}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-3)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'''+\cdots$$

حالا، اگر در محاسبهٔ مشتق‌هـای متوالی $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ و $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$، از دستوری که در ۱۱۶، ۲) به‌دست آوردیم، استفاده کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$y^{(n+1)}=\frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(1+x)^n}-n.\frac{(2n-3)!!.1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(2n-5)!!.3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2}+\cdots\right\}$$

۴) مطلوب است محاسبهٔ همهٔ مشتق‌های تابع $y=\operatorname{arctg}x$، به‌ازای $x=0$.

چون $y'=\frac{1}{1+x^2}$، پس $y'(1+x^2)=1$. مشتق مرتبهٔ nام را از دوطرف این برابری (با استفاده از دستور لایب‌نیتس) پیدا می‌کنیم:

$$(1+x^2).y^{(n+1)}+2nx.y^{(n)}+n(n-1).y^{(n-1)}=0$$

$x=0$ را در این تساوی قرار می‌دهیم و مشتق را به‌ازای $x=0$، با اندیس ۰ نشان می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$y_0^{(n+1)}=-n(n-1).y_0^{(n-1)}$$

به‌ازای $x=0$، مشتق دوم $y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ برابر صفر می‌شود: $y_0''=0$، از

رابطهٔ بالا، روشن می‌شود که همواره $y_0^{(2m)} = 0$. اما در مورد مشتق‌های مرتبهٔ فرد، رابطهٔ بازگشتی زیر را داریم:

$$y_0^{(2m+1)} = -(2m-1)\cdot 2m \cdot y_0^{(2m-1)}$$

و با توجه به‌این‌که $y'_0 = 1$، نتیجه می‌شود:

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m \cdot (2m)!$$

همین نتیجه را می‌توانستیم از رابطهٔ کلی مثال ۸)، **۱۱۶** نیز به‌دست آوریم.

۵) همین‌طوراست، برای تابع $y = \arcsin x$.

راهنمائی. دستور لایب‌نیتس را، درمورد رابطهٔ زیر به‌کار برید:

$$(1-x^2)y'' - x\cdot y' = 0$$

پاسخ. $y_0^{(2m)} = 0$ و $y_0^{(2m-1)} = 1^2 \cdot 3^2 \ldots (2m-1)^2 = [(2m-1)!!]^2$. این نتیجه را، ازعبارت کلی ۳) هم می‌توان به‌دست آورد، منتهی نه‌چندان ساده.

۶) چند جمله‌های لژاندر. در خاتمه، به‌چند جمله‌ای‌های منسوب به لژاندر (A.M. Legendre) می‌پردازیم. آن‌ها، با این برابری، تعریف می‌شوند:

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

که در آن، c_n ضریب ثابتی است که مقدار آن، بسته به‌ساده شدن وضع، انتخاب می‌شود.

قبل ازهمه، توجه کنیم که چند جمله‌ای $X_n(x)$ (ازدرجهٔ n)، دارای n ریشهٔ حقیقی و متمایز است که همگی بین -1 و $+1$ واقع‌اند. محض سادگی، فعلاً فرض می‌کنیم $c_n = 1$.

به‌سادگی دیده‌می‌شود که چند جمله‌ای $(x+1)^n(x-1)^n = (x^2-1)^n$ و $(n-1)$ مشتق متوالی آن، به‌ازای $x = \pm 1$، برابر صفر می‌شوند. دراین صورت، مشتق اول آن، بنابرقضیهٔ رول [۱۱۱]، ریشه‌ای بین -1 و $+1$ دارد ومشتق دوم آن، بنا به‌همان قضیه، دارای دو ریشه بین -1 و $+1$ است وهمین‌طور تا آخر. مشتق $(n-1)$ام، علاوه بر ریشه‌های -1 و $+1$، دارای $(n-1)$ ریشه هم درفاصلهٔ آن‌هاست. اگر قضیهٔ رول را، یك باردیگر، به‌کاربریم، به‌نتیجهٔ موردنظر می‌رسیم.

حالا، با حفظ ضریب $c_n = 1$، مقدارچند جمله‌ای $X_n(x)$ را، به ازای $x = \pm 1$، معلوم می‌کنیم. با توجه به‌دستور لایب‌نیتس و این‌که توان $(x^2-1)^n$ را می‌توان به‌صورت

حاصل‌ضرب $(x+1)^n$ در $(x-1)^n$ نوشت، داریم:

$$X_n(x)=(x+1)^n\cdot\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}+C_n^1\cdot\frac{d(x+1)^n}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\dots$$

$$\dots+\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}\cdot(x-1)^n$$

چون همهٔ جمله‌ها، با آغاز از جملهٔ دوم، دارای عامل $(x-1)$ هستند، بنابراین، به‌ازای $x=1$، همهٔ آن‌ها برابر ۰ می‌شوند و داریم: $X_n(1)=2^n.n!$.

با استدلال مشابهی به‌دست می‌آید: $X_n(-1)=(-1)^n.2^n.n!$.

حالا، اگر در رابطه‌ای که، تعریف کلی چند جمله‌ای لژاندر را می‌دهد، قرار دهیم:

$$c_n=\frac{1}{2^n.n!}$$

آن‌وقت، چند جمله‌ای به دست می‌آید، که بیش از همه، با آن برخورد می‌کنیم. این چند جمله‌ای را، بعد از این، همیشه با $P_n(x)$ نشان خواهیم داد. مشخصهٔ این چندجمله‌ای آن است که در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$، این مقدارها را اختیار می‌کند:

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n$$

به‌کمک دستور لایب‌نیتس، به سادگی، می‌توان ثابت کرد که چند جمله‌ای $X_n(x)$ لژاندر، در رابطهٔ زیر، صدق می‌کند:

$$(x^2-1)X_n''+2x.X_n'-n(n+1)X_n=0$$

که نقش مهمی در نظریهٔ این چندجمله‌ای‌ها، به عهده دارد.

در واقع، با فرض $y=(x^2-1)^n$، داریم:

$$y'=2nx.(x^2-1)^{n-1}\Rightarrow(x^2-1).y'=2nxy$$

حالا، از دو طرف برابری اخیر، $(n+1)$ بار مشتق می‌گیریم. با توجه به دستور لایب‌نیتس داریم:

$$(x^2-1).y^{(n+2)}+(n+1).2x.y^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}.2.y^{(n)}=$$

$$=2nx.y^{(n+1)}+(n+1).2n.y^{(n)}$$

و از آن‌جا

$$(x^2-1).y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1).y^{(n)}=0$$

که با ضرب در c_n، رابطهٔ مورد نظر، به‌دست می‌آید.

۱۱۹. دیفرانسیل‌های مرتبهٔ بالا. حالا، به‌دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر می‌پردازیم. آن‌ها نیز، به‌کمک استقرا، تعریف می‌شوند. دیفرانسیل مرتبهٔ دوم یا دیفرانسیل دوم تابع $y=f(x)$، در یك نقطه، عبارت است از دیفرانسیل دیفرانسیل (اول) آن در این نقطه، با علامت

$$d^2y=d(dy)$$

دیفرانسیل مرتبهٔ سوم یا دیفرانسیل سوم، عبارت است از دیفرانسیل دیفرانسیل دوم:

$$d^3y=d(d^2y)$$

و به طور کلی، دیفرانسیل مرتبهٔ nام یا دیفرانسیل nام تابع $y=f(x)$، عبارت است از دیفرانسیل دیفرانسیل $(n-1)$ام:

$$d^ny=d(d^{n-1}y)$$

اگر بخواهیم ازعلامت‌های تابعی استفاده کنیم، دیفرانسیل‌های متوالی را، این‌طور، می‌توان نشان داد:

$$d^2f(x_0),\ d^3f(x_0),\ \dots,\ d^nf(x_0),\ \dots$$

که ضمناً، نشان می‌دهد که دیفرانسیل، به‌ازای $x=x_0$، گرفته شده است.

برای محاسبهٔ دیفرانسیل‌های مرتبهٔ بالاتر، توجه به‌این نکته لازم است که dx، عدد دلخواهی مستقل از x است که، در دیفرانسیل‌گیری نسبت به x، مانند ضریب ثابتی در نظر گرفته می‌شود. درچنین حالتی خواهیم داشت (درهمهٔ حالت‌ها، با فرض وجود مشتق نظیر)*:

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=dy'.dx=(y''.dx)dx=y''dx^2,$$

$$d^3y=d(d^2y)=d(y''dx^2)=dy''.dx^2=(y''dx)dx^2=y''dx^3$$

وهمین‌طور تا آخر. به‌سادگی می‌توان، قانون عمومی را حدس زد:

$$d^ny=y^{(n)}.dx^n \qquad (۲)$$

که با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شود. از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

---

*) منظور از dx^2، dx^3 و... ،همواره، توان دیفرانسیل‌هاست: $(dx)^2$، $(dx)^3$ و... دیفرانسیل ازتوان را با $d(x^2)$، $d(x^3)$ و... نشان می‌دهیم.

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$$

به‌طوری‌که، از این به‌بعد، می‌توان این نماد را، همچون یك کسر، در نظر گرفت.

با توجه به‌رابطهٔ (۲)، می‌توان به‌سادگی، دستور لایب‌نیتس را، برای دیفرانسیل‌ها، تنظیم کرد. کافی است، دوطرف آن را در dx^n ضرب کنیم، تا به‌دست آید:

$$d^n(u.v)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u d^i v \qquad (d^0u=u,\ d^0v=v)$$

خود لایب‌نیتس، این دستور را، به‌خصوص، برای دیفرانسیل ثابت کرد.

۱۲۰. به‌هم خوردن بی‌تغییری در شکل، برای دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالا. با یادآوری این‌که، دیفرانسیل (اول) تابع، دارای ویژگی بی‌تغییری شکل می‌باشد، طبیعی است این پرسش پیش‌آید که: آیا دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر، دارای این ویژگی هستند؟ نشان می‌دهیم که حتی دیفرانسیل دوم، این ویژگی را ندارد.

فرض می‌کنیم $y=f(x)$ و $x=\varphi(t)$، به‌نحوی‌که بتوان y را مانند تابع مرکبی از t در نظر گرفت: $y=f(\varphi(t))$. دیفرانسیل اول آن، نسبت به t، را می‌توان به‌صورت $dy=y'_x.dx$ نوشت، که در آن $dx=x'_t.dt$، تابعی از t است. دیفرانسیل دوم نسبت به t را، حساب می‌کنیم:

$$d^2y=d(y'_x.dx)=dy'_x.dx+y'_x.d(dx)$$

دیفرانسیل dy'_x را، باز هم با استفاده از بی‌تغییری شکل دیفرانسیل (اول)، به‌صورت $dy'_x=y''_x.dx$ می‌نویسیم، به‌طوری‌که بالاخره

$$d^2y=y''_x.dx^2+y'_x.d^2x \qquad (۳)$$

درحالی‌که، اگر x متغیرمستقیمی باشد، دیفرانسیل دوم، به‌صورت $d^2y=y''_x.dx^2$ در می‌آید. روشن است که عبارت (۳)، برای d^2y، خیلی کلی‌تر است: اگر درحالت خاص، x را متغیرمستقل بگیریم $d^2x=0$ می‌شود و تنها جملهٔ اول باقی می‌ماند.

مثال. فرض کنیم $y=x^2$. اگر x، متغیرمستقل باشد، داریم:

$$dy=2xdx, \qquad d^2y=2dx^2$$

حالا، فرض می‌کنیم $x=t^2$، یعنی $y=t^4$ و

$$dy=4t^3dt, \qquad d^2y=12t^2dt^2$$

عبارت dy را می‌توان از عبارت قبلی به‌دست آورد، به‌شرطی که در آن، $x=t^2$ و $dx=2tdt$ قرار دهیم. ولی در مورد d^2y، وضع به نحو دیگری است: اگر همان جای‌گزینی را انجام دهیم، به‌جای $12t^2dt^2$، به‌مقدار $8t^2dt^2$ می‌رسیم؛ ولی اگر از رابطهٔ $dy=2xdx$ نسبت به t، با توجه به این که x تابعی از t است، دیفرانسیل بگیریم، مانند (۳) به این رابطه می‌رسیم:

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x$$

در این‌جا با قراردادن $x=t^2$، $dx=2tdt$، $d^2x=2dt^2$، همان نتیجهٔ درست $12t^2dt^2$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، اگر x، از حالت متغیر مستقل بودن در آید، دیفرانسیل مرتبهٔ دوم d^2y، برحسب دیفرانسیل‌های x، بادستور دوجمله‌ای (۳) بیان می‌شود. در مورد دیفرانسیل مرتبهٔ سوم و مرتبه‌های بعدی، تعداد جمله‌های اضافی (ضمن عبور به متغیر مستقل جدید) بازهم زیادتر می‌شود. به این ترتیب، ضمن بیان مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر y''_{x^2}، y'''_{x^2}، .... برحسب دیفرانسیل‌ها

$$y''_{x^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\quad,\qquad y'''_{x^2}=\frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots \tag{۴}$$

نمی‌توان، دیفرانسیل‌ها را برحسب متغیر دلخواه نوشت. این دیفرانسیل‌ها، تنها برحسب متغیر x هستند.

۱۲۱. دیفرانسیل‌گیری پارامتری. با وجود این، می‌توان، عبارت مشتق نسبت به x را، برحسب دیفرانسیل‌هایی که نسبت به متغیر دلخواه t گرفته شده‌اند، نوشت، ولی این عبارت‌ها، بی‌اندازه بغرنج‌اند. مثلاً، با توجه به این‌که همهٔ دیفرانسیل‌های زیر، برحسب t گرفته شده‌اند، به‌ترتیب داریم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx},\ y''_{x^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^2}$$

یعنی

$$y''_{x^2}=\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3} \tag{۵}$$

سپس

$$y''_{x^2}=\left(\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)'_x=\frac{d\left(\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^2}\right)}{dx}=$$

$$=\frac{dx^3(dx\cdot d^3y-d^3x\cdot dy)-3dx^2d^2x(dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy)}{dx^6}$$

و بالاخره

$$y''_{x^2}=\frac{dx(dx\cdot d^3y-d^3x\cdot dy)-3d^2x(dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy)}{dx^5} \qquad (۶)$$

و همین طور، برای بقیه. رابطه‌های (۵)، (۶) و ...، رابطه‌هایی کلی هستند، که اگر در آن‌ها، x را متغیر مستقل بگیریم، d^2x، d^3x و ... صفر می‌شوند و به‌همان رابطه‌های (۴) می‌رسیم.

این دستورها، که مشتق y را نسبت به x می‌دهند، به دیفرانسیل‌گیری پارامتری موسوم‌اند. اگر x و y، نسبت به پارامتر t داده شده باشند:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

آن‌وقت، همان‌طور که در **۱۰۶** دیدیم، با همین معادله‌ها، y به عنوان تابعی از x تعریف می‌شود: $y=f(x)$. اگر مشتق‌های متوالی y و x نسبت به t وجود داشته باشند، مشتق‌های نظیر y نسبت به x هم وجود دارند، و به کمك دستورهایی که در بالا آوردیم، بیان می‌شوند.

گاهی بهتر است که عبارت مشتق y نسبت به x را برحسب مشتق (و نه دیفرانسیل) x و y نسبت به t داشته باشیم. این دستورها، به سادگی، از عبارت‌های دیفرانسیل، و با تقسیم صورت و مخرج به ترتیب بر dt، dt^2، dt^3، ... به‌دست می‌آیند. از این راه، به دستورهای زیر می‌رسیم:

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{x'_t\cdot y''_{t^2}-x''_{t^2}\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

و به همین ترتیب

$$y''_{x^2}=\frac{x'_t(y'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_t\cdot y''_{t^2}-x''_{t^2}\cdot y'_t)}{(x'_t)^5}$$

و همین‌طور، برای بقیهٔ مشتق‌ها.

۱۲۲. تفاضل‌های محدود. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$، در بازه‌ای مثل $\mathfrak{D}$ معین باشد و هر مقداری از x را که به آن برخورد می‌کنیم، متعلق به این بازه به‌حساب می‌آوریم. اگر نمو Δx از متغیر x را تثبیت کنیم (برای مشخص بودن وضع $\Delta x>0$ می‌گیریم، هر چند که هیچ مانعی ندارد که فرض کنیم $\Delta x<0$)، فرض می‌کنیم:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

و آن را تفاضل اول تابع می‌نامیم. تفاضل دوم، عبارت است از تفاضل اول از تفاضل اول:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta[\Delta f(x)]=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x)=$$
$$=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$$

تفاضل‌های بالاتر، با استقرا تعریف می‌شوند:

$$\Delta^n f(x)=\Delta[\Delta^{n-1}f(x)]$$

ضمناً، برای تفاضل nام، می‌توان دستور زیر را ثابت کرد:

$$\Delta^n f(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i f(x+\overline{n-i}\,\Delta x)=$$

$$=f(x+n\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\Delta x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f(x+\overline{n-2}\,\Delta x)-$$
$$-\ldots+(-1)^n f(x)$$

که مستقیماً، این تفاضل را، برحسب مقدارهای تابع $f(x)$، در نقطه‌های

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ \ldots,\ x+n\Delta x$$

به‌دست می‌دهد. این دستور را می‌توان، باروش استقرای ریاضی، ثابت کرد، که ما به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون، این تفاضل‌های متناهی را، با مشتق‌ها و دیفرانسیل‌ها، مقایسه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، دارای $(n-1)$ مشتق پیوسته

$$f'(x)\cdot f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

در بازهٔ بستهٔ $[x_0 , x_0+n\Delta x]$ و مشتق متناهی nام $f^{(n)}(x)$، دست‌کم در بازهٔ باز $(x_0 , x_0+\Delta x)$ باشد. آن‌گاه، دستور زیر را داریم:

$$\Delta^n f(x_0)=f^{(n)}(\xi_n).\Delta x^n \qquad (x_0<\xi_n<x_0+n\Delta x) \qquad (۷)$$

به‌ازای $n=۱$، به دستور نمودهای محدود می‌رسیم، که در واقع، ساده‌ترین حالت دستور(۷) است. دنبالهٔ کار را باروش استقرای ریاضی می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دستور (۷)، به‌ازای $n-۱$، درست باشد، ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای n هم درست است. روشن است که وقتی دستور (۷) را برای $n-۱$ می‌نویسیم، نه تنها در رابطهٔ (۷) باید n را به $n-۱$ تبدیل کنیم، بلکه در فرض‌های متناظر هم باید، تغییر نظیر را به‌وجود آوریم و، سپس، دستور (۷) را با فرض‌های داده شده، ثابت کنیم. از این‌جا، نتیجه می‌شود که برای تابع $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$، در بازهٔ $[x_0 , x_0+\overline{n-۱}\,\Delta x]$، شرط‌های مورد قبول دستور تغییر یافتهٔ (۷)، به‌خوبی صدق می‌کند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta^{n-۱}[\Delta f(x_0)]=\Delta^n f(x_0)=[f^{(n-۱)}(\xi_{n-۱}+\Delta x)-f^{(n-۱)}(\xi_{n-۱})]\cdot\Delta x^{n-۱} \qquad (۸)$$

که در آن داریم: $x_0<\xi_{n-۱}<x_0+\overline{n-۱}\Delta x$. که اگر، دستور نمودهای محدود را، در مورد سمت راست برابری، به‌کار بریم*، مستقیماً، دستور (۷) به‌دست می‌آید. ضمناً

$$x_0<\xi_{n-۱}<\xi_n<\xi_{n-۱}+\Delta x<x_0+n\Delta x$$

توجه کنیم که، اگر مشتق $f^{(n)}(x)$ نیز، در نقطهٔ x_0 وجود داشته و، ضمناً، در این نقطه پیوسته باشد، آن‌گاه، از رابطهٔ (۷)، به ازای $\Delta x\to ۰$ (که در نتیجه $\xi_n\to x_0$)، نتیجه می‌شود:

$$f^{(n)}(x_0)\underset{\Delta x\to ۰}{\text{حد}}\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n} \qquad (۹)$$

در ضمن، این دستور جالب، این امکان را فراهم می‌کند که بتوانیم، مشتق nام یك تابع را تنها با استفاده از یك حد، به‌دست آوریم. تنها شرطی که در این‌جا لازم است، این است که این مشتق، به‌خصوص در نقطهٔ x_0، وجود داشته باشد. و این، به معنای آن است که در همسایگی نقطه x_0، مشتق‌های زیر وجود دارند:

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-۱)}(x)$$

---

*) این امر بلامانع است، زیرا تابع $f^{(n-۱)}(x)$، در بازهٔ $[x_0 , \xi_{n-۱}+\Delta x]$ پیوسته و در درون آن، دارای مشتق متناهی $f^{(n)}(x)$ است.

و در نتیجه، به‌ازای مقدار به‌قدر کافی کوچك Δx، می‌توان از دستور (۸) استفاده کرد. با توجه به‌وجود مشتق $f^{(n)}(x_0)$ و با استفاده از دستور (۲) شمارهٔ ۹۶، می‌توانیم بنویسیم:

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1}-x_0)+\alpha\cdot(\xi_{n-1}-x_0)$$

و

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1}+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1}+\Delta x-x_0)+$$
$$+\beta\cdot(\xi_{n-1}+\Delta x-x_0)$$

که در آن‌ها، α و β بستگی به Δx دارند و همراه با آن، به‌سمت صفر میل می‌کنند. از این‌جا، و از (۸)، نتیجه می‌شود*:

$$\Delta^n f(x_0)=[f^{(n)}(x_0)+\gamma]\cdot\Delta x^n$$

که در آن، γ، بی‌نهایت کوچك تازه‌ای است. بالاخره، با تقسیم جمله به جملهٔ این برابری بر Δx^n و با گذر به حد به‌ازای $\Delta x\to 0$ به‌دستور (۹) می‌رسیم.

تأکید می‌کنیم که، این رابطه، تنها با فرض وجود مشتق $f^{(n)}(x_0)$، معنا دارد. حد راست هم، وقتی می‌تواند وجود داشته باشد که این مشتق وجود نداشته باشد**. برای مثال، این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)\quad\text{و}\quad f(0)=0$$

$x_0=0$ می‌گیریم. برای آن، مشتق اول وجود دارد:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\ (x\neq 0)\quad\text{و}\quad f'(0)=0$$

ولی، مشتق دوم، در نقطهٔ ۰، وجود ندارد، زیرا رابطهٔ

$$\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\frac{2\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}-\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=2\sin\frac{1}{\Delta x}-\frac{\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

وقتی که $\Delta x\to 0$، دارای حدی نیست. در عین‌حال، عبارت

---

*) با در نظر گرفتن $0<\xi_{n-1}-x_0<(n-1)\Delta x$ (به‌ازای $\Delta x>0$).

**) به نحوی که دستور (۹)، به‌هیچ‌وجه، تعریف تازه‌ای، از خود مفهوم مشتق nام ــ که هم‌ارز تعریف سابق باشد، نمی‌دهد.

$$\frac{\Delta^۲ f(۰)}{\Delta x^۲}=\frac{f(۰+۲\Delta x)-۲f(۰+\Delta x)+f(۰)}{\Delta x^۲}=$$

$$=\frac{۸\Delta x^۳\cdot \sin\frac{۱}{۲\Delta x}-۲\Delta x^۳\cdot \sin\frac{۱}{\Delta x}}{\Delta x^۲}=۸\Delta x\cdot \sin\frac{۱}{۲\Delta x}-$$

$$-۲\Delta x\cdot \sin\frac{۱}{\Delta x}\to ۰$$

§ ۵. دستور تیلور

۱۲۳. دستور تیلور برای چند جمله‌ای. اگر $p(x)$، چندجمله‌ای کاملی از درجهٔ n باشد:

$$p(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\dots+a_nx^n \qquad (۱)$$

با مشتق گیری از آن، به‌دست می آید:

$$p'(x)=a_۱+۲\cdot a_۲x+۳\cdot a_۳x^۲+\dots+n\cdot a_nx^{n-۱},$$

$$p''(x)=۱\cdot ۲\cdot a_۲+۲\cdot ۳\cdot a_۳x+\dots+(n-۱)n\cdot a_nx^{n-۲},$$

$$p'''(x)=۱\cdot ۲\cdot ۳\cdot a_۳+\dots+(n-۲)(n-۱)n\cdot a_nx^{n-۳},$$

. . . . . .

$$p^{(n)}(x)=۱\cdot ۲\cdot ۳\dots n\cdot a_n$$

که با قراردادن $x=۰$، در این رابطه‌ها، می‌توان ضریب‌های چندجمله‌ای را، برحسب مقدارهای خود چند جمله‌ای و مشتق‌های آن، به‌ازای $x=۰$، بیان کرد:

$$a_۰=p(۰),\ a_۱=\frac{p'(۰)}{۱!},\ a_۲=\frac{p''(۰)}{۲!},$$

$$a_۳=\frac{p'''(۰)}{۳!},\ \dots,\ a_n=\frac{p^{(n)}(۰)}{n!}.$$

و اگر، این مقدارها را، در (۱) قرار دهیم.

$$p(x)=p(۰)+\frac{p'(۰)}{۱!}x+\frac{p''(۰)}{۲!}x^۲+$$

$$+\frac{p'''(۰)}{۳!}x^۳+\dots+\frac{p^{(n)}(۰)}{n!}x^n \qquad (۲)$$

که اختلاف آن با (۱)، در شیوهٔ نوشتن ضریب‌ها است.

به‌جای آنکه چندجمله‌ای را، برحسب توان‌های x بنویسیم، می‌توانیم آن‌را برحسب توان‌های $(x-x_0)$ بسط دهیم. که در آن، x_0 عبارت است از مقدار خاصی از x (مقدار ثابت):

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\cdots+ \\ +A_n(x-x_0)^n \qquad (3)$$

با فرض $x-x_0=\xi$ و $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$، برای ضریب‌های چندجمله‌ای

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\cdots+A_n\xi^n$$

با توجه به‌آن‌چه در بالا گفتیم، داریم:

$$A_0=P(0),\ A_1=\frac{P'(0)}{1!},\ A_2=\frac{P''(0)}{2!},$$

$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

از طرف دیگر

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\ P'(\xi)=p'(x_0+\xi),\ P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ \ldots$$

به نحوی که داریم:

$$P(0)=p(x_0),\ P'(0)=p'(x_0),\ P''(0)=p''(x_0),\ \ldots$$

و

$$\left.\begin{aligned} A_0=p(x_0),\ A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\ A_2=\frac{p''(x_0)}{2!} \\ A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

به این ترتیب، می‌توان ضریب‌های بسط (۳) را، برحسب مقدارهای چندجمله‌ای و مشتق‌های آن، به‌ازای $x=x_0$، نوشت.

عبارت‌های (۴) را، در (۳) قرار می‌دهیم:

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ \\ +\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (5)$$

دستور (۵) و همچنین حالت خاص آن (به‌ازای $x_0 = 0$)، یعنی دستور (۲)، بـه دستور تیلور*(B. Taylor) موسوم است، وروشن است که، در جبر، چه‌کاربرد مهمی دارد.

این یادآوری روشن (که بعدها، از آن استفاده خواهیم کرد)ضرری ندارد که، اگـر چند جمله‌ای $p(x)$، به‌صورت زیر نوشته شود:

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3+\ \cdots\ +\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n$$

آن‌گاه الزاماً داریم:

$$p(x_0)=c_0,\ p'(x_0)=c_1,\ p''(x_0)=c_2,\ \cdots,\ p^{(n)}(x_0)=c_n$$

۱۲۴. بسط تابع غیرمشخص، جمله‌ٔ متمم به شکل په‌آنو. حالا، به بررسی تابع غیر‌مشخص $f(x)$، که در حالت کلی، چندجمله‌ای نیست،می‌پردازیم. فرض کنیم، تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، دارای مشتق‌های متوالی تا مرتبهٔ nام باشد. در واقع، اگـر دقیق‌تر بگوییم: تابع باید معین و دارای مشتق‌های تا مرتبهٔ $(n-1)$ام

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(x)$$

در بازه‌ای مثل $[a, b]$، شامل نقطهٔ x_0**، باشدو،علاوه بر آن، درخود نقطهٔ x_0، دارای مشتق مرتبهٔ nام باشد. آن‌وقت، طبق نمونهٔ (۵)، برای تابع $f(x)$ هم، می‌توان، یك چندجمله‌ای تشکیل داد:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (۶)$$

بنابر یـادآوری قبلی، این چند جمله‌ای و مشتق‌های آن (تـا مرتبهٔ n ام)، در نقطهٔ x_0، دارای همان مقدارهای تابع $f(x)$ و مشتق‌های آن هستند.

---

*) ضمناً، دستور (۲) را، غالباً، دستور ماکلورن (C. Maclaurin) می‌گویند.

**) در حالتی‌که x_0، یکی از دو انتهای بازهٔ $[a,b]$ باشد،آن‌گاه، بایدمشتق یك طرفه دراین نقطه را، در نظر داشته باشیم.

ولی، این‌بار، اگر $f(x)$ چند جمله‌ای درجهٔ n صحیح نباشد، نمی‌توان برابری $f(x)=p(x)$ را ثابت کرد. دراین مورد، $p(x)$، تنها تقریبی از تابع $f(x)$ را به‌دست می‌دهد. به‌این‌دلیل، بررسی تفاضل

$$r(x)=p(x)-f(x) \qquad (۷)$$

اهمیت خاصی پیدا می‌کند.

قبل‌ازهرچیز،معلوم کنیم که، وقتی $x\to x_0$، این‌تفاضل، به‌صورت بی‌نهایت کوچکی، از مرتبهٔ بالاتر از n (درمقایسهٔ با $x-x_0$) درمی‌آید:

$$r(x)=o((x-x_0)^n) \qquad (۸)$$

باتوجه به‌ویژگی چند جمله‌ای $p(x)$، روشن است که برای تابع $r(x)$، داریم:

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\dots=r^{(n)}(x_0)=0 \qquad (۹)$$

اکنون می‌توانیم‌حکم‌کلی‌تر را بیاوریم: اگر برای تابع $r(x)$،که درنقطه x_0دارای مشتق تامرتبه nام می‌باشد، شرطهای (۸) برقرارباشد، آن‌گاه، رابطهٔ (۹) هم‌برقراراست.

اثبات را، با روش استقرای ریاضی، می‌دهیم. به‌ازای $n=1$، این‌حکم، به‌صورت زیردرمی‌آید: اگرتابع $r(x)$،که درنقطهٔ x_0 دارای مشتق (مرتبهٔ اول) است، درشرطهای

$$r(x_0)=r'(x_0)=0$$

صدق‌کند، آن‌وقت داریم:

$$r(x)=o(x-x_0)$$

که درستی آن، مستقیماً تحقیق می‌شود:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0}=r'(x_0)=0$$

حالا فرض می‌کنیم، این حکم برای یک‌عدد $n\geqslant 1$ درست باشد و ثابت‌می‌کنیم که، دراین‌صورت، برای $n+1$ هم، درست است. یعنی، اگر برای تابع $r(x)$،که همهٔ مشتق‌های تامرتبهٔ nام را دارد، این شرطها برقرار باشدکه

$$r(x_0)=r'(x_0)=r''(x_0)=\dots=r^{(n)}(x_0)=r^{(n+1)}(x_0)=0 \qquad (۹^*)$$

درآن‌صورت داریم:

$$r(x)=o((x-x_0)^{n+1}) \qquad (۸^*)$$

از (*۹) دیده می‌شود که تابع $r'(x)$، در شرط‌هایی از نوع (۹) صدق می‌کند و، بنابراین، بنابر فرض استقرا، داریم:

$$r'(x)=o((x-x_0)^n)$$

ولی، بنابر دستور نموهای محدود [۱۱۲]:

$$r(x)=r(x)-r(x_0)=r'(c)\cdot(x-x_0)$$

که در آن، c محصور بین x و x_0 است، زیرا $|c-x_0|<|x-x_0|$. بنابراین

$$r'(c)=o((c-x_0)^n)=o((x-x_0)^n)$$

و بالاخره به (*۸) می‌رسیم، که اثباتش لازم بود.

به‌این ترتیب، حکم مفروض، برای هر عدد طبیعی n درست است و برای تفاضل (۷)، درواقع، رابطهٔ (۸) صدق می‌کند. با توجه به (۶)، این رابطه به‌دست می‌آید:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (10)$$

که تفاوت آن با دستور (۶)، تنها در جملهٔ متمم (۸) است. این جملهٔ متمم را، به‌شکلی که در این‌جا آوردیم، به‌آنو (G. Peano) داده است. دستور (۱۰) را، دستور تیلور با جملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو گویند.

دستوری که ثابت کردیم، درواقع، تعمیم طبیعی دستور (۳) شمارهٔ **۹۶** است که می‌توان آن‌را، به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)$$

که درواقع، نظیر $n=1$ است. در آن‌جا، تابع $f(x)$، با دقت تا بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از واحد، به‌صورت یک تابع خطی درآمد، و در این‌جا، آن‌را به‌صورت چند جمله‌ای صحیح درجهٔ nام، و با دقت تا بی‌نهایت کوچک بالاتر از مرتبهٔ n، درآوریم.

به‌سادگی، می‌توان ثابت کرد که چنین نمایشی از تابع، منحصر به‌فرد است، یعنی، اگر درعین‌حال، در همسایگی x_0 داشته باشیم:

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

و

$$f(x)=A'_0+A'_1(x-x_0)+A'_2(x-x_0)^2+\cdots+A'_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

در آن‌صورت، الزاماً خواهیم داشت:

$$A_0=A'_0,\ A_1=A'_1,\ \ldots,\ A_n=A'_n$$

در واقع، از اتحاد

$$A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\equiv$$
$$\equiv A'_0+A'_1(x-x_0)+A'_2(x-x_0)^2+\cdots+A'_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

به‌ازای $x\to x_0$، مستقیماً به‌دست می‌آید $A_0=A'_0$. با حذف این جمله‌ها، و تقسیم دوطرف بر $x-x_0$، داریم:

$$A_1+A_2(x-x_0)+\cdots+A_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})\equiv$$
$$\equiv A'_1+A'_2(x-x_0)+\cdots+A'_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})$$

که از آن‌جا، به‌ازای $x\to x_0$، به‌دست می‌آید $A_1=A'_1$ وغیره.

گاهی بهتراست دستور (۱۰) را، به‌صورت دیگری، به‌کار ببریم، جملهٔ متمم $r(x)$ را، می‌توان به‌صورت

$$r(x)=\frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n$$

درآورد، که در آن، α بستگی به x دارد و همراه با $x-x_0$، به‌سمت ۰ میل می‌کند. با در نظر گرفتن این‌مقدار، برای $f(x)$، داریم:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n \qquad (10a)$$

سپس، اگر در دستور (۱۰)، $f(x_0)$ را به سمت چپ تساوی بیاوریم و فرض کنیم $x-x_0=\Delta x$، می‌توان آن را، به‌این‌صورت نوشت:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot\Delta x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n+o(\Delta x)^n \qquad (10b)$$

که در این‌شکل خود، بازهم به‌دستور (۳) شمارهٔ ۹۶، نزدیک‌تر است:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

در رابطهٔ آخری، تنهاجملهٔ اصلی‌را، از بی‌نهایت کوچک نمو تابع $\Delta f(x)$، بادرنظر گرفتن Δx به‌عنوان بی‌نهایت کوچک اصلی، جـدا می‌کند، درحالی‌کـه در دستور (۱۰b)، همهٔ جمله‌ها تامرتبهٔ n، نوشته شده‌اند، ضمناً، همهٔ آن‌ها، بی‌نهایت کوچک‌های ساده‌ای، به‌معنای شماره ۶۳ هستند.

به‌این ترتیب، نمو تابع برحسب نمو متغیر مستقل ــ باتقریب جملهٔ متمم ــ بسط داده شده است.

بالاخره، با به‌خاطر آوردن

$$f'(x_0)\cdot\Delta x=df(x_0),\qquad f''(x_0)\cdot\Delta x^2=d^2f(x_0),\ \dots$$
$$\dots,\ f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n=d^nf(x_0)$$

می‌توانیم (۱۰b) را، به‌این‌صورت بنویسیم:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n)$$

از این‌جا می بینیم که (به‌ازای $\Delta x\to 0$)، دیفرانسیل‌های متوالی، باتقریب تافاکتوریل‌های مخرج، ساده‌ترین جمله‌های بی نهایت کوچک درجه‌های نظیر، در بسط بی‌نهایت کوچک نمو تابع، می باشند.

۱۲۵. مثال‌ها. ساده‌ترین دستور تیلور وقتی به‌دست می‌آید که فرض کنیم $x_0=0$*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\qquad(11)$$

به‌عنوان مثال، از روی این دستور، چند تابع مقدماتی مشخص را، بسط می‌دهیم.

۱) فرض کنیم $f(x)=e^x$، دراین‌صورت داریم $f^{(k)}(x)=e^x$ $(k=1,2,3,\dots)$. از آن‌جا که دراین‌حالت $f(0)=1$ و $f^{(k)}(0)=1$، بنابراین، باتوجه به‌دستور (۱۱)

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

۲) اگر $f(x)=\sin x$، آن گاه $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ و داریم:

---

*) و همان‌طور که قبلا هم گفتیم، این‌حالت خاص را، دستور ماکلورن گویند.

$$f(0)=0\,,\qquad f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0\,,$$

$$f^{(2m-1)}(0)=\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{m-1}\quad(m=1,2,3,\dots)$$

به این ترتیب، با توجه به‌دستور (۱۱) $(n=2m)$، به‌دست می‌آید:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$$

۳) به‌صورت مشابهی، برای تابع $f(x)=\cos x$، داریم:

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f(0)=1\;;\quad f^{(2m)}(0)=(-1)^m;$$

$$f^{(2m-1)}(0)=0\qquad(m=1,2,3,\dots)$$

به‌این ترتیب، اگر در(۱۱)، فرض کنیم $n=2m+1$، داریم:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^m\cdot\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$$

۴) حالا، تابع توانی x^m را درنظر می‌گیریم، که در آن، m نه عدد طبیعی است و نه‌صفر. دراین‌حالت، وقتی $x\to 0$، یا خود تابع (به‌ازای $m<0$) و یا مشتق‌های آن (با آغاز از مرتبه‌ای مثل $n>m$)، بی‌نهایت بزرگ می‌شوند. به‌همین‌مناسبت، دراین‌جا، نمی‌توان $x_0=0$ گرفت.

$x_0=1$ می‌گیریم، یعنی x^m را برحسب توان‌های $(x-1)$ بسط می‌دهیم. همان‌طور که قبلاً هم دیده‌ایم، $(x-1)$ را می‌توان، به‌عنوان متغیر جدید درنظر گرفت. ولی ما، برای‌راحتی‌کار، متغیر را xمی‌گیریم‌وتابع $(1+x)^m$ را برحسب‌توان‌های x بسط‌می‌دهیم.

به‌طوری‌که می‌دانیم [۲،۱۱۶]:

$$f^{(k)}(x)=m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

به‌نحوی‌که

$$f(0)=1;\quad f^{(k)}(0)=m(m-1)\dots(m-k+1)$$

و بسط تابع، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

درحالت‌های خاص، برای $n=2$، و $m=-1$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$، به‌ترتیب داریم:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x}=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

بسط اول، خیلی‌ساده و به‌طور مقدماتی، به‌دست می‌آید. دراین‌جا، جملهٔ متمم، برابر است با $\frac{x^3}{1+x}$. ولی بسط‌های دوم وسوم، مستلزم برآوردهای طولانی‌تری هستند [با ۶۳ مقایسه کنید].

۵) تابع لگاریتمی $f(x)=\ln x$ هم، وقتی $x\to 0$، به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند و، بنابراین، شبیه تمرین قبل، بهتر است تابع $f(x)=\ln(1+x)$ را در نظر بگیریم و آن را، برحسب توان‌های x، بسط دهیم.

دراین‌صورت [۱۱۶ ، ۳)]*:

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$f(0)=0\ ,\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

از آن‌جا

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

۶) اکنون فرض می‌کنیم $f(x)=\operatorname{arc}tg\,x$. در ۱۱۸ ، ۴)، مقدار مشتق‌های متوالی را، به‌ازای $x=0$، پیدا کردیم:

$$f^{(2m)}(0)=0\ ,\quad f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!$$

---

*) هرجا به ۰! برخوردکردیم، برابر ۱ به‌حساب خواهیم آورد.

و بنابراین، بسط آن، به‌این‌صورت، درمی‌آید:

$$\text{arc}tgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m})$$

۷) برای تابع $f(x) = tgx$، محاسبهٔ ضریب‌ها، به‌کمك دستور تیلور، کمی مفصل می‌شود. باوجوداین، می‌توان به‌سادگی، چند جملهٔ اول را نوشت. داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\quad f''(x) = 2\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x},\quad f'''(x) = 2\cdot\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f^{IV}(x) = 8\sin x\cdot\frac{2+\sin^2 x}{\cos^5 x}$$

بنابراین

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{IV}(0)=0$$

به‌نحوی که

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

با استفاده از این بسط‌ها، می‌توان برای بسط تابع‌های بغرنج‌تر، حتی به‌مشتق متوسل نشد؛ مثلاً، بسط tgx را، می‌شد از روی بسط‌های $\sin x$ و $\cos x$ به‌دست آورد. به‌مثال‌های تازه‌ای می‌پردازیم؛ ضمناً، توان x را، تا آن‌جا که داریم، به‌حساب می‌آوریم و همهٔ توان‌های بالاتر را، درجملهٔ متمم جا خواهیم داد.

۸) بسط تابع $e^{\sin x}$ را تا جملهٔ شامل x^3 بنویسید. بنا به ۱) داریم:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)^*$$

و با توجه به ۲)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

بنابراین

---

*) درواقع، می‌بایستی بنویسیم $o(\sin^3 x)$، ولی، با توجه به هم‌ارزی بی‌نهایت کوچك‌های x و $\sin x$، نوشتن $o(x^3)$، اشکالی ندارد.

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

جمله‌های شامل x^3 حذف می‌شوند و ، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

و به‌طریق مشابهی، می‌توان حساب کرد:

$$e^{\operatorname{tg}x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

۹) تابع $\ln\cos x$ را، تا جملهٔ x^6، بسط دهید. طبق ۵)

$$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]=(\cos x-1)-\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+$$

$$+\frac{1}{3}(\cos x-1)^3+o(x^6)^*$$

ضمناً، با توجه به ۳)

$$\cos x-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^6)$$

از آن‌جا

$$\ln\cos x=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)+o(x^6)$$

ویا، پس‌از مرتب کردن

$$\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$$

و به‌همین ترتیب

---

*) چون $\cos x-1$ با x^2 هم‌مرتبه است [۶۱]، پس $o((\cos x-1)^3)$، با $o(x^6)$ هم‌ارز است.

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)$$

و

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6+o(x^6)$$

همهٔ این بسطها را، که مستقیماً بدون‌استفاده از دستورتیلور پیدا کردیم، بی‌شك از روی دستورتیلور هم می‌توان به‌دست آورد (که باتوجه به‌منحصر بودن نتیجهٔ بسط ــ که قبلاً ثابت کردیم)، همین ضریب‌ها، به‌دست می‌آید.

یادداشت. چون تابع‌های مفروض را، درهمسایگی x_0، قابل مشتق‌گیری، تا هرمرتبهٔ دلخواه درنظر گرفتیم، بنابراین، درانتخاب n برای دستور (۱۱)، هیچ محدودیتی‌نداریم و می‌توانیم، بسط این تابع‌ها را، تا توان دلخواه، ادامه دهیم.

۱۲۶. شکل‌های دیگر جملهٔ متمم. دستور تیلور با جملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو، کاربردهای‌زیادی دارد (فصل‌بعد را ببینید)؛ ولی همهٔ آن‌ها، خصلت به‌اصطلاح «موضعی» دارند، یعنی بستگی به‌خود نقطهٔ x_0 دارند. و اگرهم، درآن‌ها، صحبت از مقدارهای دیگر x شود، این مقدارها، «به‌قدرکافی نزدیك» به x_0 فرض می‌شوند و، ازپیش، نمی‌توانند به‌طور مشخص انتخاب شوند.

طبیعی است، کوشش کنیم ازچنان چندجمله‌ای $p(x)$، به‌عنوان تقریبی از تابع $f(x)$ استفاده کنیم، که درضمن بتوانیم آن را با هر دقت لازم، محاسبه کنیم.

برای آن که‌چندجمله‌ای $p(x)$، برای چنین نقشی‌مناسب باشد، باید این‌امکان وجود داشته‌باشدکه بتوانیم تفاضل (۷) را، به‌ازای x مفروض، برآوردکنیم. دراین‌مورد، شکل په‌آنو ــ که تنها این موضوع را مشخص می‌کندکه، به‌ازای $x\to x_0$، $r(x)$ هم به‌سمت صفر میل می‌کند ــ نمی‌تواند سودمند باشد. این‌شکل جملهٔ متمم، معلوم نمی‌کندکه‌به‌ازای چه مقدارهایی از x، چند جمله‌ای $p(x)$، تابع $f(x)$ را، با دقتی‌که از پیش داده شده است، به‌دست می‌دهد؛ همچنین، دراین‌باره‌که، برای x مفروض، چگونه می‌توان، با بزرگ کردن n*، بر مقدار جملهٔ متمم $r(x)=r_n(x)$ اثرگذاشت، هیچ چیز نمی‌گوید؛ و خیلی چیزهای دیگر.

به‌این‌دلیل، به‌جست‌وجوی شکل‌های دیگر جملهٔ متمم، نیاز داریم. محض‌مشخص‌بودن وضع، بازهٔ $[x_0, x_0+H]$ $(H>0)$ را، درسمت راست نقطهٔ x_0، درنظرمی‌گیریم

---

*) لازم به‌یادآوری است‌که جملهٔ متمم $r(x)$، درحالت‌کلی، بستگی به n دارد، و برای تاکید همین‌کیفیت است‌که ما آن را با $r_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

و تابع $f(x)$ را، در این بازه، معین به‌حساب می‌آوریم؛ درحالتی‌هم‌که تابع، در بازهٔ $[x_0 - H, x_0]$ داده شده باشد، همین تأکید می‌شود.

این‌بار، بافرض‌های سنگین‌تری آغاز می‌کنیم که در تمامی بازهٔ $[x_0, x_0 + H]$، n مشتق پیوستهٔ

$$f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ f'''(x)\ ,\ \dots\ ,\ f^{(n)}(x)$$

وجوددارد، علاوه‌بر آن، دست‌کم در بازهٔ باز $(x_0, x_0 + H)$، مشتق متناهی مرتبهٔ $(n+1)$ام، یعنی $f^{(n+1)}(x)$ وجود دارد.

ملاحظه کنیم که با توجه به (۶) و (۷) داریم:

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) -$$

$$- \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (12)$$

حالا، مقدار دلخواه x از بازهٔ $(x_0, x_0 + H]$ را در نظر می‌گیریم و ازروی نمونهٔ سمت راست رابطهٔ (۱۲)، با تبدیل عدد ثابت x_0 به z، تابع جدید کمکی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f(z)}{1!}(x - z) -$$

$$- \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n$$

ضمناً، متغیر مستقل z را، متغیر در بازهٔ $[x_0, x]$ به‌حساب می‌آوریم. $\varphi(z)$، در این بازه پیوسته است و در دو انتهای آن، این مقدارها را اختیار می‌کند [(۱۲) را ببینید]:

$$\varphi(x_0) = r_n(x)\ ,\quad \varphi(x) = 0$$

علاوه بر آن، در بازهٔ (x_0, x)، مشتق $\varphi'(z)$ وجود دارد:

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x - z) - f'(z)\right] -$$

$$- \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x - z)\right] -$$

$$- \left[\frac{f^{IV}(z)}{3!}(x - z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2\right] - \dots$$

$$\dots-\left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right]$$

و یا بعد از اختصار

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

حالا، تابع غیرمشخص $\psi(z)$ را، که در بازهٔ $[x_0, x]$ پیوسته باشد، انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که در بازهٔ باز (x_0, x)، دارای مشتق مخالف صفر $\psi'(z)$ باشد.

دستور کوشی [۱۱۴] را، درمورد تابع‌های $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ به‌کار می‌بریم:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

که در آن

$$x_0<c<x \quad \text{یا} \quad c=x_0+\theta(x-x_0) \quad (0<\theta<1)$$

چون داریم

$$\varphi(x)=0\,, \quad \varphi(x_0)=r_n(x)\,, \quad \varphi'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

بنابراین

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

اکنون، اگر به‌جای $\psi(x)$، تابع دلخواهی را ــ که در شرط‌های مقرر صدق می‌کند ــ قرار دهیم، شکل‌های متفاوتی از جملهٔ متمم $r_n(x)$ به‌دست می‌آید.

فرض کنیم $\psi(z)=(x-z)^p$ $(p>0)$، داریم:

$$\psi'(z)=-p(x-z)^{p-1} \qquad (x_0<z<x)$$

روشن است که این تابع، با شرط‌های مقرر، سازگار است. بنابراین

$$r_n=\frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}\cdot(x-x_0)^p$$

چون $c=x_0+\theta(x-x_0)$، پس $x-c=x-x_0-\theta(x-x_0)=(1-\theta)(x-x_0)$
و بالاخره:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{n!\,p}\cdot(1-\theta)^{n+1-p}.(x-x_0)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

این‌عبارت، به‌جملهٔ متمم به‌شکل شلیومیلخ و روش (O.Schlömilch--Roche) موسوم است.

از این‌عبارت، بادرنظر گرفتن مقدارهای مشخص p، می‌توان شکل‌های خاصی از جملهٔ متمم را به‌دست آورد. مثلاً، اگر $p=n+1$ بگیریم، جملهٔ متمم به شکل لاگرانژ، به‌دست می‌آید:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(x_0<c<x\ \text{یا}\ x_0>c>x)$$

که به‌اندازه‌کافی، ساده‌است، این‌شکل جملهٔ‌متمم، جملهٔ بعدی را، در دستور تیلور، به‌خاطر می‌آورد، ولی به‌جای این‌که، مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ام درنقطهٔ x_0 نوشته شود، این‌مشتق‌را به‌ازای یك‌مقدار بینا بینی c (بین x و x_0) می‌گیرند.

به‌این‌ترتیب، دستور تیلور، با جملهٔ متمم به‌شکل لاگرانژ، به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots\\ \dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\ (x_0\leqslant c\leqslant x)\end{aligned}\right\}\qquad(۱۳)$$

که اگر درآن، $f(x_0)$ را به‌سمت چپ تساوی منتقل‌کنیم، درآن‌صورت، می‌توان، به‌آن، همچون تعمیم دستور نموهای محدود [۱۱۲] نگاه‌کرد، که می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$$

هرچند، بیش‌ازهمه، از جملهٔ متمم به‌شکل‌لاگرانژ استفاده می‌کنند (به‌خاطرسادگی آن)، باوجوداین، دربعضی موردها، این شکل، برای برآورد جملهٔ متمم مناسب نیست و بهتر است به‌شکل‌های دیگری ــ ولواین‌که خیلی هم ساده نباشند ــ متوسل شد. ازجمله، دراین‌جا، از جملهٔ متمم به‌شکل‌کوشی یاد می‌کنیم، که ازشکل کلی شلیومیلخ ــ روش،

به‌ازای $p=1$، به‌دست می‌آید:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x^\circ+\theta(x-x_\circ))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_\circ)^{n+1}$$

۱۲۷. دستورهای تقریبی. محض سادگی، در دستور (۱۳) فرض می‌کنیم $x_\circ=\circ$ و به‌جای c نیز θx می‌گیریم که در آن $\circ<\theta<1$:

$$f(x)=f(\circ)+\frac{f'(\circ)}{1!}x+\frac{f''(\circ)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (14)$$

که اگر، در آن، جملهٔ متمم را حذف کنیم، این دستور تقریبی به‌دست می‌آید:

$$f(x)=f(\circ)+\frac{f'(\circ)}{1!}x+\frac{f''(\circ)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^n$$

که به‌کمک آن می‌توان، تابع‌های بغرنج را، به‌چندجمله‌ای‌های صحیح تبدیل کرد. ولی این‌جا، در وضعی هستیم که باید خطای تابع را برآورد کنیم، زیرا این خطا، درست (از لحاظ قدرمطلق)، برابر با همان جمله‌ای است که حذف کرده‌ایم. مثلاً، اگر مشتق $(n+1)$ام (دست‌کم، برای تغییر آوند بین $\circ$ و x)، از لحاظ قدرمطلق، محدود به M باشد، داریم:

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

برای مثال، به‌تابع‌های مقدماتی برمی‌گردیم. لزومی ندارد که برآوردهای شمارهٔ **۱۲۵** را تکرار کنیم، تنها جملهٔ متمم را به‌صورت تازه‌ای خواهیم نوشت.

۱) $f(x)=e^x$ می‌گیریم. رابطهٔ تقریبی آن، چنین است:

$$e^x\doteq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

که جملهٔ متمم آن، عبارت است از

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

بنابراین، مثلاً برای $x>\circ$، خطا به‌این‌ترتیب، برآورد می‌شود:

$$|r_n(x)|<e^x\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

و درحالت خاص $x=1$

$$e\doteq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$|r_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}$$

شبیه این رابطه را، در شمارهٔ **۳۷**، برای محاسبهٔ مقدار تقریبی عدد e، آوردیم، ولی جملهٔ متممی که درآن پیدا کرده بودیم، دقیق‌تر بود.

۲) تابع $f(x)=\sin x$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\sin x\doteq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

دراین‌حالت، جملهٔ متمم چنین است:

$$r_n^+(x)=\frac{\sin\left(\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

و خطا، به‌سادگی، برآورد می‌شود:

$$|r_{2m}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

به‌خصوص، اگر به‌یك جمله قانع شویم وفرض کنیم:

$$\sin x\doteq x$$

آن‌گاه، مثلاً برای این‌که خطا کمتر از ۰/۰۰۱ باشد، کافی‌است (بافرض $x>0$) فرض کنیم

$$\frac{x^3}{6}<0/001$$

یا

$$x<0/1817$$

که به‌تقریب برابر ۱۰ درجه است. درحالتی‌که دو جمله از رابطه را اختیار کنیم

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6}$$

برای رسیدن به‌همان دقت، کافی است داشته باشیم:

$$\frac{x^5}{120} < 0/001$$

یا

$$x < 0/6546 \ (\doteq 37/5^\circ)$$

اگر به‌زاویه‌های $x < 0/4129 \ (\doteq 23/5^\circ)$ اکتفا کنیم، آن‌وقت، خطا از $0/0001$ هم کمتر خواهد بود.

می‌بینیم که، هرچه تعداد جمله‌های تیلور را بیشتر کنیم، هم‌دقت بیشتری به‌دست می‌آوریم و هم رابطه‌را، درمحیط گسترده‌تری می‌توانیم به‌کاربریم: این واقعیت، به‌روشنی، درشکل ۵۲ـa، نشان داده شده است، که درآن‌جا، همراه با نمودار تابع $y = \sin x$، نمودار هر یك از چندجمله‌ای‌های زیرهم، داده شده است:

$$y = x, \qquad y = x - \frac{x^3}{6}, \qquad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \ \ldots$$

۳) به‌همین‌ترتیب، برای تابع $f(x) = \cos x$ داریم:

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

ضمناً

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

به‌طوری که

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

مثلاً اگر بنویسیم

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

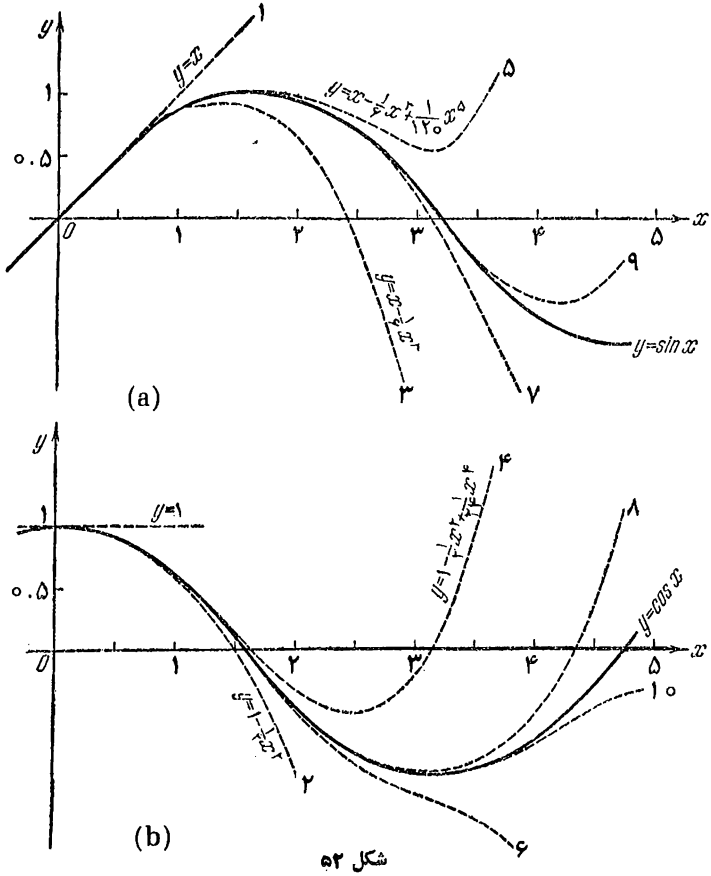
خطای آن چنین است

$$|r_۳(x)| \leqslant \frac{x^۴}{۲۴}$$

که مثلاً اگر بخواهیم، این خطا کمتر از ۰/۰۰۰۱ باشد، باید داشته باشیم $x < ۰/۲۲۱۳ (\doteq ۱۳^\circ)$. در شکل ۵۲ – b، برای مقایسه، نمودار تابع $y = \cos x$ و نمودار تابع‌های زیر، رسم شده است:

$$y = ۱, \qquad y = ۱ - \frac{x^۲}{۲}, \qquad y = ۱ - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۴}{۲۴}, \ldots$$

توجه‌خوانندرا به‌این نکته‌جلب می‌کنیم که، تاچه‌حد، توانسته‌ایم، نسبت به‌رابطه‌های شماره‌های ۶۲، ۶۳ و ۱۰۷، جلوتر برویم. حالا دیگر می‌توانیم، میزان خطا را معین



شکل ۵۲

کنیم و دستورها را، باهردقت دلخواه، به‌دست آوریم.

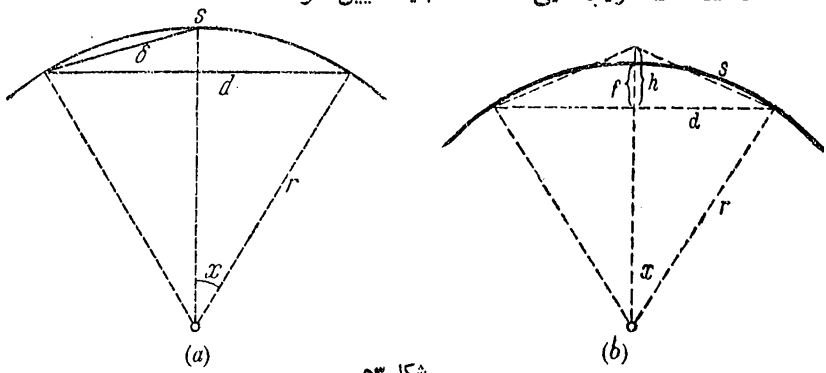
نشان می‌دهیم که رابطهٔ تیلور، سرچشمه‌ای، برای ساختن دستورهای تقریبی دیگری هم می‌باشد، که از گونه‌ای به‌کلی متفاوت‌اند.

۴) به عنوان مثال اول، به دستور هویگنس (Ch. Huygens) می‌پردازیم که در مورد تقویم تقریبی کمانی از دایره است که نسبت به‌شعاع دایره کوچك باشد.

طول کمان را s، طول وتر آن را d و طول وتر نصف این کمان را δ می‌گیریم (شکل ۵۳–a). این مساله را دربرابر خود قرار می‌دهیم، که دستور تقریبی زیر را، تاحدامکان دقیق‌تر کنیم:

$$s \doteq Ad + B\delta$$

که درآن، A و B ضریب‌هایی هستند که باید تعیین شوند.



شکل ۵۳

اگر r را شعاع دایره و $2x$ را زاویهٔ مرکزی نظیر کمان s فرض کنیم، داریم:

$$d = 2r\sin x = 2r\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta'}{120}x^5\right) \qquad (0 < \theta' < 1)$$

و به‌همین ترتیب، با تعویض x به $\frac{x}{2}$:

$$\delta = 2r\sin\frac{x}{2} = 2r\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \frac{\theta''}{3840}x^5\right) \qquad (0 < \theta'' < 1)$$

از آن‌جا

$$Ad + B\delta = 2r\left[\left(A + \frac{1}{2}B\right)x - \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B\right)x^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3840}B\right)\cdot x^5\right]$$

درعین‌حال، چون $s=۲rx$، طبیعی است A و B را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$\begin{cases} A+\frac{۱}{۲}B=۱ \\ \frac{۱}{۶}A+\frac{۱}{۴۸}B=۰ \end{cases}$$

زیرا، دراین صورت اختلاف بین قسمت‌های سمت راست وچپ دستور موردنظر، تنهادر جملهٔ شامل $x^۵$ می‌شود. برای ضریب‌های A و B، مقدارهای $A=-\frac{۱}{۳}$ و $B=\frac{۸}{۳}$ به دست می‌آید و دستور، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$s=\frac{۸\delta-d}{۳}=۲\delta+\frac{۲\delta-d}{۳}$$

وخطای Δ را، می‌توان این‌طور برآورد کرد:

$$|\Delta|<r.\frac{x^۵}{۱۸۰}$$

مثلاً، برای زاویهٔ مرکزی ۳۰ درجه، یعنی $x=\frac{\pi}{۱۲}$، طبق این برآورد داریم: $|\Delta|<r.۰/۰۰۰۰۰۷$. درواقع $s=r.۰/۵۲۳۵۹۹\ldots$، وطبق دستورهویگنس نتیجه می‌شود: $s=r.۰/۵۲۳۵۹۳\ldots$، به‌نحوی که اختلاف، ازحد مقرر، تجاوز نمی‌کند.

۵) برای همان منظور، پ.ل. چه‌بیشف، قاعدهٔ زیر را داده است: طول‌کمان، تقریباً برابراست با مجموع دوساق مثلث متساوی‌الساقینی‌که، قاعده‌آن، برابر با وتر این کمان وارتفاع‌آن، برابر با $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ سهم همین‌کمان باشد (شکل ۵۳–b).

فرض می‌کنیم $h=\gamma f$و روشن می‌کنیم که اگر $\gamma=\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ باشد،درواقع به‌مفهومی، بهترین تقریب را به‌دست‌آورده‌ایم.

هم اکنون دیدیم:

$$\frac{۱}{۲}d=r.\sin x=r\left(x-\frac{۱}{۶}x^۳+\frac{\theta_۱}{۱۲۰}x^۵\right) \qquad (۰<\theta_۱<۱)$$

به‌همین ترتیب

$$h=\gamma\cdot f=\gamma r(1-\cos x)=\gamma r\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{\theta^2}{24}x^4\right)\qquad(0<\theta_2<1$$

اگرمجموع ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین چه‌بیشف را s^* بنامیم، داریم:

$$s^*=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2+h^2}=$$

$$=2rx\sqrt{\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{\theta_1}{120}x^4\right)^2+\gamma^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\theta_2}{24}x^3\right)^2}=$$

$$=2rx\sqrt{1+\left(\frac{\gamma^2}{4}-\frac{1}{3}\right)x^2+ax^4+bx^6+cx^8}$$

حالا، برای‌این‌که جملهٔ‌شامل x^2 در زیر رادیکال حذف شود، ضریب‌آن را برابر ۰ قرار می‌دهیم و، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $\gamma=\sqrt{\frac{4}{3}}$.

برای برآورد خطا، عبارت s^* را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$s^*=2rx\sqrt{1+Ax^4}\qquad(15)$$

ضمناً، A شامل‌درجهٔ دوم و درجهٔ چهارم x است. با فرض $x<\frac{\pi}{2}$ داریم: $x^2<2/5$ و $x^4<6/5$، دراین‌صورت، برای A،برآورد $|A|<0/06$ به‌دست می‌آید، به‌نحوی‌که $|A|x^2<0/4$.

برای سادگی کار، Ax^4 را y می‌نامیم. از روی دستور نموهای محدود [۱۱۲] خواهیم داشت:

$$\sqrt{1+Ax^4}=\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2\sqrt{1+\theta y}}\qquad(0<\theta<1)$$

که‌جملهٔ‌آخر، این‌طور برآورد می‌شود:

$$\left|\frac{y}{2\sqrt{1+\theta y}}\right|<\frac{|y|}{2\sqrt{1-|y|}}=\frac{|A|x^4}{2\sqrt{1-|A|x^4}}<\frac{0/06x^4}{2\sqrt{0/6}}<\frac{1}{2}.0/1x^4$$

با مقایسهٔ عبارت (۱۵) برای s^*، با آن چه هم‌اکنون به‌دست‌آوردیم، می‌بینیم که

$$s^*=s+\rho\qquad(\rho<0/1rx^5)$$

مرتبهٔ خطا، همان است که در رابطهٔ هویگنس بود.

ما دوباره، در فصل یازدهم (جلد دوم)، که دربارهٔ رشته‌های نامتناهی بحث می‌کند، به‌دستور تیلور برخواهیم گشت و خواهیدید که، در آن‌جا، نقش مهمی به‌عهدهٔ این دستور است.

§۶. درون‌یابی (انترپولاسیون)

۱۲۸. ساده‌ترین مسالهٔ درون‌یابی. دستور لاگرانژ. فرض کنیم، برای تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[a, b]$ معین است، $(m+1)$ مقدار آن، در نقطه‌های x_0، x_1، ...، x_m بازه، محاسبه شده باشد:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \dots,\ f(x_m) \qquad (1)$$

و بخواهیم، از روی این مقدارها، مقدار تابع $f(x)$ را، در نقطهٔ تازه‌ای از x، پیدا کنیم.

و این، ساده‌ترین مسألهٔ درون‌یابی است. البته، طرح مساله به‌این‌شکل، ابهام‌های زیادی به‌وجود می‌آورد. غالباً، مساله را به‌این صورت می‌فهمند: چند جمله‌ای صحیح $L(x)$ را، با کمترین درجهٔ ممکن، به‌نحوی پیدا می‌کنند که در نقطه‌های مفروض $x_i\ (i = 0, 1, \dots, m)$ ــ که گره‌های درون‌یابی نامیده می‌شوند ــ همان مقدارهای $f(x_i)$ را، که $f(x)$ اختیاری می‌کرد، قبول کند؛ و آن‌وقت، به‌ازای هر مقدار دلخواه x از $[a,b]$، به‌تقریب، فرض می‌کنند:

$$f(x) = L(x) \qquad (2)$$

این برابری تقریبی را «رابطهٔ درون‌یابی» می‌گویند. بنابراین، ابتدا باید، رابطهٔ درون‌یابی را پیدا کنیم و، سپس، با توجه به‌فرض‌های معینی که درمورد تابع $f(x)$ داریم، خطای رابطهٔ تقریبی (۲) را برآورد کنیم.

برای این که چندجمله‌ای $L(x)$ را طوری پیدا کنیم که با شرط‌های زیر سازگار باشد:

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \dots, m) \qquad (3)$$

بهتر است، چند جمله‌ای‌های درجهٔ m

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)}$$

را در نظر بگیریم، که به‌ازای $x = x_k$ برابر ۱، و به‌ازای $x = x_i$، با شرط $i \neq k$، برابر ۰ می‌شوند. حالا روشن است که چند جمله‌ای

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \cdot l_k(x) \qquad (4)$$

با همهٔ شرطهای (۳) سازگار است. درجهٔ این‌چند جمله‌ای، بالاتر از m نیست و با شرطهای (۳)، بستگی یك ارزشی دارد، این چند جمله‌ای را، چند جمله‌ای درون‌یابی لاگرانژ، و برابری تقریبی (۲) را، دستور درون‌یابی لاگرانژ نامند.

توجه کنیم که چند جمله‌ای $l_k(x)$ را، می‌توان فشرده‌تر نوشت. اگر چند جمله‌ای

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)$$

را حل کنیم، درست در گره‌های x_0، x_1، ... ، x_m، درون‌یابی، برابر صفر می‌شود. دیده می‌شود که

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_m)=\frac{\omega(x)}{x-x_k}\qquad(x\neq x_k)$$

و

$$(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x_k-x_m)=$$
$$=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)}{x-x_k}=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)-\omega(x_k)}{x-x_k}=\omega'(x_k)$$

به‌این ترتیب

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k).(x-x_k)}$$

و

$$L(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k).(x-x_k)}.f(x_k)$$

۱۲۹. جملهٔ متمم دستور لاگرانژ. حالا بپردازیم به برآورد تفاضل $f(x)-L(x)$، که در آن، x مقدار دلخواهی از بازهٔ $[a,b]$ ومتمایز از گره‌های درون‌یابی است. فرض کنیم، $f(x)$ در این بازه، دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها تا مرتبهٔ $(m+1)$ام باشد.

مقدار ثابت K هرچه باشد، تابع

$$\varphi(z)=f(z)-L(z)-K.\omega(z)$$

نیز دارای $(m+1)$ مشتق است و، ضمناً، در گره‌های x_i $(i=0,1,\ldots,m)$ برابر صفر می‌شود. مقدار ثابت K را طوری انتخاب می‌کنیم که به‌ازای $z=x$، داشته باشیم $\varphi(x)=0$. یعنی فرض می‌کنیم:

$$K=\frac{f(x)-L(x)}{\omega(x)}\qquad(۵)$$

(چون $x \neq x_i$، بنابراین $\omega(x) \neq 0$). بنابر قضیهٔ رول [۱۱۱]، در $m+1$ فاصله‌ای که بین $m+2$ ریشهٔ x، x_0، x_1، ... ، x_m از تابع $\varphi(z)$ وجود دارد، $m+1$ ریشه برای مشتق $\varphi'(z)$ پیدا خواهد شد. اگر دوباره از قضیهٔ رول را برای تابع $\varphi'(z)$ و m فاصله‌ای که بین $m+1$ ریشهٔ آن وجود دارد، به‌کار بریم، به‌وجود m ریشهٔ مشتق دوم $\varphi''(z)$ پی می‌بریم و غیره. با ادامهٔ این بحث، در گام $(m+1)$ام، به وجود ریشهٔ ξ مشتق $(m+1)$ام، $\varphi^{(m+1)}(z)$، می‌رسیم، به‌نحوی که

$$\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0 \qquad (a<\xi<b) \qquad (۶)$$

ولی $L^{(m+1)}(z) \equiv 0$، زیرا درجهٔ چند جمله‌ای $L(z)$ از m بزرگتر نیست و $\omega^{(m+1)}(z) = (m+1)!$. با در نظر گرفتن تعریف تابع کمکی $\varphi(z)$ داریم:

$$\varphi^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - K.(m+1)!$$

به‌طوری که، با در نظر گرفتن (۶)، به‌دست می‌آید:

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

و بالاخره، از (۵) به‌دست می‌آید:

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega(x) \qquad (a<\xi<b) \qquad (۷)$$

که دستور درون‌یابی لاگرانژ با جملهٔ متمم است، که برخلاف (۲)، رابطه‌ای دقیق است.

یادداشت. اگر در بازهٔ $[a,b]$ داشته باشیم:

$$\max|f^{(m+1)}(z)| = M_{m+1} < +\infty$$

از آن‌جا که در این بازه داریم: $|\omega(z)| \leqslant (b-a)^{m+1}$، برای برآورد خطای دستور (۲) به‌دست می‌آید:

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

سمت راست، وقتی که $m \to \infty$، تنها برای گروه کوچکی از تابع‌های $f(x)$، به‌سمت صفر میل می‌کند، مثلاً، این وضع، برای تابع‌هایی پیش می‌آید که در $[a,b]$، تا هر مرتبهٔ دلخواه دیفرانسیل پذیر و، ضمناً، مشتق‌های آن‌ها، با یك مقدار ثابت M، کران‌دار باشند. در این حالت، با افزایش تعداد گره‌های درون‌یابی، و بدون ارتباط با قانونی که این

گره‌ها انتخاب شده‌اند، خطای رابطهٔ (۲)، به‌صورتی یک‌نواخت، به‌سمت صفرمیل می‌کند. مارسین‌کیه‌ویچ (J. Marcinkiewich) ثابت کرد که، برای هر تابع پیوسته‌ای که انتخاب شده باشد، از راه انتخاب مناسب دستگاه‌های متوالی گره‌ها، می‌توان به‌همین نتیجه رسید. ولی، بنا بر قضیهٔ فابر (G. Faber)، چنان قانون انتخابی برای گره‌ها وجود ندارد که، به این مفهوم، برای همهٔ تابع‌های پیوسته ــ به‌طور هم‌زمان ــ به‌درد بخور باشد. ولی، ما نمی‌توانیم، در این‌جا، به‌این موضوع‌ها و موضوع‌های شبیه آن بپردازیم.

۱۳۰. درون‌یابی با گره‌های مکرر. دستور هرمیت. می‌توان مسألهٔ کلی تردرون‌یابی را مطرح کرد، به‌این معنا که، در گره‌های x_0، x_1، ... ، x_m، علاوه برمقدارهای خود تابع، مقدارهای مشتق‌های متوالی آن را هم، مفروض بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n_0)}(x_0) \\ f(x_1),\ f'(x_1),\ \ldots,\ f^{(n_1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_m),\ f'(x_m),\ \ldots,\ f^{(n_m)}(x_m) \end{array}\right\} \qquad (۸)$$

که در آن، n_0، n_1، ... ، n_m، عددهایی درست و غیرمنفی هستند. تعداد کل این شرط‌ها برابر است با

$$(n_0+1)+(n_1+1)+\ldots+(n_m+1)=N$$

منظور از محاسبهٔ مقدارهای تابع $f(x)$ را، به‌ازای مقدارهای دلخواه x از بازهٔ $[a,b]$ و متمایز از گره‌ها با استفاده از همهٔ داده‌های (۸) ــ نظیر ساده‌ترین حالت درون‌یابی، به‌این ترتیب می‌فهمیم: چندجمله‌ای صحیح $H(x)$ را، با کمترین درجهٔ ممکن، طوری جست‌وجو می‌کنیم که در هر گره x_i، هم خود آن و هم مشتق‌های آن تا مرتبهٔ n_i، همان مقدارهایی را را قبول کنند، که تابع $f(x)$ و مشتق‌های نظیر آن اختیار می‌کنند. آن وقت به‌طور تقریبی فرض می‌شود:

$$f(x)=H(x) \qquad (۹)$$

گره‌های x_i را، گره‌های درون‌یابی با تکرار n_i+1 می‌نامند.

می‌توان ثابت کرد که چند جمله‌ای $H(x)$ منحصر به‌فرد است، یعنی چند جمله‌ای دیگری، که درجه‌ای بالاتر از $N-1$ نداشته باشد و با همهٔ شرط‌های موردنظر سازگار باشد، وجود ندارد. این چند جمله‌ای را، چند جمله‌ای درون‌یابی هرمیت، و دستور (۹) را دستور درون‌یابی هرمیت می‌نامند.

اگر همهٔ n_iها، برابر صفر باشند، به‌دستور لاگرانژ (۲) می‌رسیم. با حالت‌های خاص دیگر دستور هرمیت هم برخورد داشته‌ایم: اگر یک گره x_0 را درنظر بگیریم، ولی با تکرار $(n+1)$؛ یعنی فرض کنیم که چند جمله‌ای ما، که درجه‌ای بالاتر از n ندارد، $T(x)$، و n مشتق متوالی آن، درنقطهٔ x_0، به‌ترتیب برمقدارهای تابع $f(x)$ ومشتق‌های متوالی آن منطبق شوند، روشن است که به چند جمله‌ای تیلور [۱۲۴، (۶)] می‌رسیم:

$$T(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

به‌این ترتیب، دستور تقریبی

$$f(x)=T(x)$$

(با شمارهٔ **۱۲۷** مقایسه کنید)، نیز، حالت خاصی از رابطهٔ درون‌یابی هرمیت است.

جملهٔ متمم دستور (۹) را ـ برای دقیق‌کردن آن ـ می‌توان شبیه حالت قبل، به‌دست آورد. چند جمله‌ای درجهٔ N را درنظر می‌گیریم:

$$\Omega(z)=(z-x_0)^{n_0+1}\cdot(z-x_1)^{n_1+1}\dots(z-x_m)^{n_m+1}$$

و به‌ازای $a\leqslant z\leqslant b$ فرض می‌کنیم:

$$\Phi(z)=f(z)-H(z)-K\cdot\Omega(z)\qquad(K=\text{const.})$$

اگر فرض کنیم که تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، دارای N مشتق متوالی است، آن‌گاه $\Phi(z)$ هم دارای N مشتق متوالی خواهد بود. با در نظر گرفتن مقدار مشخص $z=x$، متمایز از گره‌ها، مقدار ثابت K را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$K=\frac{f(x)-H(x)}{\Omega(x)}\qquad(\Omega(x)\neq 0)\qquad(10)$$

با چنین انتخابی، تابع $\Phi(z)$ هم، به‌ازای $z=x$، برابرصفرمی‌شود. اگرهر ریشه را، به تعداد تکرارخود، حساب کنیم، این تابع دارای $N+1$ ریشه است*. شبیه حالت قبل، با استفادهٔ متوالی ازقضیهٔ رول (تنها با این دشواری، که هر ریشهٔ تکراری تابع $\Phi(z)$، در جریان چندگام، ریشهٔ مشتق‌های متوالی آن هم، خواهد بود)، سرانجام به‌این نتیجه می‌ـ

---

*) مفهوم ریشهٔ‌تکراری را، که خواننده درمورد چند جمله‌ای‌های صحیح با آن آشناست، برای هرتابع $\Phi(z)$، تعمیم می‌دهیم: عدد α را، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ pام می‌نامیم، به‌شرطی که α، هم $\Phi(z)$ و $(p-1)$ مشتق متوالی آن را، به‌سمت صفرمیل دهد.

می‌رسیم که درنقطه‌ای مثل ξ، مشتق $\Phi^{(N)}(z)$، برابر صفر می‌شود. از این جا

$$K=\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}$$

و با توجه به (۱۰)

$$f(x)=H(x)+\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega(x) \qquad (۱۱)$$

که عبارت است از رابطهٔ درون‌یابی هرمیت با جملهٔ متمم.

دستور لاگرانژ با جملهٔ متمم خود [(۷)]، حالت خاصی ازاین دستوراست. بازهم، مثل قبل، اگر گره منحصربه‌فرد x_0 را با تکرار $n+1$، درنظر بگیریم، حالت خاصی از (۱۱) را، که همان دستورتیلور با جملهٔ متمم به شکل لاگرانژ است [**۱۲۶**، (۱۳)]، به‌دست می‌آوریم.

MATH75.IR

فصل چهارم

بررسی تابع‌ها، به‌کمك مشتق

§۱. مطالعهٔ روند تغییر تابع

۱۳۱. شرط ثابت بودن تابع. برای مطالعهٔ روند تغییر تابع، در مرحلهٔ اول، این پرسش پیش می‌آید که، تحت‌چه شرط‌هایی، یك تابع در بازهٔ مفروض، مقداری ثابت می‌ماند و یا تغییری به‌صورت یکنوا [۵۷] دارد.

قضیهٔ ۱. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{X}$ (بسته یا باز، متناهی یا نامتناهی)، معین و پیوسته، و در درون آن دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد، برای آن‌که $f(x)$ در $\mathfrak{X}$، برابر مقدار ثابتی باشد، لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$f'(x)=0 \quad (\text{در درون } \mathfrak{X})$$

لازم بودن شرط. روشن است که از $f(x)=\text{const}$، نتیجه می‌شود: $f'(x)=0$.

کافی بودن شرط. نقطهٔ x_0 از بازهٔ $\mathfrak{X}$ را مشخص می‌کنیم، و نقطهٔ دیگری مانند x را در نظر می‌گیریم. در بازهٔ $[x_0, x]$ یا $[x, x_0]$، شرط‌های قضیهٔ لاگرانژ برقرار است [۱۱۲] و می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$$

که در آن، c مقداری واقع بین x و x_0 است و، طبعاً، در درون بازهٔ $\mathfrak{X}$ قرار دارد. ولی بنا به فرض داریم: $f'(c)=0$، از آن‌جا، به‌ازای هرمقدار x از $\mathfrak{X}$:

$$f(x)=f(x_0)=\text{const}.$$

گزارهٔ سادهٔ فوق، کاربردهای مهمی در حساب انتگرال دارد.

نتیجه. اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{X}$، معین و پیوسته باشند. و مشتق‌های $f'(x)$ و $g'(x)$، در درون این بازه، وجود داشته باشد و ضمناً

$$f'(x)=g'(x) \quad (\text{در درون } \mathfrak{D})$$

آن‌گاه، در تمامی بازهٔ $\mathfrak{D}$، اختلاف این دو تابع، برابر است با مقداری ثابت:

$$f(x)=g(x)+C \qquad (C=\text{const.})$$

برای اثبات، کافی است، قضیهٔ ۱ را در مورد تفاضل $f(x)-g(x)$ به کار بریم. چون مشتق این تفاضل، یعنی $f'(x)-g'(x)$، در درون بازهٔ $\mathfrak{D}$، برابر صفر است، خود این تفاضل، برابر مقداری ثابت می‌شود.

کاربردهای این قضیه را، ضمن چند مثال، روشن می‌کنیم.

۱) تابع‌های $\operatorname{arc\,tg} x$ و $\operatorname{arc\,sin}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ را در نظر می‌گیریم. چون مشتق تابع اول

$$\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

برمشتق تابع دوم، منطبق است، بنابراین، اختلاف دو تابع، در تمامی بازهٔ $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار ثابتی است.

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

برای تعیین این مقدار ثابت، مثلاً می‌توان $x=0$ قرارداد، و چون به‌ازای این مقدار، هم آرك سینوس و هم آرك تانژانت، برابر صفر می‌شوند، C نیز برابر صفر است و این اتحاد را داریم:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

که آن را در ۵۰ هم دیده بودیم.

۲) شبیه مورد قبل، خودتان ثابت کنید:

$$\operatorname{arc\,sin} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)$$

۳) حالا تابع‌های $\arctg x$ و $\frac{1}{2}\arctg\frac{2x}{1-x^2}$ را در نظر می‌گیریم.

به‌سادگی، می‌توان تحقیق کرد که مشتق‌های این دو تابع، در همهٔ نقطه‌های x، به‌جز $x=\pm 1$، بر هم منطبق‌اند، (در نقطه‌های $x=\pm 1$، تابع دوم، مفهوم خود را از دست می‌دهد). بنابراین، اتحاد

$$\frac{1}{2}\arctg\frac{2x}{1-x^2}=\arctg x+C$$

تنها در بازه‌های زیر، به‌طور جداگانه، برقرار است:

$$(-\infty,-1),\ (-1,+1),\ (+1,+\infty)$$

جالب است که مقدار ثابت C، برای بازه‌های مختلف، فرق می‌کند: در بازهٔ دوم داریم $C=0$ (که به‌ازای $x=0$ به‌دست می‌آید) و در دو بازهٔ دیگر، به ترتیب $C=\frac{\pi}{2}$ و $C=-\frac{\pi}{2}$ می‌شود (x را، به‌ترتیب، به‌سمت $-\infty$ و $+\infty$ میل می‌دهیم). همهٔ این‌ها را، با روش‌های مقدماتی‌هم می‌توان ثابت کرد.

یادداشت. ارزش قضیهٔ ۱ در بررسی‌های نظری و، به طور کلی، در حالت‌هایی نشان داده می‌شود که از تعریف تابع، بتوان مستقیماً فهمید که، همیشه مقدار ثابتی را اختیار می‌کند. از این به بعد، بارها، با چنین موردهایی برخورد خواهیم داشت.

۱۳۲. شرط یکنوایی تابع. ببینیم، از روی مشتق تابع، چگونه می‌توان دربارهٔ صعودی (یا نزولی) بودن خود تابع، داوری کرد. ابتدا، حالتی را در نظر می‌گیریم که تابع به‌مفهوم وسیع خود، به‌طور یکنوا صعودی ـ یعنی، در واقع، غیرنزولی ـ باشد (یا، به‌همین مفهوم وسیع، به‌طور یکنوا نزولی ـ یعنی، درواقع، غیرصعودی ـ باشد) [۵۷].

قضیهٔ ۲. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{P}$، معین و پیوسته و، در درون بازه دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد، برای آن‌که $f(x)$ در $\mathfrak{P}$ صعودی (یا نزولی) یکنوا، به‌معنای وسیع خود، باشد، لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$f'(x)\geqslant 0 \qquad (\text{یا } f'(y)\leqslant 0) \qquad (x \text{ در بازهٔ } \mathfrak{P})$$

شرط لازم است.* اگر $f(x)$ به‌طور یکنوا صعود کند (ولو به‌معنای وسیع خود)،

---

*) هرچند می‌توان اثبات قضیه را، به‌طور هم‌زمان، برای تابع صعودی و نزولی تنظیم کرد، ما برای اثبات، به‌حالت صعودی اکتفا می‌کنیم.

با اختیار x در درون $\mathfrak{D}$، و انتخاب نمو $\Delta x > 0$ برای آن، داریم:

$$f(x+\Delta x) \geqslant f(x),\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$$

که در حد، وقتی $\Delta x \to 0$، نتیجه می‌شود: $f'(x) \geqslant 0$.

شرط کافی است. برعکس، فرض می‌کنیم که در درون $\mathfrak{D}$ داشته باشیم: $f'(x) \geqslant 0$. دو مقدار x' و x'' ($x' < x''$) از بازهٔ $\mathfrak{D}$ را انتخاب می‌کنیم و دستور لاگرانژ را در بازهٔ $[x', x'']$، برای تابع $f(x)$ می‌نویسیم:

$$f(x'')-f(x') = f'(c).(x''-x') \qquad (x' < c < x'')$$

و چون $f'(c) \geqslant 0$، بنابراین

$$f(x'') \geqslant f(x')$$

و تابع $f(x)$، دست‌کم به‌معنای وسیع خود، صعودی است.

تا این‌جا، ثابت بودن مقدار تابع $f(x)$ را، در بازه‌ای، کنار نگذاشتیم (حالتی که مشتق آن، متحد با صفر می‌شود). اگر این امکان را کنار بگذاریم، به‌حالت صعودی (یا نزولی) به‌معنای اکید آن، می‌رسیم.

قضیهٔ ۳. با حفظ همان وضع نسبت به پیوستگی تابع $f(x)$ و وجود مشتق آن $f'(x)$ برای آن که تابع $f(x)$، به معنای اکید خود، صعودی (یا نزولی) باشد، لازم و کافی است که

۱) $f'(x) \geqslant 0$ (یا $f'(x) \leqslant 0$)، برای xهای درون $\mathfrak{D}$،

۲) $f'(x)$ در هیچ بازهٔ متعلق به $\mathfrak{D}$، متحد با صفر نباشد.

شرط لازم است. اگر $f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، صعودی باشد، بنابر قضیهٔ ۲ داریم: $f'(x) \geqslant 0$ و شرط ۱) برآورده شده است. شرط ۲) نیز برآورده می‌شود، زیرا اگر مشتق در بازه‌ای، متحد با صفر باشد، بنا به قضیهٔ ۱، تابع $f(x)$ در این بازه، برابر با مقدار ثابتی می‌شود که خلاف فرض است.

شرط کافی است. اگر شرط‌های ۱) و ۲) از قضیه، برقرار باشند، بنا به قضیهٔ ۲) تابع $f(x)$، در هر حال غیرنزولی است و اگر، در $\mathfrak{D}$، دو مقدار x' و x'' ($x' < x''$) انتخاب شود، نه تنها خواهیم داشت:

$$f(x') \leqslant f(x'') \qquad (۱)$$

بلکه ضمناً

$$f(x')\leqslant f(x)\leqslant f(x'') \quad (\text{برای } x \text{ در } [x', x'']) \qquad (۲)$$

ثابت می‌کنیم که علامت تساوی در (۱)، عملاً ممکن نیست، اگر داشته باشیم: $f(x')=f(x'')$، در آن صورت، با توجه به (۲) نتیجه می‌شود:

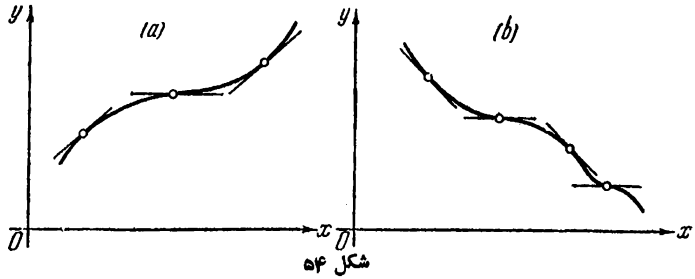
$$f(x')=f(x)=f(x'') \quad (\text{برای } x \text{ از } [x', x''])$$

یعنی، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[x', x'']$، برابر است با مقداری ثابت و، برخلاف شرط ۲)، $f'(x)$ در این بازه برابر صفر می‌شود. بنابراین

$$f(x')<f(x'') \quad (\text{به‌ازای } x'<x'')$$

یعنی تابع $f(x)$، به‌معنای اکید خود، صعودی است.

این بستگی بین علامت مشتق و جهت تغییر تابع، ازنظر هندسی، روشن است. به یاد بیاوریم که [۹۱، ۹۲] مشتق عبارت است از ضریب زاویهٔ مماس برنمودار تابع. علامت این ضریب زاویه، معرف شیب مماس به‌طرف بالا یا به‌طرف پایین است و خود منحنی‌هم، همراه با آن، به‌طرف‌بالا یا به‌طرف پایین می‌رود (شکل ۵۴).



شکل ۵۴

تنها ممکن است در بعضی از نقطه‌ها، مماس به‌صورت افقی درآید، یعنی مشتق ــ حتی در حالت صعودی یا نزولی بودن تابع، به‌معنای اکید خود ــ می‌تواند، به ازای بعضی از مقدارهای x، برابر با صفر شود.

چند مثال. ۱) مثال سادهٔ حالت اخیر، عبارت است از تابع $y=x^3$. این تابع ــ با وجود این که مشتق آن $y'=3x^2$، در نقطهٔ $x=0$، برابر صفر می‌شود ــ صعودی است.

۲) به همین ترتیب، تابع $f(x)=x-\sin x$ هم صعودی است. زیرا مشتق آن $f'(x)=1-\cos x$، غیرمنفی است و به‌ازای مقدارهای $x=2k\pi$ $(x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$، برابر صفر می‌شود.

۳) سرانجام، نشان می‌دهیم که برای یک تابع صعودی، مشتق می‌تواند، حتی در یک بازهٔ متناهی، به‌تعداد نامتناهی، برابر صفر شود. این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}} & (x>0 \text{ برای}) \\ f(0)=0 \end{cases}$$

روشن است که

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0$$

بنابراین، تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. برای $x>0$ داریم:

$$f'(x)=e^{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\geqslant 0$$

ضمناً، این مشتق به‌ازای $x=\frac{1}{2k\pi}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ برابر صفر می‌شود.

ملاحظه می‌کنیم که وقتی $x\to+0$

$$0\leqslant f'(x)<2e\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}\to 0$$

که از آن‌جا [۱۱۳] $f'(x)=0$.

می‌توان مثال‌هائی از تابع‌های صعودی (یا نزولی) پیدا کرد که در آن‌ها، نقطه‌های صفرمشتق، به‌نحو پیچیده‌تری، توزیع شده باشد. ولی، با این حالت‌ها، به ندرت برخورد می‌شود و، برای هدف‌های عملی، معمولاً، شرط کافی بودن را، به این ترتیب، می‌پذیرند: اگر درهمه‌جا، به‌جز در تعداد محدودی نقطه‌ها، داشته باشیم $f'(x)>0$ (یا $f'(x)<0$) در آن صورت، تابع $f(x)$، صعودی (یا نزولی) خواهد بود.

قبول شرط به‌این‌صورت، درکاربردها، بسیارمناسب‌تر است.

مثلاً، تابع $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ را درنظرمی‌گیریم. ثابت می‌کنیم که این تابع، برای $x>0$، صعودی است. کافی است ثابت‌کنیم که، لگاریتم این تابع صعودی است:

$$g(x)=\ln f(x)=x[\ln(x+1)-\ln x]$$

داریم:

$$g'(x)=[\ln(x+1)-\ln x]-\frac{1}{x+1}$$

چون، بنابر دستور نموهای محدود [۱۱۲]، داریم:

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{\xi} \qquad (x<\xi<x+1)$$

بنابراین $g'(x)>0$ و، در نتیجه، $g(x)$ تابعی صعودی است.

۱۳۳. اثبات نابرابری‌ها. ازمعیاریکنوائی، می‌توان به‌سادگی، برای اثبات نابرابری‌ها استفاده کرد.

۱) ثابت می‌کنیم، به‌ازای $0<x<\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x$$

فرض می‌کنیم $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$. مشتق این تابع

$$f'(x)=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2} \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

منفی‌است، زیرا $x<\operatorname{tg}x$. تابع $f(x)$ نزولی است و، برای $0<x<\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$$

۲) تابع $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$، به‌ازای $x=0$، برابر صفر می‌شود. برای مشتق آن، وقتی داشته باشیم $x>0$،

$$f'(x)=-\sin x+x>0 \quad (\text{زیرا } \sin x<x)$$

یعنی، تابع $f(x)$، برای $x\geqslant 0$، تابعی صعودی است و، به‌ازای $x>0$، داریم $f(x)>f(0)=0$، یعنی

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

باهمین روش، می‌توان ثابت کرد که، برای $x>0$

$$\sin x>x-\frac{1}{3}x^3$$

۳) ثابت کنید، به ازای $0<x<\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$tgx>x+\frac{1}{3}x^3$$

برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که، برای $0<x<\frac{\pi}{2}$، مشتق تابع $tgx-x-\frac{1}{3}x^3$ مثبت است. این مشتق برابر است با $\sec^2x-1-x^2$ یا tg^2x-x^2؛ که با توجه به نابرابری $tgx>x$ [۵۴، (۹)]، به‌روشنی، معلوم می‌شود که $tg^2x-x^2>0$.

۴) مشتق تابع $f(x)=\ln x-x$ $(x>0)$، چنین است:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1\begin{cases}>0 & (0<x<1)\\ <0 & (x>1)\end{cases}$$

بنابراین، تابع در بازهٔ $[0, 1]$ صعودی و در بازهٔ $[1, +\infty)$ نزولی است. از این‌جا، روشن است که $f(1)=-1$، بزرگترین مقدار تابع است. در نتیجه، برای $x>0$ داریم:

$$\ln x\leqslant x-1$$

۵) تابع $f(x)=x^\alpha-\alpha x$ را، برای $x>0$ و با فرض $0<\alpha<1$، در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases}>0 & (0<x<1)\\ <0 & (x>1)\end{cases}$$

که شبیه (۴)، نتیجه می‌شود که برای $x>0$

$$x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha \qquad (3)$$

این نابرابری ساده سرچشمه‌ای برای یک رشته از نابرابری‌های کلاسیک است. در این‌جا، به‌طرح بعضی از آن‌ها می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم $x=\frac{a}{b}$، که در آن، a و b عددهای مثبت دلخواهی هستند. اگر $\alpha-1$ را با β نشان دهیم، نابرابری (۳) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$a^\alpha.b^\beta\leqslant \alpha a+\beta b \qquad (3a)$$

$$(a, b, \alpha, \beta>0, \alpha+\beta=1)$$

گاهی، عددهای $k=\frac{1}{\alpha}>1$ و $k'=\frac{1}{\beta}>1$ را در نظر می‌گیرند که البته $k'=\frac{k}{k-1}$

اگر در نابرابری اخیر، a و b را به a^k و $b^{k'}$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a\cdot b\leqslant\frac{1}{k}a^k+\frac{1}{k'}b^{k'} \qquad (3b)$$

$$\left(a,\ b>0;\ k,\ k'>1;\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right)$$

۶) قبل از هرچیز، نابرابری (3a) را، می‌توان، برای تعداد دلخواه عامل‌ها، تعمیم داد. برای رسیدن از دوعامل به‌سه عامل، به‌این ترتیب، عمل می‌کنیم (با دوبار به‌کاربردن نابرابری (3a)):

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma=a^\alpha\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\leqslant\alpha a+(\beta+\gamma).\,b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\leqslant$$

$$\leqslant\alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

وبالاخره

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\leqslant\alpha a+\beta b+\gamma c$$

$$(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0,\alpha+\beta+\gamma=1)$$

به‌همین ترتیب، و با استفاده از روش استقرای ریاضی، می‌توان از حالت n عامل به‌حالت $(n+1)$ عامل عبور کرد و نابرابری را، به‌صورت کلی زیر، به‌دست‌آورد:

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}\leqslant a_1q_1+a_2q_2+\cdots a_nq_n$$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n;\ q_1,\ \ldots,\ q_n>0\ \text{و}\ q_1+q_2+\cdots+q_n=1)$$

به جای q_i می‌توان عددهای دلخواه $q_i>0$ را، با فرض $q_i=\frac{p_i}{\sum_j p_j}$، قرار داد، به‌نحوی که مجموع $\sum_i q_i=1$. نابرابری، به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum p_j}}\leqslant\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \qquad (4)$$

$$(a_1, \dots, a_n;\ p_1, \dots, p_n > 0)$$

که به‌ازای $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$، به‌این نابرابری معروف می‌رسیم:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (4a)$$

این نابرابری نشان می‌دهدکه: واسطهٔ هندسی یك رشته عددهای مثبت، از واسطهٔ حسابی آن‌ها، تجاوزنمی‌کند. به‌این ترتیب، نابرابری (۴)، تعمیمی‌ازاین نابرابری کلاسیك‌است.

۷) نابرابری معرف کوشی–هولدر (Cauchy–Hölder) را ثابت می کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} \qquad (5)$$

$$\left(a_i,\ b_i > 0;\ k, k' > 1;\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right)$$

کوشی، این نابرابری را، برای حالت خاص $k = k' = 2$، ثابت‌کرد:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \qquad (5a)$$

ابتدا، فرض می کنیم

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = 1 \qquad (6)$$

به‌نحوی‌که نابرابری ما، به‌این صورت درآید:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$$

اگر در نابرابری (۳b)، به نوبت $a = a_i$، $b = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ فرض‌کنیم و همهٔ نابرابری‌هایی راکه به دست می‌آید، باهم جمع کنیم، باتوجه به‌شرط (۶)، به‌نتیجهٔ مورد نظرمی‌رسیم.

حالت کلی را، می‌توان از روی همین حالت خاص، به دست آورد، به‌شرطی‌که a_i و b_i را با این عددها، عوض کنیم:

$$a_i' = \frac{a_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right\}^{\frac{1}{k}}}, \qquad b_i' = \frac{b_i}{\left\{\sum_{j=1}^{n} b_j^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}}$$

که به‌ازای آن‌ها هم، شرطی از نوع (۶) برقرار است. بنابرآن‌چه ثابت شد:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i' \leqslant 1$$

و این، همان نابرابری (۵) است.

۸) از نابرابری کوشی ـ هولدر، می‌توان مستقیماً، نابرابری مهم دیگری را، که به‌نابرابری مینکووسکی (H.Minkowski) موسوم است، ثابت کرد:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (۷)$$

$$(a_i, b_i > 0, k > 1)$$

روشن است که

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k = \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{k-1}$$

که اگر در مورد هر کدام از دو مجموع سمت راست، نابرابری (۵) را به‌کار بریم (با یادآوری این که $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$)، داریم:

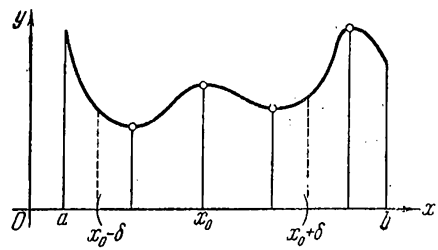
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} +$$

$$+ \left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(k-1)k'}\right\}^{\frac{1}{k'}} =$$

$$= \left\{\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\right\} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

و بالاخره، با ساده‌کردن عامل آخری؛ به‌نابرابری (۷) می‌رسیم.

۱۳۴. ماکزیمم و می‌نیمم. شرط‌های لازم. اگر تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته‌است، دراین بازه یکنوا نباشد، در این صورت، چنان بخش $[\alpha;\beta]$ از بازهٔ $[a, b]$ پیدا می‌شود، که در آن، بیشترین یا کمترین مقدار تابع در نقطه‌های درونی، یعنی بین α و β، حاصل می‌شود. روی نمودار تابع (شکل ۵۵)، این بازه‌ها، شبیه برآمدگی یا فرورفتگی آن است.



شکل ۵۵

می‌گویند تابع $f(x)$، در نقطهٔ x_0، دارای ماکزیمم (یا می‌نیمم)* است، به‌شرطی که بتوان این نقطه را با چنان همسایگی $(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ در واقع در درون فاصلهٔ معین بودن تابع محصورکرد، که به‌ازای همهٔ نقطه‌های x آن، نابرابری زیر برقرار باشد.

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (\text{یا } f(x)\geqslant f x_0))$$

به‌زبان دیگر، نقطهٔ x_0، تابع $f(x)$ را به‌ماکزیمم (یا می‌نیمم) می‌رساند، اگر مقدار $f(x_0)$، بیشترین (یا کمترین) مقدار را، از بین مقدارهایی که درهمسایگی (ولو کوچك) این نقطه اختیار می‌کند، داشته باشد. خاطرنشان می‌کنیم که خود تعریف ماکزیمم (یا می‌نیمم) همراه با این فرض است که، تابع در دوطرف نقطهٔ x_0، معین باشد.

اگر چنان همسایگی برای نقطهٔ x_0 وجود داشته باشد، که درمحدودهٔ آن (به‌ازای $x\neq x_0$). نابرابری اکید

$$f(x)<f(x_0)\quad (\text{یا } f(x)>f(x_0))$$

برقرار باشد، گویند. تابع دراین نقطه دارای ماکزیمم (یا می‌نیمم) خاص، و درحالت عکس غیرخاص است.

اگر تابع، درنقطه‌های x_0 و x_1، ماکزیمم باشد، در آن صورت، با استفاده از قضیهٔ دوم ویرشتراس [۸۵] در بازهٔ $[x_1\ ,\ x_0]$، معلوم می‌شود که تابع به‌کمترین مقدار خود در نقطه‌ای مثل x_2، بین x_0 و x_1، می‌رسد، یعنی در آن‌جا، دارای می‌نیمم است؛ به‌همین ترتیب، بین دو می‌نیمم، همیشه یك ماکزیمم وجود دارد. درچنان حالت ساده‌ای که تابع، به‌طور کلی، دارای تعداد متناهی ماکزیمم و می‌نیمم باشد، این نقطه‌ها، یك درمیان قرار می‌گیرند (واین حالت، با همهٔ سادگی خود، درعمل بی‌اندازه مهم است).

یادآوری می‌کنیم که، هرجا بخواهیم از ماکزیمم و می‌نیمم با هم، نام ببریم، از واژهٔ اکسترمم* استفاده می‌کنیم. درمسالهٔ جست وجوی همهٔ مقدارهای آوند، که تابع را به اکسترمم می‌رسانند، نقش عمده به‌عهدهٔ مشتق است.

ابتدا فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$، دارای مشتق متناهی باشد. اگر تابع درنقطهٔ x_0 دارای اکسترمم باشد، در آن صورت، با به‌کار بستن قضیهٔ فرما [۱۰۹] در بازهٔ $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ ـ که قبلاً دربارهٔ آن صحبت شد ـ نتیجه می‌شود: $f'(x_0)=0$ واین، شرط لازم برای وجود اکسترمم است. اکسترمم‌ها، تنها در نقطه‌هایی باید جست‌وجو

---

*) واژه‌های لاتینی «maximum» و «minimum»، به‌معنای بیشترین و کمترین (مقدار) است.

**) واژهٔ لاتینی «extremum» به‌معنای (مقدار) نهائی و حدی است.

کرد که، در آن‌ها، مشتق برابر صفر می‌شود؛ چنین نقطه‌هایی را **نقطه‌های سکون*** می‌نامیم.

ولی، نباید گمان کرد که هر نقطهٔ سکونی، متناظر با نقطهٔ اکسترمم برای تابع است. این شرط، لازم است ولی کافی نیست. مثلاً: در ۱۳۲، ۱) دیدیم که برای تابع x^3، مشتق $3x^2$، در نقطه $x=0$، برابر صفر می‌شود، ولی تابع در این نقطه دارای اکسترمم نیست، تابع همواره صعود می‌کند.

اگر تابع $f(x)$ را، با مفهوم گسترده‌تری، در نظر بگیریم و فرض کنیم که، برای آن، در نقطه‌های جداگانه، مشتق متناهی دوطرفه وجود نداشته باشد، آن‌وقت، این امکان از بین نمی‌رود که در یکی از همین نقطه‌ها، اکسترمم وجود داشته باشد: قضیهٔ فرما، برابری $f'(x)=0$ را، تنها در موردی به کار می‌برد که مشتق دوطرفه و متناهی وجود داشته باشد.

مثلاً، تابع $y=x^{\frac{2}{3}}$، به‌روشنی، به‌ازای $x=0$، دارای می‌نیمم است و، در عین‌حال، مشتق آن در سمت چپ برابر $-\infty$ و در سمت راست برابر $+\infty$ است [۱۰۱]؛ به‌همین ترتیب، تابع $|x|$، به ازای $x=0$، دارای می‌نیمم است، هرچند که مشتق دوطرفه، در این نقطه، برای تابع وجود ندارد [۱۰۰]. در نتیجه، نقطه‌هایی هم، که در آن‌جا، مشتق دوطرفهٔ متناهی وجود ندارد، ممکن است تابع را به اکسترمم برسانند، ولی روشن است که، در این حالت، نمی‌توان وجود اکسترمم را، در جمیع نقطه‌هایی از این نوع، تضمین کرد. مثلاً، تابع‌های $y=x^{\frac{1}{3}}$ و $y=x\sin\frac{1}{x}$ (با شرط تکمیلی $y=0$ به‌ازای $x=0$) را در نظر بگیرید. تابع اول، در نقطهٔ $x=0$، دارای مشتق نامتناهی است [۱۰۱] و دومی، در این نقطه، اصلاً دارای مشتق نیست [۱۰۲.۱°]، ولی نقطهٔ $x=0$، نه این و نه آن تابع را به اکسترمم نمی‌رسانند (زیرا، در هر همسایگی آن، هم مقدارهای منفی و هم مقدارهای مثبت را قبول می‌کند).

۱۳۵. شرط‌های کافی. قاعدهٔ اول. به‌این ترتیب، اگر نقطهٔ x_0، نقطهٔ سکون برای تابع $y=f(x)$ باشد، و یا اگر در این نقطه، برای تابع، مشتق متناهی دوطرفه وجود نداشته باشد، نقطهٔ x_0 را، تنها می‌توان نقطهٔ احتمالی اکسترمم دانست و، برای حصول اطمینان، باید جست‌وجو را ادامه داد.

این جست‌وجوی بعدی، به‌بررسی شرط‌های کافی برای وجود اکسترمم مربوط می‌شود، که هم‌اکنون، به‌آن می‌پردازیم.

فرض کنیم که در یک همسایگی $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ از نقطهٔ x_0 (دست‌کم، برای

---

*) در نقطه‌های سکون، مثل این است که تغییر تابع «متوقف»، و سرعت این تغییر [۹۲]، برابر صفر می‌شود.

$x \neq x_0$)، مشتق متناهی $f'(x)$ وجود داشته باشد و، هم درسمت چپ وهم درسمت‌راست آن (به‌طورجداگانه) علامت ثابتی را حفظ‌کند. دراین صورت، سه‌حالت زیرممکن‌است:

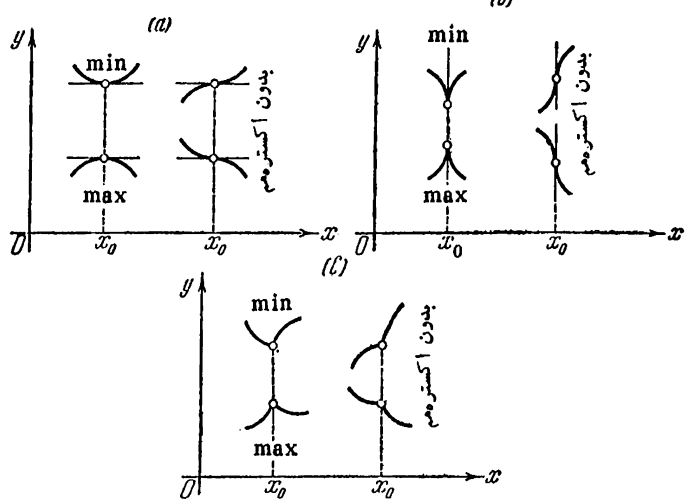
I. $f'(x)>0$ برای $x<x_0$؛ و $f'(x)<0$ برای $x>x_0$؛ یعنی مشتق $f'(x)$، ضمن عبور از نقطهٔ x_0، علامت مثبت خود را به‌علامت منفی تبدیل می‌کند. در این حالت، تابع $f(x)$، دربازهٔ $[x_0-\delta, x_0)$ صعودی‌و دربازهٔ $[x_0, x_0+\delta]$ نزولی است [۱۳۲]. به‌این ترتیب، مقدار $f(x)$ دربازهٔ $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ به‌حداکثر می‌رسد، یعنی تابع، در نقطهٔ x_0، دارای ماکزیمم خاص است.

II. $f'(x)<0$ بـرای $x<x_0$، و $f(x)>0$ برای $x>x_0$، یعنی مشتق $f(x)$، ضمن عبور از نقطهٔ x_0، عـلامت خود را تغییر می‌دهد و از منفی به‌مثبت می‌رود. در ایـن حالت، به‌طریق مشابهی، ثابت می‌شودکه، تابع درنقطهٔ x_0 دارای می‌نیمم خاص است.

III. $f'(x)>0$ هم‌برای $x>x_0$ وهم‌برای $x<x_0$ ویا $f'(x)<0$ برای‌هردو طرف x_0، یعنی مشتق، ضمن عبور ازنقطهٔ x_0، تغییرعلامت نمی‌دهد. در این حالت، تابع همواره صعودی یا همواره نزولی است. درنزدیکی دلخواه x_0، دریك طرف x_0نقطه‌های x پیدا می‌شوندکه درآن‌ها $f(x)<f(x_0)$، و درطرف دیگر، نقطه‌های x که برای‌آن‌ها $f(x)>f(x_0)$ و، به‌این ترتیب، درنقطهٔ x_0، هیچ‌گونه اکسترممی وجود ندارد.

از نظر نموداری، ساده‌تریـن حالت‌هـای ممکن را در شکل ۵۶ (a، b، c) نشان داده‌ایم.

به‌این ترتیب، نخستین قاعده رابرای آزمایش مقدار «مظنون» x_0 به‌دست می‌آوریم:



شکل ۵۶

باقراردادن، ابتدا $x<x_0$ وسپس $x>x_0$ در $f'(x)$، علامت مشتق را درنزدیکی نقطهٔ x_0 درسمت چپ و درسمت راست آن، معین می‌کنیم. درحالتی‌که مشتق $f'(x)$، ضمن عبوراز x_0، علامت مثبت‌خود را به‌علامت منفی تبدیل‌کند، ماکزیمم و درحالتی‌که علامت منفی‌خود را با علامت مثبت عوض‌کند، می‌نیمم وجود دارد. ولی، اگر مشتق، ضمن عبور از x_0، تغییر علامت ندهد، درآن صورت، اصلاً اکسترمم‌ی وجود ندارد.

این قاعده، مساله را به‌طورکامل، درحالتی حل‌می‌کندکه در بازهٔ (a,b) ــ همان‌طور که معمولاً چنین است ــ تنها تعداد محدودی نقطه‌های سکون و یا نقطه‌هایی‌که درآن‌جا مشتق متناهی نیست، وجود داشته باشد:

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n<b \qquad (۴)$$

یعنی وقتی‌که، قبل ازهمه درهریك ازبازه‌های

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\ \cdots,\ (x_k,x_{k+1}),\ \cdots,\ (x_n,b)$$

مشتق متناهی $f'(x)$ وجود داشته باشد و، علاوه برآن، $f'(x)$ درهرکدام از این بازه‌ها، علامت ثابتی راحفظ‌کند. در واقع، اگر $f'(x)$، مثلاً در بازهٔ (x_k,x_{k+1})، علامت عوض کند، بنابه قضیهٔ دار بو [۱۱۵]، مقدار این مشتق در نقطه‌ای واقع دربین x_k و x_{k+1} برابر صفرمی‌شود، که امکان ندارد، زیرا همهٔ ریشه‌های مشتق، در ردیف (۴) قراردارند.

موضوع اخیر،دربسیاری موردها، درعمل به‌کارمی آید: اگربخواهیم علامت $f'(x)$ را در بازهٔ (x_k,x_{k+1}) معین‌کنیم، کافی است مقدار آن را، درنقطه‌ای ازاین بازه، محاسبه (ویا حتی فقط تعیین علامت) کنیم.

۱۳۶. چند مثال. ۱) مطلوب است تعیین اکسترمم‌های تابع

$$f(x)=(x+۲)^۲.(x-۱)^۳$$

مشتق این تابع، همواره وجود دارد ومعین است:

$$f'(x)=۲(x+۲)(x-۱)^۳+۳(x+۲)^۲(x-۱)^۲=$$
$$=(x+۲)(x-۱)^۲(۵x+۴)$$

ریشه‌های مشتق (نقطه‌های سکون)، چنین‌اند:

$$x_1=-۲,\quad x_2=-\frac{۴}{۵}=-۰/۸,\quad x_3=۱$$

این مقدارها، سراسر بازهٔ $(+\infty,-\infty)$ را، به‌بخش‌های زیرتقسیم می‌کنند:

$$(-\infty\,,-2)\,,\ (-2\,,-0/8)\,,\ (-0/8\,,1)\,,\ (1\,,+\infty)$$

برای تعیین علامت مشتق در این بازه‌ها، می‌توان مقدارهای مشخصی از این بازه‌ها را درمشتق قرارداد. مثلاً، به‌ازای $-3\,,-1\,,0$ و 2، وبا تعیین علامت عامل‌های ضرب، علامت تمامی مشتق را به‌دست آورد:

در بازهٔ $(-\infty\,,-2)$: $\quad(-)(+)(-)=+$

در بازهٔ $(-2\,,-0/8)$: $\quad(+)(+)(-)=-$

در بازهٔ $(-0/8\,,1)$: $\quad(+)(+)(+)=+$

در بازهٔ $(1\,,+\infty)$: $\quad(+)(+)(+)=+$

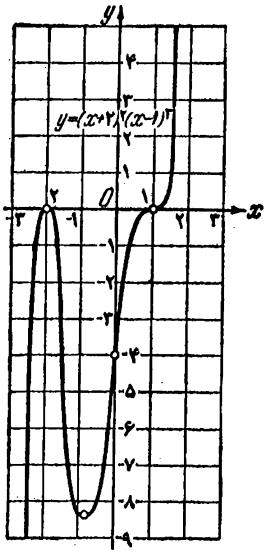
از این جا، روشن است که تابع $f(x)$، به ازای $x=-2$ دارای ماکزیمم و به ازای $x=-0/8$ دارای می‌نیمم است و در نقطهٔ $x=1$، اکسترممی وجود ندارد.

معمولاً، به‌ترتیب دیگری، غیر از گذاشتن مقدارهای مشخص درمشتق، عمل می‌کنند. از $x=-2$ آغاز می‌کنیم. حاصل‌ضرب دوعامل آخرمشتق $(5x+4)$ و $(1-x)^2$، علامت منفی دارد و، درنتیجه (بنا به پیوستگی)، در نزدیکی این نقطه (چه درسمت چپ و چه‌درسمت راست آن)، همان علامت‌را حفظ می‌کند. عامل $x+2$ هم، وقتی که x درحال صعود، از -2 عبورمی‌کند، علامت منفی را با مثبت عوض می‌کند و، درنتیجه، مشتق هم، ضمن عبور از این نقطه، ازمثبت به‌منفی می‌رود و تابع دارای ماکزیمم است. در نقطهٔ $x=-\frac{4}{5}$ (درنزدیکی این نقطه)، دوعامل دیگرمشتق مثبت‌اند وعامل $(5x+4)$ (وهمراه با آن، تمامی مشتق)، ضمن عبور از این نقطه، ازمنفی به‌مثبت تغییرعلامت می‌دهد و تابع دارای می‌نیمم است. بالاخره، ضمن عبور از نقطهٔ $x=-1$، نه‌تنها دوعامل دیگر، بلکه حتی خود عامل $(x+1)^2$ هم، علامت خود را حفظ می‌کند، (زیرا مجذوریك عبارت، همیشه غیرمنفی است) و، دراین‌جا، اکسترممی وجود ندارد. وقتی که نقطه‌های x، که تابع در آن‌ها اکسترممی دارد، معلوم باشند، به سادگی می‌توان خود مقدارهای اکسترممی را هم پیدا کرد: $f(-2)=0$ مقدارماکزیمم، و $f(-0/8)\doteq -8/4$ مقدارمی‌نیمم، روی شکل ۵۷، منحنی نمایش تغییر این تابع داده شده است.*

۲) مطلوب است تعیین اکسترممهای تابع

---

*) چه دراین‌جا و چه درمثال‌های بعدی، منحنی نمایش تغییر تابع‌ها را، نشان داده‌ایم، ولی، بحث تفصیلی رسم‌نمودارها را در §۳خواهیم دید (به‌خصوص، شمارهٔ ۱۴۹، ۳۰) را ببینید).



شکل ۵۷

$$f(x)=\sin^{۳}x+\cos^{۳}x$$

با توجه به‌این‌که، تابع دارای دورهٔ تناوب ۲π است، کافی است به‌مقدارهایی‌از x، که در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ قراردارند، اکتفاکنیم. مشتق این تابع، درهمه‌جا، وجود دارد:

$$f'(x)=۳\sin^{۲}x\cos x-۳\cos^{۲}x\sin x=$$

$$=۳\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$$

ریشه‌های مشتق (یعنی نقطه‌های سکون)، چنین‌اند:

$$۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۲}, (۲\pi)$$

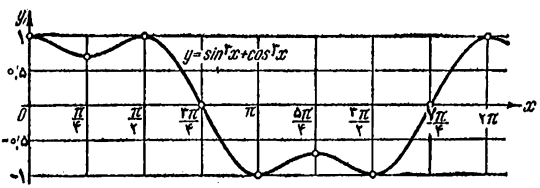
ضمن عبوراز $x=۰$، $\sin x$ از منفی به مثبت می‌رود و تمامی مشتق‌ازمثبت‌به‌منفی می‌رود، زیراعامل آخر، درهمسایگی $x=۰$، علامت منفی را حفظ می‌کند. تابع دراین‌نقطه، ماکزیمم دارد.

عامل $\sin x-\cos x$، درنقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$، برابرصفرمی‌شود و، ضمن عبور ازاین نقطه، همراه با تمامی مشتق، ازمنفی به‌مثبت‌می‌رود، زیرا دو عامل اول مثبت‌اند. درنتیجه، دراین نقطه، می‌نیمم وجود دارد. سایرنقطه‌های سکون را هم، به‌همین‌ترتیب، می‌توان مورد بررسی‌قرار داد: همهٔ آن‌ها، ویك درمیان، تابع را به ماکزیمم ومی‌نیمم می‌رسانند.

اگرمقدارهای‌نقطه‌های سکون را، درعبارت‌تابع‌قراردهیم، خود مقدارهای ماکزیمم ومی‌نیمم، به‌دست می‌آید:

ماکزیمم‌ها: $f(۰)=f(۲\pi)=۱, f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱, f\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\doteq-۰/۷۱$

می‌نیمم‌ها: $f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\doteq۰/۷۱, f(\pi)=-۱, f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=-۱$



شکل ۵۸

نمودار تابع، درشکل ۵۸ داده شده است [با ۱۴۷، ۱) مقایسهٔ کنید].

۳) اکسترمم‌های این تابع را پیدا کنید:

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

این بار، مشتق متناهی

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

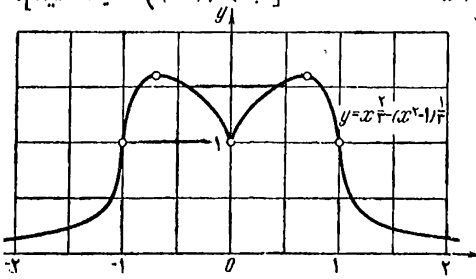
درهمه‌جا، جز نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm 1$، وجود دارد. با نزدیک شدن x به‌این نقطه‌ها (از هر دوطرف)، مشتق به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند.

برای تعیین ریشه‌های مشتق، صورت آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$، به‌این‌ترتیب، نقطه‌های «مظنون»، برای اکسترمم، عبارتنداز

$$-1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad +1$$

برای $x=0$ (و درهمسایگی آن)، صورت و عامل دوم مخرج، مثبت‌اند و عامل $x^{\frac{1}{3}}$ مخرج، از منفی به مثبت می‌رود و، بنابراین، تابع دراین‌نقطه، به می‌نیمم می‌رسد. برای $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (و در نزدیکی آن) مخرج دارای علامت مثبت است. صورت را، باتوجه به مقدارهای x نزدیک به $\frac{1}{\sqrt{2}}$، به‌شکل $x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ می‌نویسیم که به‌ازای $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر صفر می‌شود و با کوچک‌شدن x، بزرگ و با بزرگ‌شدن x، کوچک می‌شود؛ بنابراین، ضمن عبور از $\frac{1}{\sqrt{2}}$، از مثبت به‌منفی می‌رود و تابع، دراین‌نقطه، ماکزیمم‌دارد. همین وضع، برای $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ هم برقراراست. با عبوراز $x=1$، عامل $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ درمخرج، که دراین نقطه برابر صفر می‌شود، تغییر علامت نمی‌دهد و، درنتیجه، مشتق‌هم دراین‌نقطه، تغییر علامت نمی‌دهد. بنابراین، برای $x=1$، اکسترمم وجود ندارد و، به‌همین‌ترتیب، برای $x=-1$.

بنابراین به‌تابع دارای ماکزیمم‌های $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{۲}}\right)=\sqrt[۳]{۴}=۱/۵۹$ و می‌نیمم $f(۰)=۱$ است. نمودار تابع در شکل ۵۹ داده شده است [با ۱۴۹، ۴) مقایسه کنید].



شکل ۵۹

۴) نوسان‌های میرا. فرض کنیم. حرکت نقطه‌ای، با قانون زیر، معین شده باشد:

$$s=Ae^{-kt}\sin\omega t$$

که در آن، s، مسافت پیموده شده (از وضع اولیه) و t، زمان (از لحظهٔ اولیه)می‌باشد. ضمناً، همهٔ ثابت‌های A، k، ω، همچنین، زمان t را، مثبت می‌گیریم. می‌خواهیم منحنی نمایش تغییرات این وابستگی را پیدا کنیم. جالب است که این رابطهٔ تابعی را، با سینوسوئید $s=A\sin\omega t$ مقایسه کنیم. چون $e^{-kt}>۰$، روشن است که منحنی نمایش تابع ما، محور x را در نقطه‌های $t=n\cdot\frac{\pi}{\omega}$ $(n=۱,۲,۳,\dots)$، قطع می‌کند. به‌یاد بیاوریم که تابع $s=A\cdot\sin\omega t$، دارای ماکزیمم و می‌نیم‌های یک‌درمیان، در نقطه‌های $t=\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\frac{\pi}{\omega}$ می‌باشد. که به‌ازای آن $s'=A\omega\cos\omega t$ برابر صفر می‌شود. مشتق تابع مفروض را محاسبه می‌کنیم [با ۹۹، ۳۰) مقایسه کنید]:

$$s'=Ae^{-kt}(\omega\cdot\cos\omega t-k\cdot\sin\omega t)=$$

$$=A\cdot\sqrt{\omega^۲+k^۲}\cdot e^{-kt}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^۲+k^۲}}\cos\omega t-\frac{k}{\sqrt{\omega^۲+k^۲}}\sin\omega t\right)$$

که با واردکردن زاویهٔ کمکی φ، باشرط‌های

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^۲+k^۲}}=\cos\varphi,\qquad \frac{k}{\sqrt{\omega^۲+k^۲}}=\sin\varphi$$

می‌توان عبارت مشتق را، به‌این‌صورت نوشت:

$$s'=A\cdot\sqrt{\omega^۲+k^۲}\cdot e^{-kt}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

مشتق، در نقطه‌های

$$t=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$$

برابر صفر می‌شود وچون کسینوس، ضمن عبور از صفر، تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، تابع به‌ازای این مقدارها به‌اکسترمم می‌رسد: برای مقدارهای زوج n، ماکزیمم و برای مقدارهای فرد n، می‌نیمم. در مقایسه باسینوسوئید، اکستردمم‌ها، به اندازهٔ $\frac{\varphi}{\omega}$ به‌سمت‌چپ، جابه‌جا شده‌اند.

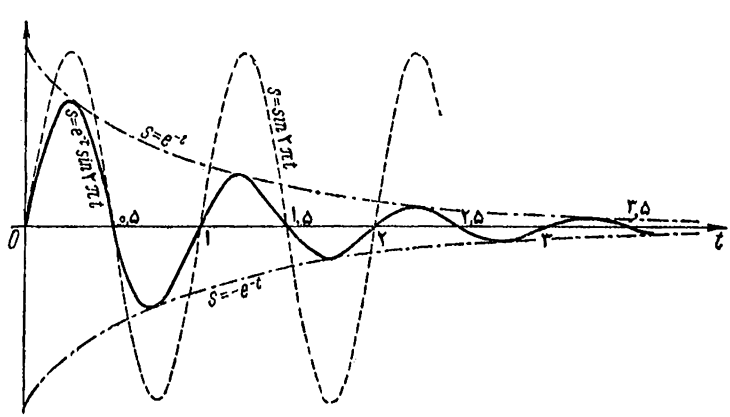
به‌سادگی دیده می‌شود که همهٔ ماکزیمم‌ها مثبت و همهٔ می‌نیمم‌ها منفی هستند. اگر مقدار اکسترمم nام را، A_n نشان دهیم، داریم:

$$\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|=e^{\frac{k\pi}{\omega}}$$

و به‌این‌ترتیب، دامنهٔ نوسان، به‌تصاعد هندسی، نزول می‌کند.

نمودار (دریک‌حالت خاص)، درشکل ۶۰ داده شده است. حرکتی ازاین‌گونه را، نوسان میرا می‌گویند.

یادداشت. درعمل، در بیشتر حالت‌ها، قاعدهٔ فوق برای بررسی مقدارهای «مظنون» به نقطه‌های اکسترمم، کافی است. ولی باید دانست که ممکن است حالت‌هایی پیش آید که درمورد آن‌ها، استفادهٔ از این قاعده، به‌اشکال برخورد کند. این وضع، وقتی پیش می‌آید که درهمسایگی دلخواه هرنقطهٔ موردنظر، مجموعه‌هایی نامتناهی از نقطه‌های مشابه وجود داشته‌باشد و، درنتیجه، مشتق نتواند دراین یا آن‌طرف این نقطه‌ها، علامت ثابتی‌را



شکل ۶۰

حفظ کند.

به‌عنوان نمونه این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^{۲}\sin\frac{۱}{x}\ (x\neq ۰),\qquad f(۰)=۰$$

معلوم است که به‌ازای $x=۰$، تابع دارای مشتق $f'(۰)=۰$ است [۲، ۱۰۲°]، ولی در نزدیکی دلخواه نقطهٔ سکون $x=۰$، چه درسمت چپ و چه درسمت راست، مشتق

$$f'(x)=۲x.\sin\frac{۱}{x}-\cos\frac{۱}{x}$$

بی‌نهایت بار، تغییر علامت می‌دهد. در نقطهٔ $x=۰$، اکسترمم وجود ندارد. ولی اگر تابع را به‌صورت

$$f(x)=x^{۲}\left(۱+\sin\frac{۱}{x}\right)(x\neq ۰),\quad f(۰)=۰$$

تعریف کنیم، بازهم، در نقطهٔ $x=۰$، همین‌وضع پیش‌می‌آید، ولی این‌بار، به‌ازای $x=۰$ می‌نیمم وجود دارد. به‌هرحال، درهیچ‌کدام از این دو حالت، نمی‌توان ازقاعده‌ای که داشتیم، استفاده کرد.

۱۳۷. قاعدهٔ دوم. برای جست‌وجوی اکسترمم، می‌توان، به‌جای بررسی علامت مشتق درنزدیکی نقطهٔ موردنظر، به‌بررسی علامت مشتق دوم، در خود این نقطه، پرداخت. این مطالب را روشن می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$، نه‌تنها دارای مشتق $f'(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x_۰$، بلکه ضمناً دارای مشتق $f''(x)$ درخود نقطهٔ $x_۰$ باشد. $x_۰$، یك نقطهٔ سکون است، یعنی $f'(۰)=۰$. اگر داشته باشیم $f''(x_۰)<۰$، درآن‌صورت، بنابه شمارهٔ ۱۰۹، تابع $f'(x)$ درنقطهٔ $x=x_۰$ صعودی است، یعنی در همسایگی $x_۰$، درسمت چپ داریم $f'(x)<f'(x_۰)=۰$ و درسمت راست: $f'(x)>f'(x_۰)=۰$. به‌این‌ترتیب، مشتق $f'(x)$، درنقطهٔ $x_۰$، از منفی به‌مثبت، تغییرعلامت می‌دهد و، درنتیجه، $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_۰$ دارای‌می‌نیمم است. اگر داشته‌باشیم $f''(x)<۰$، درآن‌صورت، $f'(x)$درنقطهٔ $x=x_۰$ نزولی است و ازمثبت به‌منفی، تغییر علامت می‌دهد وماکزیمم وجود دارد. حالا، می‌توانیم قاعدهٔ دوم را، برای بررسی نقطهٔ «مظنون» $x_۰$، تنظیم کنیم:

$x_۰$ را در مشتق دوم $f''(x)$ می‌گذاریم، اگر $f''(x_۰)<۰$ باشد، تابع دارای‌ماکزیمم و اگر $f''(x_۰)>۰$ باشد، تابع دارای می‌نیمم است.

این قاعده، وبطور کلی، کاربرد محدودی دارد، روشن است که، مثلاً، نمی‌توان آن را درمورد نقطه‌هایی که در آن‌جا، مشتق وجود ندارد به‌کاربرد (چون، دراین نقطه‌ها، از مشتق دوم، نمی‌توان صحبت کرد). درحالت‌هایی هم که مشتق دوم برابر صفر شود، ازاین قاعده، چیزی عاید ما نمی‌شود و، برای حل مساله، باید به‌مشتق مرتبه‌های بالاتر متوسل شد [شمارهٔ بعد را ببینید].

اگر بخواهیم ازاین قاعده، درمثال ۲) شمارهٔ قبل، استفاده کنیم، باید مشتق دوم را محاسبه کنیم:

$$f''(x)=۶\sin x\cos x(\cos x+\sin x)-۳(\sin^۳x+\cos^۳x)$$

برای $x=۰(۲\pi)$، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، جملهٔ اول مشتق، برابر صفر می‌شود و، درنتیجه، علامت $f''(x)$، مخالف علامت $f(x)=\sin^۳x+\cos^۳x$ است و این علامت، برای $x=۰(۲\pi)$، $\frac{\pi}{۲}$ منفی (دراین‌جا، ماکزیمم) و برای $x=\pi$، $\frac{۳\pi}{۲}$ مثبت (دراین‌جا، می‌نیمم) است. برای $x=\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$، به‌دلیل برابری $\sin x=\cos x$، $f''(x)$ به $۶\sin^۳x$ تبدیل می‌شود و، بنابراین، مشتق دوم درنقطه اول مثبت (می‌نیمم) و درنقطهٔ دوم منفی (ماکزیمم) می‌شود.

اینک، مثال تازه‌ای می‌آوریم. می‌خواهیم اکسترمم‌های این تابع را پیدا کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۱}$$

مشتق به‌صورت $f'(x)=۵.\frac{x^۲-۲x-۱}{(x^۲+۱)^۲}$ در می‌آید که، همراه با صورت کسر، به‌سمت صفر میل می‌کند. ریشه‌های مشتق، چنین‌اند:

$$x_۱=۱-\sqrt{۲}\doteq -۰٫۴۱ \text{ و } x_۲=۱+\sqrt{۲}\doteq ۲/۴۱$$

مشتق دوم را محاسبه می‌کنیم:

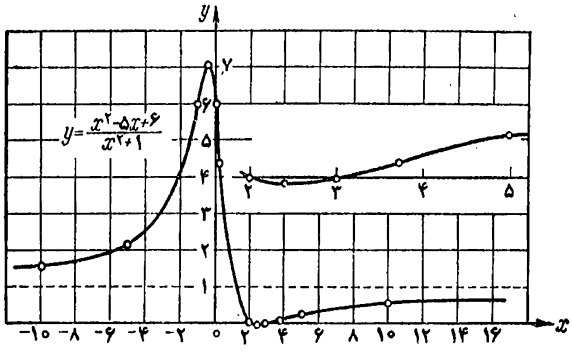
$$f''(x)=\frac{۵}{(x^۲+۱)^۲}(۲x-۲)+\cdots$$

به‌بقیهٔ جمله‌ها، که‌شامل عامل $۱-۵x-x^۲$ هستند، نیازی نیست، زیرا، به‌ازای جواب‌های مشتق اول، برابر صفر می‌شوند.

به‌سادگی دیده می‌شود که $f''(x_۱)<۰$ و $f''(x_۲)>۰$، در نتیجه، مقدار

$f(x_1) \doteq ۷/۰۴$ ماکزیمم و $f(x_2) \doteq -۰/۰۳$ می‌نیمم است.

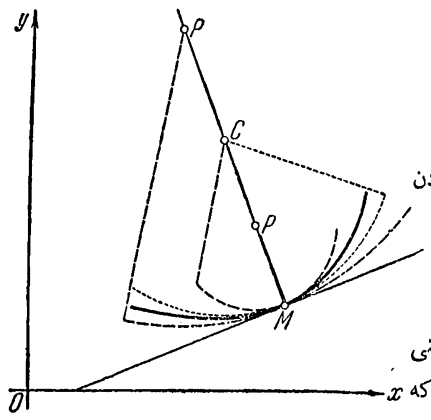
نمودار تابع، درشکل ۶۱ داده شده است [۱۴۹، ۵) را ببینید].



شکل ۶۱

بالاخره، به‌مسأله‌ای می‌پردازیم، که مضمونی هندسی دارد: نقطهٔ $P(\xi\,,\,\eta)$ و منحنی (K) به‌معادله $y=f(x)$ (در صفحه) را در نظر می‌گیریم. مطلوب است، شرط این‌که فاصلهٔ r از نقطهٔ P تا نقطهٔ $M(x,y)$ واقع برمنحنی، اکسترمم باشد (شکل ۶۲).

به‌جای تابع r، می‌توان، این تابع را درنظر گرفت:



شکل ۶۲

$$u=\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]$$

که در آن داریم: $y=f(x)$. باصفر قرار دادن مشتق آن

$$u'_x=x-\xi+(y-\eta)\cdot y'_x$$

می‌بینیم، برای این‌که نقطهٔ $M(x,y)$ از منحنی (K)، به‌فاصلهٔ اکسترمم r برسد، لازم است که این شرط برقرار باشد:

$$\xi-x+y'_x(\eta-y)=0$$

به‌زبان دیگر باید نقطهٔ $P(\xi,\eta)$، برخط

$$X-x+y'_x(Y-y)=0$$

قرار گیرد، که از نقطهٔ $M(x,y)$ منحنی، برمماس در این نقطه عمود شده است* و قائم برمنحنی نام دارد.

فرض کنیم. نقطهٔ $P(\xi,\eta)$، روی قائم برمنحنی (K) در نقطهٔ $M(x,y)$ باشد. آیا فاصلهٔ PM اکستره‌مم است؟ حل این مساله، به‌علامت مشتق دوم مربوط می‌شود:

$$u''_{x^2}=1+y'^2_x+(y-\eta).y''_{x^2}$$

این عبارت (بافرض $y''_{x^2}\neq 0$)، تنها در نقطهٔ C صفر می‌شود، که مختصات آن‌چنین است:

$$\xi=x-y'_x.\frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}}$$

پرسش، همچنان مطرح است. نقطه C روی قائم قرار دارد و نقطه‌های P را به‌دو گروه تقسیم می‌کند: نقطه‌های P که برای آن‌ها داریم $u''<0$ و در مورد آن‌ها فاصلهٔ PM ماکزیمم است؛ و نقطه‌های P' که برای آن‌ها داریم $u''>0$ و درمورد آن‌ها $P'M$ می‌نیمم است.

بعدها [۲۴۳ ، ۲۵۳] خواهیم دید که این نقطهٔ مرزی C، در بسیاری از رابطه‌ها، اهمیت دارد.

۱۳۸. استفاده ازمشتق مرتبه‌های بالاتر. دیدیم که اگر داشته باشیم: $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)>0$، تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 به‌می‌نیمم می‌رسد، و اگر داشته باشیم: $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)<0$، تابع در این نقطه به‌ماکزیمم می‌رسد. حالا به‌حالت $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)=0$ می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$، در نقطهٔ $x=x_0$، دارای n مشتق متوالی است و همهٔ آن‌ها تامرتبهٔ $(n-1)$ام، در این نقطه، برابر صفرند:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

و درضمن $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. نمو $f(x)-f(x_0)$ تابع $f(x)$ را، از روی دستور تیلور، برحسب توان‌های $(x-x_0)$، با جملهٔ متمم از روی دستور په‌آنو [۱۲۴، (۱۰a)]، بسط می‌دهیم. چون، همهٔ مشتق‌ها، با مرتبهٔ کمتراز n، در نقطهٔ x_0 برابر صفر هستند، بنابراین

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n$$

با توجه به‌این که، وقتی $x\to x_0$، ضمناً $\alpha\to 0$، برای نزدیکی کافی x به x_0، علامت

---

*) ضریب‌زاویهٔ $-\frac{1}{y'_x}$ آن، عکس قرینهٔ y'_x، یعنی ضریب زاویهٔ مماس است.

مجموع در صورت کسر، چه برای $x<x_0$ و چه برای $x>x_0$، همان علامت $f^{(n)}(x_0)$ می‌شود، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱°. n عددی فرد است: $n=2k+1$. ضمن عبور از مقدار x کمتر از x_0، به‌مقدار بیشتر از x_0، عبارت $(x-x_0)^n$، تغییر علامت می‌دهد و چون علامت عامل اول، در این عبور، تغییر نمی‌کند، علامت تفاضل $f(x)-f(x_0)$ عوض می‌شود و، به‌این ترتیب، تابع در نقطهٔ x_0، نمی‌تواند دارای اکسره‌مم باشد، زیرا درهمسایگی این نقطه، مقدارهایی کمتر و بیشتر از $f(x)$ اختیار می‌کند.

۲°. n عددی زوج است: $n=2k$. در این حالت، تفاضل $f(x)-f(x_0)$، ضمن عبور از xهای کمتر از x_0 به xهای بیشتر از x_0، تغییر علامت می‌دهد و، چون برای همهٔ xها داریم $(x-x_0)^n>0$، روشن است که در همسایگی x_0، چه درسمت چپ و چه در سمت راست، علامت تفاضل $f(x)-f(x_0)$، با علامت عدد $f^{(n)}(x_0)$ یکی می‌شود. یعنی در حالت $f^{(n)}(x_0)>0$، درهمسایگی نقطهٔ x_0 داریم: $f(x)>fx_0$ و، در نتیجه، تابع در نقطهٔ x_0، دارای می‌نیمم (خاص)است و در حالت $f^{(n)}(x_0)<0$، تابع $f(x)$ دارای ماکزیمم (خاص) است.

به‌این ترتیب، قاعدهٔ زیر به‌دست می‌آید:

اگر نخستین مشتقی که، در نقطهٔ x_0، مخالف صفر است، از مرتبهٔ فرد باشد، تابع در نقطهٔ x_0، ماکزیمم یا می‌نیمم ندارد، ولی اگر این مشتق از مرتبهٔ زوج باشد، تابع، برحسب آن‌که این مشتق مثبت یا منفی باشد، دارای می‌نیمم یا ماکزیمم است.

مثلاً، برای تابع $y=e^x+e^{-x}+2\cos x$، نقطهٔ $x=0$، یک نقطهٔ سکون است، زیرا، در این نقطه، مشتق برابر صفر می‌شود:

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$$

و سپس

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x, \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x, \qquad f'''(0)=0$$
$$f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x, \qquad f^{IV}(0)=4$$

وچون نخستین مشتقی که مخالف صفر است، از مرتبهٔ چهارم است، اکسره‌مم وجود دارد و چون $f^{IV}(0)>0$، بنابراین تابع دارای می‌نیمم است.

یادداشت. هرچند، معیار فوق، مساله جست‌وجوی اکسره‌مم‌ها را، در گروه گسترده‌ای

ازتابع‌ها حل می‌کند، ولی ازلحاظ نظری، کاملاً* همه‌جانبه نیست: تابع‌هائی وجود دارند که، متحد باصفرنیستند، و درهمسایگی‌نقطهٔ موردنظر، دارای مشتق، ازهمهٔ مرتبه‌ها، هستند، ولی همهٔ این مشتق‌ها، باهم، دراین‌نقطه، برابر صفر می‌شوند.

به‌عنوان مثال (همراه با کوشی)، این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x\neq 0), \quad f(0)=0$$

به‌ازای $x\neq 0$، این تابع، دارای مشتق، ازهمهٔ مرتبه‌هاست:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}},\ldots$$

و به‌طورکلی

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (5)$$

که در آن، $P_n(z)$، یك چندجمله‌ای صحیح از درجهٔ $3n$ است. رابطهٔ (۵) را می‌توان به‌سادگی، و با استفاده از روش استقرای ریاضی، ثابت کرد.

می‌بینیم که درنقطهٔ $x=0$، مشتق این‌تابع، برای همهٔ مرتبه‌ها، وجود دارد و،ضمناً، همهٔ آن‌ها برابر صفرند، در واقع، قبل‌ازهمه، وقتی $x\to 0$، داریم:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0^*$$

به‌نحوی‌که $f'(0)=0$، اگرفرض‌کنیم‌که مشتق‌همهٔ مرتبه‌ها، تا مرتبهٔ n (وخود این‌مرتبه) درنقطهٔ $x=0$، برابر صفر باشند، آن‌وقت [(۵) را ببینید]، وقتی $x\to 0$، داریم:

---

*) یادآوری می‌کنیم‌که e^z، وقتی $z\to+\infty$، بی‌نهایت بزرگی بامرتبهٔ بالاتراز z^k (با توان دلخواه) است، یعنی

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{z^k}{e^z}=0$$

[۶۵]، دراین‌جا، نقش z به‌عهدهٔ $\frac{1}{x^2}$ (به‌ازای $x\to 0$) است.

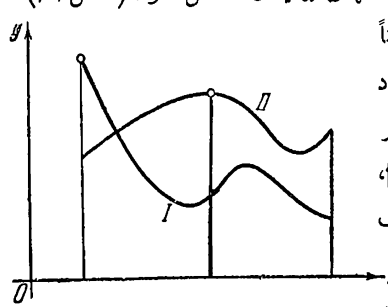
$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0$$

زیرا، صورت کسر، تشکیل شده است از جمله‌هایی به‌شکل $\frac{c}{x^m}$، یعنی $f^{(n+1)}(0)=0$؛ بدین ترتیب، با روش استقرای ریاضی، ثابت شد که مشتق همهٔ مرتبه‌ها، در نقطه $x=0$، برابر صفر است.

هرچند، مستقیماً، معلوم است که، تابع مفروض، در نقطهٔ $x=0$، دارای می‌نیمم است، ولی اثبات آن، به‌کمک مشتق‌های متوالی در این نقطه، میسر نیست.

۱۳۹. تعیین مقدارهای حداکثر و حداقل. با فرض معین و پیوسته بودن تابع $f(x)$، در بازهٔ متناهی و بستهٔ $[a,b]$، تاکنون، به‌مسالهٔ ماکزیمم و می‌نیمم آن پرداختیم. حالا، می‌خواهیم به‌مسالهٔ مربوط به‌تعیین حداکثر (بیشترین) و حداقل (کمترین) مقدار تابع در این بازه، بپردازیم.* بنا بر قضیهٔ ویرشتراس [۸۵]، مقدارهای حداکثر و حداقل، وجود دارند. برای مشخص بودن وضع، مسالهٔ حداکثر مقدار تابع را مطرح می‌کنیم.

اگر حداکثر مقدار تابع، مربوط به نقطه‌ای بین a و b باشد، در آن‌صورت روشن است که، این مقدار، یکی از ماکزیمم‌ها (وطبعاً، بزرگترین آن‌ها) خواهد بود. ولی ممکن است که این حداکثر مقدار تابع، در یکی از دو انتهای a یا b حاصل شود (شکل ۶۳).



شکل ۶۳

بنابراین، باید همهٔ ماکزیمم‌های $f(x)$ و، ضمناً مقدارهای مرزی آن، $f(a)$ و $f(b)$، با هم مورد مقایسه قرار گیرند، بزرگترین آن‌ها، همان حداکثر مقدار تابع، از همهٔ مقدارهای $f(x)$ در $[a,b]$، خواهد بود. حداقل مقدار تابع هم، به‌همین ترتیب مشخص می‌شود.

مثلاً، اگر بخواهیم، حداکثر و حداقل مقدار تابع $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ را، در بازه

---

*) به این ترتیب، واژهٔ ماکزیمم را تنها به‌معنای «موضعی» آن می‌پذیریم (ماکزیمم، یعنی بزرگترین مقدار، در همسایگی مستقیم نقطهٔ نظیر) و بین آن، و حداکثر مقدار تابع در سراسر بازهٔ مفروض، فرق می‌گذاریم.

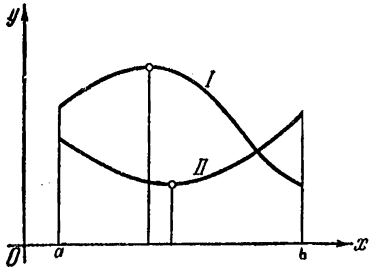
برای «می‌نیمم تابع» و «حداقل مقدار تابع» هم، همین اختلاف را قبول می‌کنیم.

$\left[-\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}\right]$ معین کنیم، دوماکزیمم برابر ۱ ومقدارهای‌مرزی ۰ $= f\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = f\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ را به‌دست می‌آوریم، در نتیجه، مقدار ۱، حداکثر مقدار تابع، دراین بازه، است. می‌نیمم این تابع برابر ۰/۷۰۰۰ و بزرگتر از مقدارهای مرزی است. بنابراین، حداقل مقدار تابع، دراین بازه، برابر ۰ می‌شود. برای بازهٔ $\left(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲}\right)$، حداکثر را باید از دو ماکزیمم ۱ و ۰/۷۰۰۰ـ انتخاب کرد که به‌ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ ، $x=\frac{۵\pi}{۴}$ به‌دست می‌آیند، زیرا درنقطه‌های مرزی، مقدارهای $f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۰/۷۰۰۰$ ، $f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$ به‌دست می‌آید، که از ۱ کوچکترند. حداقل مقدار تابع، درنقطهٔ مرزی سمت راست به دست می‌آید که، درعین‌حال، برمی‌نیمم تابع، به‌ازای $x=\pi$، منطبق است.

اگر بخواهید، می‌توانیدکاری به بررسی ماکزیمم و می‌نیمم نداشته باشید، و تنها مقدارهای‌تابع را، درنقطه‌های«مظنون» به‌اکسترمم وهم درنقطه‌های‌مرزی $(f(a), f(b))$ محاسبه وهمهٔ آن‌ها را باهم مقایسه‌کنیم. روشن است‌که بزرگترین وکوچکترین این مقدارها، حداکثر و حداقل تابع را به‌دست خواهند داد.

مثلاً دربازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}\right]$، مقدارهای $f(۰)=۱$، $f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۰/۷۰۰۰$، $f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$ و هم مقدارهای مرزی $f\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = f\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = ۰$ و در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲}\right]$، عددهای $f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$، $f(\pi)=-۱$، $f\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = -۰/۷۰۰۰$ وعددهای‌مرزی $f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۰/۷۰۰۰$ و $f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱$ را باهم مقایسه‌کنیم.

یادداشت. درعمل، بیشتر، با حالت ساده‌ای برخورد می‌کنیم که بین a و b، تنهایک نقطهٔ «مظنون» به اکسترمم $x_۰$ وجود دارد. اگر تابع دراین‌نقطه، دارای ماکزیمم (یا می‌نیمم) باشد، درآن‌صورت، بدون مقایسهٔ بامقدارهای مرزی، روشن است‌که، همین مقدار، حداکثر (یا حداقل) مقدار تابع دراین بازه است (شکل ۶۴ را ببینید). اغلب، درچنین موردهایی، مشخص کردن ماکزیمم یا می‌نیمم ساده‌تر است تا محاسبه و مقایسهٔ مقدارهای خاص‌تابع (به‌خصوص، اگر درترکیب عبارت‌آن، مقدارهای ثابت حرفی‌وارد شده باشد).

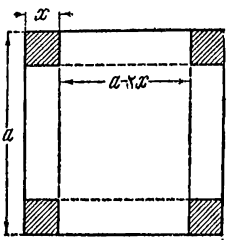


شکل ۶۴

باید یادآوری کنیم که آن چه گفته‌ایم، برای حالت‌های مربوط به بازهٔ باز (a,b) و بازهٔ نامتناهی هم درست است.

۱۴۰. مسأله‌ها. حالا، به‌حل چند مساله می‌پردازیم که به‌زمینه‌های گوناگونی مربوط می‌شوند و حل آن‌ها، به‌تعیین حداکثر و حداقل مقدار یك تابع منجر می‌شود، ولی غالباً، به‌جای خود این مقدارها، نقطه‌هایی (یعنی مقدارهایی از آوند) جالب‌اند که تابع را به‌حداقل یا حداکثر می‌رسانند.

۱) از صفحهٔ حلبی مربع شکلی به‌ضلع a، با بریدن مربع‌های برابر از گوشه‌های آن (شکل ۶۵)، و خم کردن کناره‌های آن، جعبهٔ مکعب مستطیل شکل بدون سرپوشی درست می‌کنیم. چگونه عمل کنیم تا جعبهٔ با حداکثر گنجایش به‌دست آید؟



شکل ۶۵

اگر ضلع مربع بریده شده را، به x نشان دهیم، حجم جعبه با رابطهٔ $y = x(a-2x)^2$ بیان می‌شود. ضمناً x در بازهٔ $\left]0, \frac{a}{2}\right[$ تغییر می‌کند. مساله، به‌تعیین حداکثر مقدار تابع y، در این بازه، منجر می‌شود.

مشتق $y' = (a-2x)(a-6x)$، تنها ریشهٔ $x = \frac{a}{6}$ را بین ۰ و $\frac{a}{2}$ دارد. در این صورت، به‌دلیل آن که این مقدار، تابع را به‌ماکزیمم می‌رساند، حداکثر مقدار تابع هم در همین نقطه است. به‌زبان دیگر: به‌ازای $x = \frac{a}{6}$ داریم: $y = \frac{2a^3}{27}$ و چون مقدارهای مرزی y، برابر صفر هستند، در نتیجه، به‌ازای $x = \frac{a}{6}$؛ حداکثر مقدار، برای y، به‌دست می‌آید.

۲) تیرك با مقطع دایره‌ای به‌قطر d داده شده است، می‌خواهیم با تراش‌دادن آن، تیرك با مقطع مستطیل شکل، با حداکثر استحکام بسازیم.

اشاره. در مقاومت مصالح ثابت می‌شود که استحکام تیرك، متناسب است با حاصل‌ضرب bh^2، که در آن، b عبارت است از قاعدهٔ مستطیل مقطع و h، ارتفاع آن.

چون $h^2 = d^2 - b^2$، پس صحبت بر سر حداکثر مقدار عبارت $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$ است. ضمناً، متغیر مستقل b، در بازهٔ $(0, d)$ تغییر می‌کند.

مشتق $y' = d^2 - 3b^2$، تنها یك‌بار در درون این‌بازه، و درنقطهٔ $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$، برابر صفر می‌شود. مشتق دوم $y'' = -6b$، مقداری منفی است و بنابراین، در نقطهٔ مفروض، تابع y به‌ماکزیمم و، همراه با آن، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد.

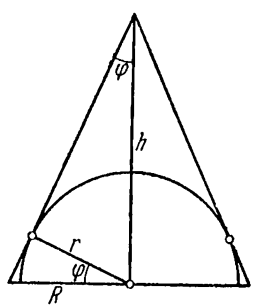
به‌ازای $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ داریم: $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ و بنابراین: $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$. در شکل ۶۶، نشان داده شده است که شکل را چگونه باید ساخت (قطر، به سه قسمت برابر تقسیم شده است و از نقطه‌های تقسیم، عمودهایی بر آن اخراج شده‌اند). درکارهای ساختمانی، معمولاً از نسبت $h:b = 7:5$ استفاده می‌شود، که برابر است بامقدار تقریبی $\sqrt{2} = 1/4\ldots$.

۳) برنیم‌کرهٔ به‌شعاع r، مخروط مستدیر قائم را، با حداقل مقدار حجم، محیط کنید. برای این منظور، فرض می‌شود که قاعده‌های نیم‌کره و مخروط دریك صفحه قرار دارند و هم‌مرکز هستند (شکل ۶۷).

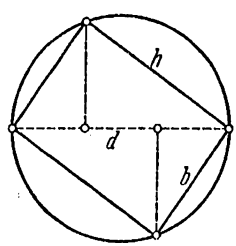
دراین‌جا، ابتدا باید متغیر مستقل را انتخاب کرد. این متغیررا، زاویهٔ φ، نیم زاویهٔ رأس مخروط می‌گیریم. باتوجه به‌نام‌گذاری‌های شکل داریم: $R = \frac{r}{\cos\varphi}$، $h = \frac{r}{\sin\varphi}$، به‌نحوی‌که برای حجم مخروط

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\frac{1}{3}\pi r^3}{\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}$$

و روشن‌است، برای‌این‌که‌حجم v، به‌حداقل‌مقدارخود برسد، بایدعبارت $y = \cos^2\varphi\sin\varphi$ که درمخرج‌قرار دارد، بـه‌کمترین مقدارخـود برسد. زاویهٔ φ در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ تغییر



شکل ۶۷



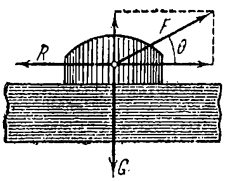
شکل ۶۶

می‌کند. داریم:

$$y'_\varphi = -2\cos\varphi.\sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - tg^2\varphi\right)$$

مشتق در فاصلهٔ ۰ و $\frac{\pi}{2}$، تنها بهازای $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر صفر می‌شود: $\varphi = \text{arc}tg\frac{1}{\sqrt{2}}$ (که متناظر است با زاویهٔ: $35°15'52''$) و مشتق، در این نقطه، تغییر علامت می‌دهد و از منفی به‌مثبت می‌رود. همین زاویهٔ φ را به‌حداکثر مقدار خود و حجم v را به‌حداقل مقدار خود می‌رساند.

۴) باری به وزن G، واقع بر صفحهٔ افقی، باید با نیروئی که بر آن وارد می‌شود، حرکت کند (شکل ۶۸). نیروئی که بر بار وارد می‌شود، چه زاویه‌ای با افق بسازد تا ـ باوجود اصطکاك ـ مقدار F آن، حداقل باشد؟ ضریب اصطکاك معلوم است.



شکل ۶۸

اشاره. اصطکاك، متناسب با نیروست و درجهت مخالف حرکت، برجسم اثر می‌کند (قانون کولون). تحت تأثیر نیروی F را، که متناظر با زاویهٔ θ است، معین می‌کنیم. اگر این نیرو را در امتدادهای افقی و قائم تجزیه کنیم، مقدار مؤلفه‌های آن، $F\cos\theta$ و $F\sin\theta$، به‌دست می‌آید. نیروئی که جسم برصفحه وارد می‌کند، برابر است با $G - F\sin\theta$ و، بنابراین، طبق قانون کولون، مقدار اصطکاك $R = \mu(G - F\sin\theta)$ می‌شود. مؤلفهٔ افقی $F\cos\theta$، کشندهٔ نیروی F، باید با این اصطکاك برابر باشد:

$$F.\cos\theta = \mu.(G - F\sin\theta)$$

از آن‌جا

$$F = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

باید حداقل مقدار این تابع، یا حداکثر مقدار تابع $y = \cos\theta + \mu\sin\theta$ را، بهازای تغییر θ در بازهٔ $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$، پیدا کنیم. مشتق $y'_\theta = \mu\cos\theta - \sin\theta$، وقتی برابر صفر می‌شود که داشته باشیم: $tg\theta = \mu$ یا $\theta = \text{arc}tg\mu$. این زاویهٔ θ، به زاویهٔ اصطکاك موسوم است. چون $y''_{\theta^2} = -\mu\sin\theta - \cos\theta < 0$، بنابراین، بهترین حالت موقعی است که نیرو را، تحت زاویهٔ اصطکاك واردکنیم. مثلاً، اگر بخواهیم، سنگی را روی تختهٔ چوبی

حرکت دهیم، در آن‌صورت، $\mu = ۰/۴$ و $\theta \doteq ۲۲^\circ$ است.

۵) می‌دانیم که ارزش حرکت کشتی بر روی آب درمدت یک ساعت، برحسب روبل، با رابطهٔ تجربی $a+bv^۳$ بیان می‌شود که، در آن، a و b ثابت‌هایی هستند که برای هر کشتی، باید برآورد شود و v سرعت کشتی به گره دریایی است (گره $= ۱/۸۵$ کیلومتر درساعت)*. ازنظر «اقتصادی»، کشتی با چه‌سرعتی حرکت کند، تا فاصلهٔ مفروضی را با کمترین هزینه طی کند؟

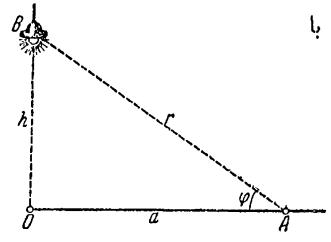
برای پیمودن یک کیلومتر، $\dfrac{۱}{۱/۸۵v}$ ساعت، وقت لازم است. هزینهٔ نظیر با رابطهٔ

$$\frac{۱}{۱/۸۵v}(a+bv^۳) = \frac{۱}{۱/۸۵}\left(bv^۲+\frac{a}{v}\right)$$

بیان می‌شود باصفرکردن مشتق $y = bv^۲+\dfrac{a}{v}$ داریم: $y' = ۲bv-\dfrac{a}{v^۲} = ۰$ ، از آن‌جا $v = \sqrt[۳]{\dfrac{a}{۲b}}$. چون $y''_{v^۲} = ۲b+\dfrac{۲a}{v^۳} > ۰$، بنابراین، به‌ازای این‌مقدار v، هزینهٔ کار، به حداقل مقدار خود می‌رسد.

مثال عددی: $a = ۴۰$، $b = ۰/۰۱$؛ (گره) $۱۲/۶ = \sqrt[۳]{۲۰۰۰} = v$.

۶) فرض کنیم، لامپ برق بتواند برخط قائم حرکت کند (مثلاً، روی یک قرقره) (شکل ۶۹)، این لامپ را، درچه فاصله‌ای ازصفحهٔ افقی OA جا دهیم، تا درنقطهٔ A از صفحه، حداکثر روشنائی بتابد؟



شکل ۶۹

اشاره. روشنائی J ، متناسب با $\sin\varphi$ و متناسب با معکوس مجذور فاصلهٔ $r = AB$ است، یعنی

$$J = c\cdot\frac{\sin\varphi}{r^۲}$$

که در آن، c، بستگی به‌نیروی نور لامپ دارد.

اگر $h = OB$ را برای متغیر مستقل انتخاب کنیم، داریم:

$$\sin\varphi = \frac{h}{r}, \qquad r = \sqrt{h^۲+a^۲}$$

---

*) دراین‌رابطه، قسمت ثابت هزینهٔ a، به‌استهلاک و هزینه‌های فرماندهی، وجملهٔ دوم $bv^۳$، به ارزش سوخت مربوط می‌شود.

$$J=c.\frac{h}{(h^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۰<h<+\infty)$$

و مشتق آن

$$J'_h=c.\frac{a^{۲}-۲h^{۲}}{(h^{۲}+a^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}$$

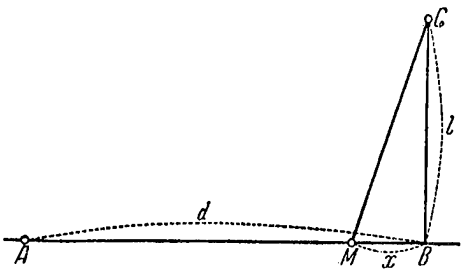
به‌ازای $h=\frac{a}{\sqrt{۲}}=۰/۷a$ برابر صفر می‌شود و، ضمن عبور از این مقدار، از مثبت به منفی می‌رود؛ و این، مناسب‌ترین فاصله است.

برای متغیر مستقل، می‌توانستیم زاویهٔ φ را انتخاب کنیم، درآن‌صورت

$$r=\frac{a}{cos\varphi}, \qquad J=\frac{c}{a^{۲}}.cos^{۲}\varphi sin\varphi$$

ومسأله، منجر به‌تعیین بزرگترین مقدار تابع $y=cos^{۲}\varphi.sin\varphi$، دربازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$، می‌شود. ازقبل می‌دانیم [مسالهٔ ۳] را ببینید]، این بزرگترین مقدار، به‌ازای زاویهٔ $\varphi_۰$ به‌دست می‌آیدکه برای آن داریم: $tg\varphi_۰=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$؛ وبرای مقدار h، همان مقدار قبلی $atg\varphi_۰=\frac{a}{\sqrt{۲}}$ به‌دست می‌آید.

۷) می‌خواهیم ازنقطهٔ A، واقع برخط اصلی راه‌آهن AB (شکل ۷۰)، محموله‌های باری را به نقطهٔ C ببریم، که در فاصلهٔ $CB=l$ ازخط راه‌آهن، قرار گرفته‌است. هزینهٔ حمل واحد وزن در واحد مسافت، به‌وسیلهٔ راه‌آهن برابر α و، درجادهٔ شوسه و به‌وسیلهٔ ارابه، برابر β است. جادهٔ شوسهٔ CM را، ازکدام نقطهٔ M باید کشید تا حمل‌بار از A تا C (ازطریق AMC)، تا حد ممکن ارزان‌تر تمام شود؟



شکل ۷۰

از روی شکل دیده می‌شود که هزینهٔ حمل واحد وزن‌بار، از طریق AMC، برابر است با

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant d)$$

داریم:

$$y'_x=\frac{\beta x}{\sqrt{x^2+l^2}}-\alpha=\beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}-k\right) \qquad \left(k=\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

اگر داشته باشیم $k\geqslant 1$ $(\alpha\geqslant\beta)$، در آن‌صورت، این‌عبارت همواره منفی است و برابر صفر نمی‌شود. تابع y ــ باترقی x از 0 تا d ــ نزول می‌کند و روشن است که، به‌ازای $x=d$، به‌کمترین مقدار خود می‌رسد. دراین حالت، باصرفه‌تر این‌است که جادهٔ شوسه، مستقیماً از A به C کشیده شود.

برای $k<1$، اگر درعین‌حال، داشته باشیم:

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}\geqslant d$$

بازهم وضع به‌همان قرار است، زیرا برای $k<1$، عبارت

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}-k$$

تنها یك ریشه دارد و آن‌عبارت‌است‌از

$$\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}$$

و اگر این مقدار بزرگتر یا مساوی d باشد، به‌معنای آن است‌که، ریشه، درخارج بازهٔ $[0\ ,\ d]$ ویا درانتهای‌آن قرار دارد. و، بنابراین، مقدارمشتق در درون‌بازه، منفی‌می‌شود. تنها درحالتی‌که ریشهٔ نامبرده، کمتراز d باشد، این‌مقدار x، وضع نقطهٔ M را بین A و B مشخص می‌کندکه برای آن، حداقل هزینه را برای حمل‌بار خواهیم داشت.

یادداشت. باتوجه به‌این‌مسأله، نکته‌ای برخوانندگان روشن‌شد: برای تعیین‌حداکثر و حداقل مقدار تابع، دربازهٔ مفروض‌آوند، ممکن است معلوم شودکه دراین بازه، ریشهٔ مشتق (یا سایرمقدارهای «مظنون» به‌اکسترمم) وجود ندارد. این وضع، به‌معنای آن‌است که تابع، دربازهٔ مفروض، به‌طور یکنوا، صعودی یا نزولی است و، درنتیجه، در دو انتهای بازه، به‌حداکثر و حداقل مقدار خود می‌رسد.

§۲. تابع‌های محدب (و مقعر)

۱۴۱. تعریف تحدب یا «برآمدگی» (و تعقر یا «گودی») تابع. بعدازطبقهٔ تابع‌های یکنوا، صعودی یا نزولی، به طبقهٔ به اصطلاح تابع‌های محدب یا مقعر می‌پردازیم.

تابع $f(x)$ را، که در بازهٔ $\mathfrak{D}$* معین و پیوسته است، محدب (محدب به طرف پایین) گویند، وقتی‌که، به‌ازای نقطه‌های دلخواه x_1 و x_2 (x_1 بزرگتر یا کوچکتر از x_2) نابرابری زیر برقرار باشد:

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2) \qquad (1)$$

که درآن، q_1 و q_2، عددهای مثبت دلخواهی به مجموع واحد هستند. به‌همین ترتیب، تابع را مقعر (یا محدب به‌طرف بالا) گویند، وقتی که ــ به‌جای (۱) ــ داشته باشیم**:

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\geqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2) \qquad (1a)$$

روشن است که اگر تابع $f(x)$ محدب باشد، درآن صورت، تابع $f(x)$ ــ مقعر خواهد بود و برعکس. همین نکتهٔ ساده به‌ما امکان می‌دهد که، در بسیاری از حالت‌ها، تنها به بررسی تابع‌های محدب بپردازیم.

تعریفی که برای تحدب تابع‌ها آوردیم، معنای هندسی ساده‌ای دارد. قبلاً یادآوری کنیم که عبارت

$$x=q_1x_1+q_2x_2 \quad (x_1<x_2) \qquad (2)$$

با توجه به شرط‌هایی که برای q_1 و q_2 داشتیم، بین x_1 و x_2 قرار دارد و، برعکس، هرعدد x که بین x_1 و x_2 واقع باشد، تنها به‌یك ترتیب می‌تواند به‌صورت (۲) نوشته شود، با ضریب‌های

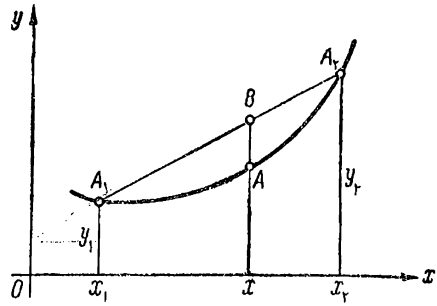
---

*) در این‌جا، $\mathfrak{D}$ می‌تواند بسته یا باز، متناهی یا نامتناهی باشد.

**) مفهوم تحدب (تقعر) تابع را ین‌سن (J. L. W. V. Jensen) آورده است. که البته، از رابطهٔ خاص‌تری نسبت به‌رابطه (۱) (یا (۱a)) آغاز کرده است. رابطهٔ ین‌سن، چنین‌است:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$
$$(\geqslant)$$

که در واقع متناظر است با $q_1=q_2=\frac{1}{2}$. در حالت تابع‌های پیوسته ــ که ما هم خودمان را به‌آن‌ها محدود کرده‌ایم ــ رابطهٔ ین‌سن هم‌ارز رابطه‌ای است که در متن آورده‌ایم.



شکل ۷۱

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ q_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \qquad (2a)$$

اگر نمودار $f(x)$ (شکل ۷۱) و کمانی از آن را که بین نقطه‌های

$$A_1(x_1\ y_1),\quad A_2(x_2,\ y_2)$$

واقع است، درنظر بگیریم [$y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$]، دراین صورت، درسمت چپ نابرابری (۱) ــ باتوجه به‌ضریب‌های (2a) ــ عرض نقطهٔ A ازکمان A_1A_2 به‌طول x را داریم و در سمت راست این نابرابری، عرض نقطهٔ B از وتر A_1A_2 (با همان طول x)، یعنی

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\, y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\, y_2 \qquad (3)$$

به این ترتیب، تابع محدب به این ترتیب مشخص می‌شود که، همهٔ نقطه‌های کمان دلخواه نمودار آن، زیر نقطه‌های نظیر وتر یا منطبق برآن‌ها باشند. (درحالت تعقر تابع، به‌جای «زیر» باید گفته شود «بالا»). منحنی تابع محدب $f(x)$ را هم، منحنی محدب می‌نامند. (و همین‌طور، درحالت تقعر).

مثال ساده (والبته بی‌مایه) برای تابع محدب (و درعین حال، تابع مقعر)، تابع خطی $f(x) = ax + b$ است که در مورد آن، رابطهٔ (۱)، همواره باعلامت تساوی برقرار است. تابع $f(x) = x^2$، نیز تابعی محدب است که، به‌سادگی و از روی تعریف، قابل تحقیق است:

$$(q_1x_1 + q_2x_2)^2 = q_1x_1^2 + q_2x_2^2 - q_1q_2(x_1 - x_2)^2 < q_1x_1^2 + q_2x_2^2$$

باشرط $q_1, q_2 > 0$ و $q_1 + q_2 = 1$. در زیر، مثال‌های دیگری از تابع‌های محدب را خواهیم دید.

۱۴۲. گزاره‌های ساده مربوط به‌تابع‌های محدب. ۱°. حاصل‌ضرب یک‌تابع محدب در یک مقدار ثابت، تابعی محدب است.

۲°. مجموع دو یا چند تابع محدب، یک تابع محدب است.

در هردو حالت، می‌توان اثبات را، مستقیماً، از تعریف تحدب نتیجه گرفت.

یادداشت. حاصل‌ضرب دوتابع محدب ممکن‌است تابعی‌محدب نباشد. نمونهٔ آن‌را، به‌زودی خواهید دید.

۳°. اگر $\varphi(u)$، تابعی محدب و، ضمناً، صعودی، و تابع $u=f(x)$ هم محدب باشد، در آن صورت، تابع مرکب $\varphi(f(x))$ هم تابعی محدب است.

در واقع، با توجه به تحدب f [(۱) را ببینید] و صعودی بودن φ داریم:

$$\varphi(f(q_1x_1+q_2x_2))<\varphi(q_1f(x_1)+q_2f(x_2))$$

و بنابر تحدب φ، عبارت اخیر، از $q_1\varphi(f(x_1))+q_2\varphi(f(x_2))$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$\varphi(f(q_1x_1+q_2x_2))\leqslant q_1\varphi(f(x_1))+q_2\varphi(f(x_2))$$

که یك نابرابری از گونهٔ (۱)، برای تابع $\varphi(f(x))$ است.

به خواننده توصیه می‌کنیم، گزاره‌های مشابهی را، که در این جدول آمده‌است، خود ثابت کند

$\varphi(f(x))$	$u=f(x)$	$\varphi(u)$
محدب	مقعر	محدب، نزولی
مقعر	مقعر	مقعر، صعودی
مقعر	محدب	مقعر، نزولی

۴°. اگر تابع‌های $y=f(x)$ و $x=g(y)$، به‌صورت یك‌ارزشی، تابع‌های عکس هم باشند (دربازه‌های نظیر)، در آن صورت داریم:

$g(y)$	$f(x)$
مقعر، صعودی	محدب، صعودی
محدب، نزولی	محدب، نزولی
مقعر، نزولی	مقعر، نزولی

مثلاً، فرض می‌کنیم بخواهیم از گزارهٔ مربوط به f، در سطر اول، به گزارهٔ مربوط به g برسیم. فرض می‌کنیم: $x_1=g(y_1)$ و $x_2=g(y_2)$، بنابراین $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$. بنابر نابرابری اصلی (۱) داریم:

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)=q_1y_1+q_2y_2$$

و چون، بنابر قضیهٔ مربوط به تابع‌های معکوس [۸۳]، تابع $g(y)$ هم صعودی است، بنابراین

$$g(q_1y_1+q_2y_2)\geqslant g(f(q_1x_1+q_2x_2))=q_1\cdot g(y_1)+q_2\cdot g(y_2)$$

که تقعر تابع g را ثابت می‌کند [(1a) را ببینید]*.

۵°. تابع $f(x)$، مخالف مقدار ثابت و محدب در بازهٔ $\mathfrak{D}$، در درون این بازه، نمی‌تواند به حداکثر مقدار خود برسد.

با برهان خُلف ثابت می‌کنیم. اگر تابع به حداکثر مقدار خود، در نقطهٔ x_0 در درون بازه، برسد، چون تابع مخالف مقدار ثابت است، در این صورت، چنین نقطه‌ای را می‌توان در بازهٔ (x_1, x_2) محصور کرد:

$$x_1<x_0<x_2$$

تا دست‌کم دریکی از دو انتها، مقدار $f(x)$ کوچکتر از مقدار آن در نقطهٔ x_0 باشد. فرض کنیم:

$$f(x_1)<f(x_0),\ f(x_2)\leqslant f(x_0)$$

با فرض $x_0=q_1x_1+q_2x_2$، دوطرف نابرابری اول را در q_1 و دوطرف نابرابری دوم را در q_2 ضرب و، سپس، باهم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$q_1f(x_1)+q_2f(x_2)<f(x_0)=f(q_1x_1+q_2x_2)$$

و این، فرض تحدب f را، نقض می‌کند. حکم ثابت شد.

۶°. اگر بازهٔ $[x_1, x_2]$، که در آن $x_1<x_2$ است، در بازهٔ $\mathfrak{D}$ واقع باشد، که در آن‌جا، تابع $f(x)$ محدب است، در آن‌صورت، رابطه (۱)، یا همواره باعلامت تساوی و یا همواره با علامت نابرابری، برقرار است.

این مطلب را، باتوجه به نشانه گذاری‌های شکل (۷۱)، می‌توان به طور هندسی، چنین بیان کرد: کمان A_1A_2، یا به طور کامل بر وتر A_1A_2 منطبق می‌شود و یا (جز در دو انتها) به‌طور کامل، در زیر وتر قرار می‌گیرد.

برای اثبات، تابع خطی(۳) را در نظر می‌گیریم، که در نقطه‌های x_1 و x_2، همان مقدارهای $f(x)$ را، اختیار می‌کند. برای سادگی، این تابع را $l(x)$ می‌نامیم. تفاضل

$$\varphi(x)=f(x)-l(x)=f(x)+[-l(x)]$$

با توجه به تحدب تابع‌های f و $-l$، یک تابع محدب است [۲°]. در نتیجه، در بازهٔ

*) همهٔ حالت‌هایی که در جدول آورده‌ایم، از روی شکل روشن است.

$[x_1, x_2]$، یا $\varphi(x)$ متحد صفر است و یا متحد باصفر نیست. در حالت اول، در این بازه داریم $f(x) \equiv l(x)$، یعنی کمان بروتر منطبق است و رابطهٔ (۱)، همواره باعلامت تساوی برقرار است. در حالت دوم، باید در تمامی بازهٔ (x_1, x_2) داشته باشیم $\varphi(x) < 0$، زیرا اگر تابع φ در این بازه، مقداری نامنفی را اختیارکند، درآن صورت، دربازهٔ $[x_1, x_2]$ به‌حداکثر مقدار خود، دریك نقطهٔ درونی آن، می‌رسد، که برای تابع محدب مخالف صفر، ممکن نیست [۵°]. یعنی، در این بازه داریم $f(x) < l(x)$ و منحنی زیر وتر قرار دارد و رابطهٔ (۱)، همواره با علامت نابرابری برقرار است.

اگر درهـر بازهٔ دلخواه $[x_1, x_2]$ـ که در آن $x_1 < x_2$ داخل $\mathfrak{D}$ استـرابطهٔ (۱) تنها باعلامت نابرابری برقرار باشد، تابع $f(x)$ را محدب اکید می‌نامیم. به همین ترتیب می‌توان تابع مقعر اکید را هم‌تعریف کرد. این نام‌گذاری‌ها را، درمورد منحنی $y = f(x)$ هم می‌توان به‌کار برد.

۱۴۳. شرط‌های تحدب تابع. باتوجه‌به (۲) و(۲a)، نابرابری اصلی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

و یا به صورت متقارن‌تر

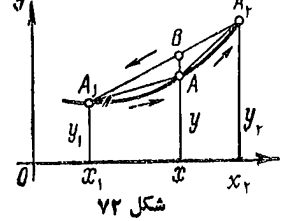
$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_1) \geqslant 0 \qquad (۴)$$

بالاخره، این شرط را، به‌کمك دترمینان هم، می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0 \qquad (۵)$$

در همهٔ حالت‌ها فرض می‌شود که x بین x_1 و x_2 قرار دارد و، برای مشخص‌بودن وضع $x_1 < x_2$ می‌گیریم.

ملاحظه می‌شود که، اگر شرط تحدب تـابع را به‌صورت (۵) بنویسیم، می‌تـوان مستقیماً، تعبیر هندسی آن‌را پیدا کرد. تنها باید به‌یادآورد که این دترمینان، معرف دوبرابر مساحت مثلث $A_1 A A_2$ با علامت مثبت است (شکل ۷۲)، به شرطی کـه مثلث را در جهت مثبت (خلاف جهت حـرکت عقربه‌های ساعـت) بگیریـم، یعنی محیـط آن به صورت $A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2$ توجیه شده باشد.



شکل ۷۲

به‌خصوص یادآوری می‌کنیم که، اگرصحبت برسرتحدب

اکید باشد، باید در همهٔ این شرطها، علامت تساوی را حذف کنیم.

ساده‌تر از هر راه، دیگری، به کمك مشتق‌های تابع، می‌توان تحدب آن را مورد تحقیق قرار داد.

قضیهٔ ۱. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، معین، پیوسته و دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد، برای آن که $f(x)$ در بازهٔ $\mathfrak{D}$ محدب باشد، لازم و کافی است که مشتق آن $f'(x)$ صعودی (به مفهوم وسیع خود) باشد.

شرط لازم است. اگر $f(x)$ محدب باشد، با فرض $x_1<x<x_2$، شرط (۴) را به این‌صورت می‌نویسیم:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{۶}$$

اگر x را به‌سمت x_1 یا به‌سمت x_2 میل دهیم، در حد، به ترتیب داریم*:

$$f'(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{۷a}$$

$$f'(x_2)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{۷b}$$

از آن‌جا $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$ و، بنابراین، تابع $f'(x)$ صعودی است (به‌مفهوم وسیع خود).

شرط کافی است. حالا فرض می‌کنیم که شرط اخیر برقرار باشد. برای اثبات نابرابری (۶)، در مورد هر کدام از بخش‌های آن، دستور نموهای محدود [۱۱۲] را به‌کار می‌بریم:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1),\quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2)$$

ضمناً $x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2$ و چون به‌فرض $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$، بنابراین، رابطهٔ (۶) برقرار است، و از آن، می‌توان نابرابری (۴) را، که شرط تحدب تابع $f(x)$ است، نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۲. اگر تابع $f(x)$، همراه با مشتق خود $f'(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، معین و پیوسته، و در درون آن دارای مشتق مرتبهٔ دوم متناهی $f''(x)$ باشد. برای تحدب تابع $f(x)$ در $\mathfrak{D}$، لازم و کافی است که در درون $\mathfrak{D}$ داشته باشیم:

$$f''(x)\geqslant 0 \tag{۸}$$

---

*) یادآوری می‌کنیم که برای نتیجه‌گیری (۷a) و (۷b)، تنها از وجود مشتق، به‌ترتیب، در نقطه‌های x_1 و x_2، استفاده شده است.

با توجه به‌قضیهٔ قبل، کافی است قضیهٔ۲ شمارهٔ **۱۳۲** را، برای تابع $f(x)$، به‌کار بریم. برای حالت تقعر تابع هم، می‌توان به طریق مشابهی نتیجه گرفت:

$$f''(x)\leqslant 0 \qquad (8^*)$$

به‌این ترتیب، شرط

$$f''(x)>0 (<0) \qquad (9)$$

به معنای تحدب (تقعر) اکید تابع است، زیرا امکان خطی‌بودن تابع را، در هر بازه‌ای از بین می‌برد [**۱۴۲**، ۶°].

حالا دیگر به‌سادگی می‌توانیم، دربارهٔ تحدب بسیاری از تابع‌ها داوری کنیم:

۱) تابع a^x $(a>0, a\neq 1)$ در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ محدب است، زیرا

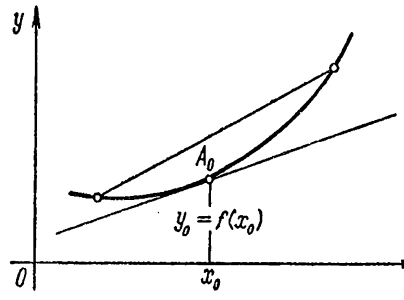
$$(a^x)''=a^x(\ln a)^2>0$$

۲) تابع $\ln x$ در بازهٔ $(0, +\infty)$ مقعر است زیرا [با **۱۴۲**، ۴° مقایسه کنید]:

$$(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}<0$$

۳) برای تابع $x\ln x$ (در همان بازه)، مشتق دوم $\frac{1}{x}>0$ و تابع محدب است.

۴) برای تابع x^r (در همان بازه)، مشتق دوم برابر است با $r(r-1)x^{r-2}$ و، بنابراین، به‌ازای $r>1$ و $r<0$ محدب و به‌ازای $0<r<1$ مقعر است*. و غیره.



شکل ۷۳

درهمهٔ این‌مثال‌ها، در واقع، تحدب یا تقعر اکید وجود داشت.

در خاتمه، ویژگی مهم هندسی دیگری از تابع محدب $f(x)$ را نشان می‌دهیم. برای این‌منظور، به‌جای ترمنحنی تابع $y=f(x)$، که در شمارهٔ **۱۴۱** در نظر گرفتیم، در این‌جا، مماس در نقطهٔ دلخواه منحنی را در نظر می‌گیریم (شکل ۷۳).

*) همین مثال نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب دوتابع محدب، ممکن است محدب نباشد. مثلاً تابع $-x^{\frac{1}{3}}$ محدب است، در حالی که مجذور آن، یعنی تابع $x^{\frac{2}{3}}$، مقعر است.

قضیهٔ ۳. اگر تابع $f(x)$، معین و پیوسته در بازهٔ $\mathfrak{D}$ و، در همین بازه، دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد، برای تحدب تابع $f(x)$ لازم و کافی است که نمودارآن، برای همهٔ نقطه‌هایش، بالای مماس برهرنقطهٔ دلخواه آن، و یا منطبق براین مماس، قرار گیرد.

شرط لازم است. مماس بر منحنی $y=f(x)$، در نقطهٔ $A_0(x_0\ ,\ f(x_0))$، دارای ضریب زاویهٔ $f'(x_0)$ است ومعادلهٔ مماس چنین است:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

لازم است نشان داده شود که تحدب تابع $f(x)$، برای نقطه‌های دلخواه x_0 و x از $\mathfrak{D}$، از نابرابری

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (10)$$

نتیجه می‌شود. این نابرابری، هم‌ارز دو نابرابری زیر است:

$$f(x_0)\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (x>x_0) \qquad (11a)$$

$$f(x_0)\geqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (x<x_0) \qquad (11b)$$

و این نابرابری‌ها، به‌ترتیب، همان نابرابری‌های (7a) و (7b) می‌شوندکه ضمن اثبات قضیهٔ ۱ (بافرض تحدب تابع) به‌دست‌آوردیم، به شرطی که در نابرابری اول $x=x_2$ و $x_1=x_0$ و در دومی $x_2=x_0$ و $x_1=x$ قرار دهیم.

شرط کافی است. حالا فرض می‌کنیم که نابرابری (10) و یا هم‌ارزهای آن(11a) و (11b) برقرار باشند؛ به‌کمک‌آن‌ها می‌توان (7a) و (7b) را ثابت‌کرد، که از آن جا، نتیجه‌می‌شود $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$. بنابراین، مشتق $f'(x)$، تابعی‌صعودی می‌شود و این‌نیز به‌نوبهٔ خود، به‌معنای تحدب تابع $f(x)$ است [قضیهٔ ۱].

یادداشت. توجه خوانندگان را به‌این‌نکته جلب‌می‌کنیم که، درواقع، لزوم نابرابری (10)، به‌ازای x_0 مفروض $x\neq x_0$ دلخواه، تنها باوجود مشتق $f'(x)$ در همان نقطهٔ x_0، ثابت شده است.

۱۴۴. نابرابری ینسن و کاربردآن. طبق تعریف‌تحدب‌تابع [رابطهٔ (1) را ببینید]، داریم:

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$
$$(q_1,\ q_2>0,\ q_1+q_2=1)$$

می‌توان ثابت کرد که، اگر تابع محدب باشد، نابرابری کلی‌تر موسوم به نابرابری ینسن (Jensen) نیز برقرار است.

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n) \quad (۱۲)$$
$$(q_1, q_2, \cdots, q_n>0,\ q_1+q_2+\cdots+q_n=1)$$

x_1، x_2، ...، x_n، مقدارهای دلخواهی از بازهٔ اصلی ℘ هستند.

همان‌طور که می‌دانیم، این نابرابری، به‌ازای $n=2$، درست است. حال، با فرض درستی آن برای عدد طبیعی دلخواه $n\geqslant 2$، درستی آن را برای $(n+1)$ ثابت می‌کنیم، یعنی با اختیار $(n+1)$ مقدار x_1، x_2، ...، x_n، x_{n+1} و n عدد مثبت q_1، ...، q_n، q_{n+1} به‌مجموع واحد، ثابت می‌کنیم:

$$f(q_1x_1+\cdots+q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1})\leqslant q_1f(x_1)+\cdots+q_nf(x_n)+$$
$$+q_{n+1}f(x_{n+1}) \quad (۱۳)$$

به این منظور، مجموع دو جملهٔ آخر سمت چپ نابرابری را، با جملهٔ

$$(q_n+q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n+\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right)$$

عوض می‌کنیم. این امر موجب می‌شود که بتوانیم از نابرابری (۱۲) استفاده کنیم و ثابت کنیم که عبارت سمت چپ (۱۳)، از مجموع زیر تجاوز نمی‌کند:

$$q_1f(x_1)+\cdots+(q_n+q_{n+1})f\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n+\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right)$$

و کافی‌است که برای مقدار تابع در جملهٔ آخر، نابرابری اصلی (۱) را به‌کار بریم، تا به (۱۳) برسیم. به این ترتیب، نابرابری (۱۲) را، با روش استقرای ریاضی، ثابت کردیم.

معمولاً، به‌جای ضریب‌های q_i، با مجموع واحد، عدد دلخواه p_i را در نظر می‌گیرند. با فرض

$$q_i=\frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}$$

در (۱۲)، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$f\left(\frac{\sum p_ix_i}{\sum p_i}\right)\leqslant\frac{\sum p_if(x_i)}{\sum p_i} \quad (۱۲^*)$$

و روشن است که درحالت تقعر تابع، باید علامت نابرابری را برعکس گذاشت.

با انتخاب $f(x)$های مختلف، می‌توان، از این‌جا، نابرابری‌های مهمی بدست‌آورد که، ضمناً، همگی آن‌ها دارای یك سرچشمه هستند. چند مثال می‌آوریم.

۱) اگر داشته باشیم $f(x)=x^k$ $(x>0$ و $k>1)$، با یك تابع محدب سروکار داریم و از آن‌جا

$$\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right)^k \leqslant \frac{\sum p_i x_i^k}{\sum p_i}$$

یا

$$(\sum p_i x_i)^k \leqslant (\sum p_i)^{k-1} \cdot \sum p_i x_i^k$$

که باجای‌گزین‌کردن p_i با $p_i^{\frac{k}{k-1}}$ و x_i با $\frac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$، به نابرابری معلوم کوشی ــ هولدر می‌رسیم:

$$\sum a_i b_i \leqslant (\sum a_i^k)^{\frac{1}{k}} \cdot (\sum b_i^{\frac{k}{k-1}})^{\frac{k-1}{k}}$$

[با ۱۳۳، (۵) مقایسه کنید].

۲) با فرض $f(x)=\ln x$، که در آن $x>0$ (تابع مقعر)، داریم:

$$\frac{\sum p_i \ln x_i}{\sum p_i} \leqslant \ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$$

که با آنتی‌لگاریتم گرفتن، به نابرابری معلوم زیر می‌رسیم*:

$$(\prod x_i^{p_i})^{\frac{1}{\sum p_i}} \leqslant \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$$

[با ۱۳۳، (۴) مقایسه کنید].

۳) بالاخره $f(x)=x\ln x$ $(x>0)$ را انتخاب می‌کنیم (تابع محدب). داریم:

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leqslant \frac{\sum p_i x_i \ln x_i}{\sum p_i}$$

با ضرب دو طرف در $\sum p_i$ و گرفتن آنتی‌لگاریتم، نابرابری زیر به دست می‌آید:

*) همان‌طور که Σ علامت مجموع است، Π به‌معنای حاصل‌ضرب است.

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leqslant (\prod x_i^{p_i x_i})^{\frac{1}{\sum p_i x_i}}$$

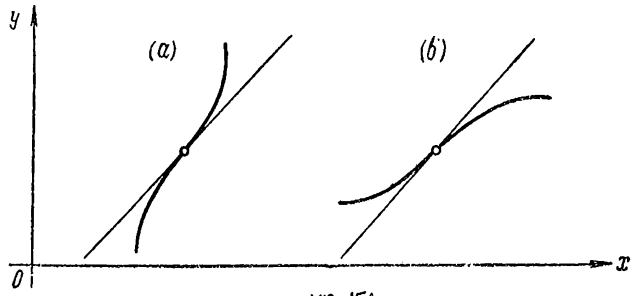
که درحالت خاص، $p_i = \frac{1}{x_i}$، خواهیم داشت:

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod x_i}$$

اگر مفهوم واسطهٔ توافقی را، برای حالت چند عدد، تعمیم دهیم، آن وقت نابرابری فوق را می‌توان، به‌این صورت، تنظیم کرد: واسطهٔ توافقی چند عدد، از واسطهٔ هندسی آن‌ها، تجاوز نمی‌کند.

۱۴۵. نقطهٔ عطف. برای رسم نمودار تابع (که در بند بعد به‌آن می‌پردازیم)، نقطهٔ عطف تابع $y = f(x)$، اهمیت خاصی دارد.

نقطهٔ $M(x_0, f(x_0))$ منحنی را، نقطهٔ عطف آن گویند، به شرطی که این نقطه قسمتی ازمنحنی‌راکه محدب است(محدب به‌طرف پائین)، از قسمتی‌که مقعراست (محدب به طرف بالا) جدا کند (شکل ۷۴).



شکل ۷۴

اگرفرض کنیم که $f(x)$، دربازهٔ موردنظر، دارای مشتق‌متناهی باشد، درآن‌صورت، این مشتق، بنا به قضیهٔ ۲، درهمسایگی سمت چپ x_0 $[x_0 - \delta, x_0]$، صعودی و درهمسایگی سمت‌راست x_0 $[(x_0, x_0 + \gamma)]$ نزولی‌است ویا برعکس. درحالت اول، $f'(x)$، به‌ازای $x = x_0$، دارای‌ماکزیمم ودرحالت‌دوم، دارای می‌نیمم است. اگرفرض کنیم که مشتق دوم $f''(x)$، دست کم برای نقطهٔ $x = x_0$، وجود داشته باشد، در آن صورت، لازم است که $f''(x_0) = 0$ باشد [با **۱۳۴** مقایسه کنید].

شرط $f''(x_0) = 0$ همان نقشی را، در مورد نقطهٔ عطف، بـه عهده دارد کـه شرط

$f'(x_0)=0$ درمورد تعیین اکسترمم تابع $f(x)$ برعهده داشت، این شرط، لازم است، ولی کافی نیست و ما آن‌را، ضمن مثال، روشن می‌کنیم.

اگر $f(x)=x^4$، آن‌گاه در بازهٔ $(-\infty$ و $+\infty)$ داریم: $f''(x)=12x^2>0$ و، بنابراین، بنابر قضیهٔ ۲، تابع $f(x)$ در سراسر این بازه محدب است، هرچند $f''(x)$، در نقطهٔ $x=0$، برابر صفر می‌شود.

اگرمشتق دوم $f''(x)$، در همه‌جا دردرون بازهٔ مورد نظر، وجود داشته باشد، در آن صورت، طول نقطهٔ عطف را باید بین ریشه‌های این مشتق دوم‌جست‌جو کرد. ولی هرریشهٔ x_0، مستلزم بررسی جداگانه است. اگر درهمسایگی‌های $[x_0-\delta, x_0)$ و $(x_0, x_0+\delta]$ در سمت‌چپ وسمت‌راست x_0، مشتق دوم $f''(x)$، به‌طورجداگانه، علامت معینی را حفظ کند، آن‌گاه، برای‌تشخیص وجود یاعدم وجود نقطهٔعطف، می‌توان ازاین‌قاعده استفاده‌کرد: اگر مشتق دوم $f''(x)$، ضمن عبور از مقدار $x=x_0$، تغییر علامت بدهد، در آن‌صورت، نقطهٔ عطف وجود دارد، ولی اگرتغییر علامت ندهد، نقطهٔ عطف‌وجودنداردِ[با ۱۳۵ مقایسه‌کنید].

یادآوری می‌کنیم که، ضمناً، درقسمتهایی ازمنحنی‌که به‌وسیلهٔ نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$، ازهم جدا شده‌اند، باید تحدب یك طرف و تقعر طرف دیگر، اکید باشد.

به‌عنوان‌مثال، تابع $y=\sin x$ را در نظرمی گیریم که، درمورد آن، $f''(x)=-\sin x$، در نقطه‌های $x=k\pi$ (k، عددی است درست) برابر صفر می‌شود و در هرکدام از این نقطه‌ها‌هم، تغییرعلامت‌می‌دهد. درنتیجه، همهٔ‌نقطه‌های سینوسوئید واقع برمحور x، نقطه‌های عطف هستند. به سادگی دیده می‌شود‌که سینوسوئید در بازه‌های نظیر $(2m\pi-\pi, 2m\pi)$ محدب (گودی یا تقعر به طرف پایین)، و در بازه‌های نظیر $(2m\pi, 2m\pi+\pi)$ مقعر (برآمدگی یا تحدب به طرف بالا) می‌باشد.

همان‌طورکه درشمارهٔ ۱۳۸ درمورد تعیین اکسترمم‌ها دیدیم، دراین‌جا هم می‌توان، برای بررسی نقطهٔ x_0، که برای‌آن $f''(x_0)=0$است، ازمشتق‌های مرتبهٔ بالاتر هم استفاده کرد. ازاین‌راه، قاعدهٔ زیربه‌دست می‌آید: اگرنخستین مشتق (بعد ازمرتبهٔدوم) مخالف‌صفر در نقطهٔ x_0، از مرتبهٔ فرد باشد، در آن صورت، نقطهٔ عطف وجود دارد و اگر این مشتق از مرتبهٔ زوج باشد، نقطهٔ عطف وجود ندارد.

در خاتمه، ویژگی مهم منحنی $y=f(x)$ را، نسبت به مماس بر آن در نقطهٔ عطف (درصورت وجود چنین مماسی)، نشان می‌دهیم: درنقطهٔ عطف، منحنی ازیك طرف‌مماس، به‌طرف دیگرآن عبور می‌کند، یعنی منحنی و مماس، یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل۷۴ را ببینید).

اگر مماس قائم باشد، این چگونگی روشن است (شکل ۴۳، (a) و(b) را ببینید).

به‌حالت‌مماس افقی یامایل می‌پردازیم. فرض می‌کنیم،مشتق متناهی $f'(x)$وجود دارد.برای روشنی مطلب، فرض می‌کنیم که تابع، در نقطه‌های سمت چپ نقطهٔ عطف، به ازای $x_0-\delta\leqslant x<x_0$ محدب، و در نقطه‌های سمت راست آن به‌ازای $x_0<x\leqslant x_0+\delta$ مقعر باشد (نظیر شکل ۷۴–b). دراین‌حالت ثابت‌می‌کنیم که، برای $x<x_0$، منحنی در بالای مماس (یا روی آن) و برای $x>x_0$، منحنی در زیر مماس (یا روی‌آن) قرار دارد، یعنی

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (x<x_0)$$
$$f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (x>x_0)$$

ازاین نابرابری‌ها، اولی بر نابرابری (۱۰)، **۱۴۳** منطبق است (یادداشت‌آن‌جا را هم، باید درنظر داشت)؛ و دومی، شبیه نابرابری (۱۰) برای تابع مقعر است.

یادداشت. اغلب، این ویژگی منحنی، برای نقطهٔ‌عطف به‌کار می‌رود؛ ولی این‌تعریف با تعریفی که قبلاً از نقطهٔ عطف کردیم، به‌هیچ وجه هم ارز نیست. ممکن است، منحنی در نقطهٔ عطف، اصلاً دارای مماس نباشد و، در نتیجه، تعریف دوم بی‌معنی بشود. عکس‌آن‌هم ممکن است پیش‌آید: منحنی، مماس را در نقطه‌ای قطع‌کند که قسمت محدب را از قسمت مقعر جدا نکند و در نتیجه، تعریف اول در موردآن قابل تطبیق نباشد. (شکل ۴۳، (c) و (d) را ببینید). ولی جالب‌تر از همه، منحنی

$$\begin{cases} y=x^5\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right) & (x\neq 0)\\ y=0 & (x=0)\end{cases}$$

است،که درمبداء مختصات، برمحور x مماس می‌شود وآن را قطع می‌کند.دراین‌جا، مشتق دوم پیوسته نیز وجود دارد، ولی این مشتق، در نزدیکی $x=0$، چه در سمت چپ و چه در سمت راست، بی‌نهایت بار، تغییر علامت می‌دهد.

§۳۰. رسم نمودار تابع‌ها

۱۴۶. طرح مسأله. با توجه به‌این‌که با سلاح محاسبهٔ دیفرانسیلی، مجهز شده‌ایم، به موضوع‌رسم نمودارتابع‌ها برمی‌گردیم [با **۴۷** مقایسه‌کنید]. درابتدا، فرض می‌کنیم که با تابع پیوسته $y=f(x)$، در بازهٔ متناهی $[a;b]$، سروکارداشته‌باشیم. ضمناً آن‌چه دراین‌جا برای ما در درجهٔ اول اهمیت است، این است‌که، تا آن‌جا که ممکن است، حقیقت‌رفتار خود تابع را بادقت روشن‌کنیم، دقت‌درعرض‌های جداگانه را، در درجهٔ کمتری‌ازاهمیت قرارمی‌دهیم.

روشی را که تا این جا می‌دانیم، یعنی روش نقطه‌یابی [۴۷]، براساس انتخاب تصادفی نقطه‌ها و بدون ارتباط با ویژگی‌های خود منحنی، قرار دارد. در این روش، تنها باید تعداد زیادی مختصات را محاسبه کرد و، به خصوص، به خاطر تصادفی بودن عرض‌های محاسبه‌شده، هرگز ما را به هدف موردنظر نمی‌رساند. به‌همین مناسبت‌ها، این روش، به‌هیچ‌وجه، روش مناسبی نیست.

حالا فرض می‌کنیم، تابع $y=f(x)$، به‌طور کلی، دارای مشتق متناهی $y'=f'(x)$ باشد؛ می‌تواند، استثنائاً، در تعداد محدودی از نقطه‌های جداگانه، مشتق برابر با بی‌نهایت شود، که البته، در آن‌جا هم، علامتی معین، یا علامت‌هایی متفاوت در سمت راست و سمت چپ داشته باشد. در چنین صورتی، روش‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی، این امکان را به‌وجود می‌آورند که به‌چند نقطه، به‌عنوان «تکیه‌گاه»، که به‌خصوص، مشخص‌کنندهٔ نمودار تابع مفروض هستند، دست یابیم و به‌کمک آن‌ها، منحنی را با دقت کافی رسم کنیم.

در این‌جا، بیش از همه، به نقطه‌های پیچ نمودار، یعنی راس برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌ها، که متناظر با مقدار اکسترمم‌های تابع است [۱۳۴–۱۳۸] توجه داریم. ولی، همهٔ نقطه‌هایی را که، در آن‌جا، مماس افقی یا قائم داریم، باید به‌آن‌ها افزود. روشن است که به‌انتهاهای نمودار هم، باید توجه داشت.

اگر همین نقطه‌ها را روی شکل، داشته باشیم (که معمولاً، تعداد آن‌ها، زیاد نیست)، برای رسم نمودار کفایت می‌کنند: نموداری که به‌این ترتیب به‌دست آید، روند تغییر تابع را، کاملاً منعکس می‌کند و، با دقت، بازه‌های صعود و نزول و، همچنین، نقطه‌هایی را که در آن‌ها، سرعت تغییر تابع به‌سمت صفر میل می‌کند ($y'=0$) و یا تا بی‌نهایت پیش می‌رود ($y'=\pm\infty$)، مشخص می‌سازد.

اگر تحدب و تقعر بخش‌های مختلف نمودار و نقطه‌های مرزی آن‌ها، یعنی نقطه‌های عطف [۱۴۳، ۱۴۵] را، به‌حساب آوریم، آن‌وقت می‌توانیم به‌دقت بیشتری، در رسم نمودار برسیم.

۱۴۷. شمای رسم نمودار. مثال‌ها. فرض کنیم، تابع $y=f(x)$، در بازهٔ موردنظر $[a,b]$، دوبار مشتق‌پذیر باشد، به‌استثنای چند نقطهٔ جداگانه، که در آن‌ها، مشتق $y'=f'(x)$ بی‌نهایت می‌شود و دارای علامتی معین در هردو طرف یا علامت‌های مختلف در سمت چپ و راست باشد. در این صورت، برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$، باید این کارها را انجام داد:

۱) تعیین مقدارهایی از x که، به‌ازای آن‌ها، مشتق $y'=f'(x)$ برابر صفر یا بی‌نهایت می‌شود و تشخیص نقطه‌های اکسترمم در بین آن‌ها؛

۲) تعیین مقدارهایی از x که، به‌ازای آن‌ها، مشتق دوم $y''=f''(x)$ برابر صفر

می‌شود و بررسی و تشخیص نقطه‌های عطف؛

۳) محاسبهٔ مقدارهای خود تابع $y=f(x)$ درهمهٔ این نقطه‌ها و، همچنین، در دو انتهای a و b، بازهٔ نظیر.

آن چه به‌دست آمده است، می‌توان در جدولی منظم کرد (مثال ۱ را ببینید) و ویژگی هر نقطه را یادداشت کرد: ماکزیمم و می‌نیمم، $y'=0$، $y'=+\infty$ یا $-\infty$، $y'=\pm\infty$*، $y'=\mp\infty$، عطف.

گاهی، نقطه‌های دیگری از نمودار را هم، به‌دلخواه، به‌این نقطه‌ها اضافه می‌کنند، مثل نقطه‌های مشترک نمودار با محورهای مختصات.

بعد از گذاشتن این نقطه‌ها در روی شکل، خود نمودار را، با توجه به ویژگی‌های نقطه‌ها، از آن‌ها می‌گذرانیم.

روشن است که ما به‌حالت‌های عادی نظر داریم، یعنی حالت‌هایی که، در آن‌ها، مشتق اول به‌سمت صفر (یا $\pm\infty$) و مشتق دوم به‌سمت صفر، تنها در تعداد محدودی از نقطه‌ها میل می‌کنند. در این صورت، در هر کدام از بازه‌هایی که به‌دست می‌آید، نمودار، یا به‌طرف بالا می‌رود و یا به‌طرف پایین، یا محدب است و یا مقعر.

اگر مقدار تابع، با تبدیل x به $x-$ تغییر نکند (تابع زوج)، رسم نمودار ساده‌تر می‌شود. در این حالت، نمودار نسبت به‌محور قائم، متقارن است. همچنین، اگر با تبدیل x به $x-$، تابع مفروض به‌قرینهٔ خودش تبدیل شود، به‌معنای آن است که نمودار آن، نسبت به‌مبداء مختصات متقارن است (تابع فرد).

چند مثال. ۱) در شمارهٔ ۱۳۶، ۲)، رفتار تابع

$$y=\sin^{۳}x+\cos^{۳}x$$

را مورد بررسی قراردادیم. به کمک مشتق، مقدارهایی از x، که تابع را به اکسترمم می‌رساند، مشخص کردیم و، همچنین، خود مقدارهای اکسترمم تابع را به‌دست آوردیم. ضمناً، با توجه به تناوب تابع، تغییر x را، به‌بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ محدود کردیم. نمودار تابع هم، درهمین بازه رسم شد.

حالا، ریشه‌های مشتق دوم را محاسبه می‌کنیم. اگر آن را به‌صورت

$$y''=\frac{۹}{۲}(\sin x+\cos x)\left(\sin ۲x-\frac{۲}{۳}\right)$$

---

*) منظور از $y'=\pm\infty$ این است که مشتق درسمت چپ $+\infty$ و درسمت راست $-\infty$ است و برای نشانهٔ $y'=\mp\infty$، برعکس آن.

درآوریم، به‌سادگی دیده‌می‌شود که عامل اول به‌ازای $x=\frac{3\pi}{4}\doteq 2/36$ و $x=\frac{7\pi}{4}\doteq 5/50$ و عامل دوم به‌ازای

$$x\doteq 0/36(21^\circ),\ 1/21(69^\circ),\ 3/51(201^\circ),\ 4/35(249^\circ)$$

برابر صفر می‌شوند و، در همهٔ این نقطه‌ها، علامت y'' عوض می‌شود و، بنابراین، نقطهٔ عطف وجود دارد.

جدول را تشکیل می‌دهیم

$x=0$	0/36	0/78	1/21	1/57	2/36	3/14
$y=1$	0/86	0/71	0/86	1	0	-1
$y'=0$ max	عطف	$y'=0$ min	عطف	$y'=0$ max	عطف	$y'=0$ min

$x=3/51$	3/94	4/35	4/71	5/50	6/28
$y=-0/86$	$-0/71$	0/86	-1	0	1
عطف	$y'=0$ max	عطف	$y'=0$ min	عطف	$y'=0$ max

از روی همین جدول بود که نمودار تابع را در شکل ۵۸، رسم کردیم.

یادداشت. باید توجه کرد که رسم شکل‌ها در کتاب، با توجه به‌مقیاس کوچك آن‌ها، نمی‌تواند همان دقت محاسبه را منعکس کند. به خواننده توصیه می‌کنیم، همین شکل‌ها را، با مقیاس بزرگتر، بازسازی کند.

۲) تابع $y=\sin x+\sin 2x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع، علاوه بر متناوب بودن، فرد هم می‌باشد و، این امر، امکان می‌دهد که بازهٔ تغییر x را به $[0, \pi]$ تقلیل دهیم. در این

بازه، مشتق

$$y' = \cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

به‌ازای $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$، یعنی $2/57(147^\circ)$، $x \doteq 0/94(54^\circ)$، برابر صفر می‌شود وچون، مشتق دوم

$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x(1 + 8\cos x)$$

به‌ازای مقدار اول منفی و به‌ازای مقدار دوم مثبت است، بنابراین، تابع درنقطهٔ اول ماکزیمم و در نقطه دوم می‌نیمم دارد.

خود مشتق دوم، وقتی برابر صفر می‌شود که یا $\sin x$، به ازای $x = 0$ و $x = \pi \doteq 3/14$، ویا عامل دوم، به‌ازای $x \doteq 1/70(97^\circ)$، برابرصفرباشد. درهمهٔ این حالت‌ها هم، علامت مشتق دوم عوض می‌شود (یعنی، این‌ها، نقطهٔ عطف‌اند).

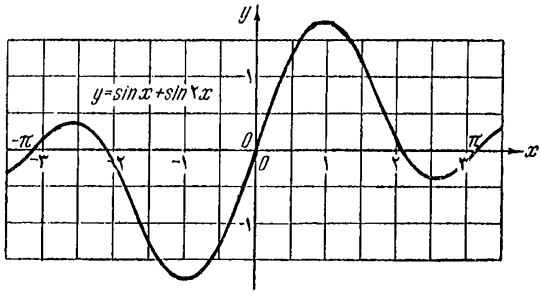
جدول:

$x = 0$	$0/94$	$1/70$	$2/09$	$2/57$	$3/14$
$y = 0$	$1/76$	$0/74$	0	$-0/37$	0
عطف	$y' = 0$ max	عطف		$y' = 0$ min	عطف

به مقدارهای قبلی، مقدار $x = \frac{2}{3}\pi \doteq 2/09(120^\circ)$ را اضافه کرده‌ایم. دراین نقطه $y = 0$ است (نمودار، محور x را دراین نقطه، قطع می‌کند). نمودار را، به‌کمك این نقطه‌ها، درشکل ۷۵ رسم کرده‌ایم.

بعد با پیداکردن قرینهٔشکلی نسبت به‌مبداء مختصات، نمودار را دربازهٔ $[0, -\pi]$ هم به‌دست آورده‌ایم (برای این‌کار، می‌توان شکل را، ابتدا دورمحور y و، سپس، دور محور x، تاکرد).

۱۴۸. ناپیوستگی‌های نامتناهی، بازهٔ نامتناهی. مجانب‌ها. از دو جهت، سعی می‌کنیم، گروه‌تابع‌های موردبررسی را، گسترش‌دهیم. درجهت اول، امکان بی‌نهایت شدن

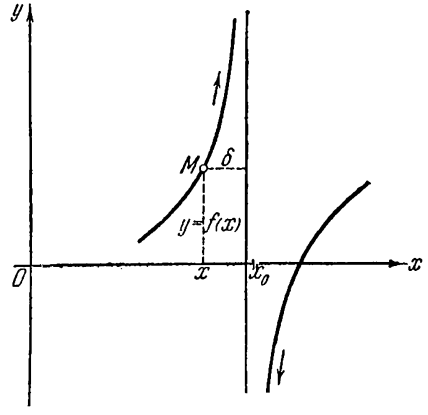


شکل ۷۵

تابع $y=f(x)$ را، برای بعضی ازمقدارهای جداگانهٔ x، درنظرمی گیریم، به‌این‌معنا که، اگر x_0 یکی از این نقطه‌ها باشد، با نزدیك شدن x به x_0، از این یا آن طرف، مقدار $f(x)$ به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.و درجهت دوم،رفتارتابع را، دریك‌بازهٔ‌نامتناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

چون اندازه‌های شکل، محدود است، درهردوحالت، به‌بخشی از کل نمودار، اکتفا می‌کنیم. درهربخش، کوشش می‌شود، قسمتی ازنمودار رسم شودکه، برای هرکسی، ادامهٔ آن، به‌سادگی، ممکن باشد.

به‌شرح حالت ناپیوستگی نامتناهی تابع ، مثلاً در نقطهٔ $x=x_0$، می‌پردازیم. وقتی که x، ازیك‌طرف x_0، به‌آن نزدیك می‌شود، تابع، وقتی به‌طور یکنوا، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند (با این یا آن علامت)، که ــ دست‌کم درقسمت محدودی از بازه ــ مشتق $y'=f'(x)$، به‌تعداد محدودی، تغییرعلامت بدهد. درطرف‌های مختلف x_0 (اگر x_0، یکی از دوانتهای بازه نباشد)، ممکن است تابع، دارای حدهای با علامت‌های متفاوت باشد. در همهٔ حالت‌ها، وقتی که منحنی به‌سمت بی‌نهایت می‌رود، دائماً به خط قائم $x=x_0$ (به‌طرف بالا یا پایین‌آن ــ بسته به‌علامت حدی بی‌نهایت)، نزدیك ونزدیك‌تر می‌شود، به نحوی‌که، به کمك این خط، می‌توان، وضع‌نمودار را درخارج‌ازمرزهای شکل، به‌خوبی‌تصورکرد (شکل ۷۶).



شکل ۷۶

از تابع‌هایی که نمودارمعلوم دارند،

می‌توان مثالهایی آورد: تابع $y=\frac{a}{x}$ به‌ازای $x=0$ (شکل ۱۰)، تابع $y=tgx$ به‌ازای $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (شکل ۱۶) وتابع $y=\log x$ به‌ازای $x=0$ (شکل ۱۴).

درحالتی‌که با بازهٔ نامتناهی (ازیك یا دوطرف) سروکار داریم، گاهی، خطی افقی یامایل وجود دارد، که نمودار، به‌آن، بی‌نهایت نزدیك می‌شود. به‌این‌علت، به‌تعریف کلی زیر نیاز داریم:

هرگاه منحنی‌ما، شاخه‌ای‌داشته باشدکه، دراین یاآن جهت، به‌سمت بی‌نهایت برود، اگرفاصلهٔ δ، ازیك نقطهٔ منحنی تا یك خط معین، با میل نقطه به‌سمت بی‌نهایت (دروی منحنی)، به‌سمت صفرمیل‌کند، درآن صورت، این خط را، مجانب منحنی گویند.

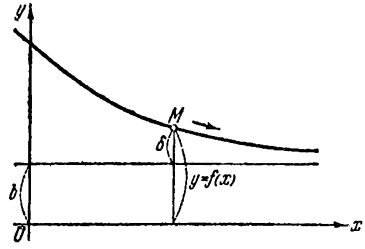
تاکنون، بامجانب قائم سروکارداشتیم؛ حالا، به‌مجانب افقی یا مایل، و درهرحال، برای منحنی به‌معادلهٔ $y=f(x)$، می‌پردازیم. قبلاً هم، با نمونه‌هایی ازمجانب‌های افقی، برخورد داشته‌ایم: منحنی $y=\frac{a}{x}$، خط $y=0$، به ازای $x\to\pm\infty$ (شکل ۱۰)، منحنی $y=\operatorname{arc}tgx$، خط‌های $y=\frac{\pi}{2}$ و $y=-\frac{\pi}{2}$، به ازای $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ (شکل ۲۱) و منحنی $y=a^x$، خط $y=0$، به‌ازای $x\to-\infty$ (با شرط $a>1$) و به‌ازای $x\to+\infty$ (با شرط $a<1$) (شکل ۱۳).

برای آن‌که، مثلاً به‌ازای $x\to+\infty$، خط $y=b$ مجانب منحنی $y=f(x)$ باشد، لازم و کافی است‌که (شکل ۷۷) داشته باشیم:

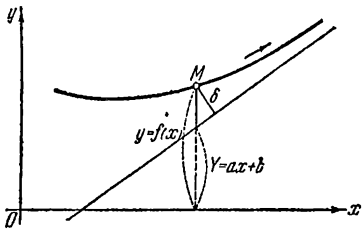
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to+\infty}y=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to+\infty}|y-b|=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\delta=0$$

به این ترتیب، مسألهٔ مجانب افقی، به‌سادگی، منجر به مسألهٔ این حد می‌شود.



شکل ۷۷



شکل ۷۸

چنین حدی را، به‌ازای $x \to -\infty$، باید به‌طور جداگانه محاسبه کرد، زیرا ممکن است (مثل حالت منحنی $y = \operatorname{arctg} x$)، در این حالت، مجانب دیگری به‌دست آید.

درمورد مجانب‌مایل، باید بگوئیم که، مثال‌های آن، ازهندسهٔ تحلیلی، برای‌خواننده روشن است: مجانب‌های $y = \pm\frac{b}{a}x$، برای هذلولی به‌معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یا} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (1)$$

(شکل ۷ را هم ببینید).

حالا، فرض می‌کنیم که منحنی $y = f(x)$، دارای مجانب مایل

$$Y = ax + b \qquad (2)$$

باشد (شکل ۷۸)، که مثلاً، درجهت مثبت محور Ox قراردارد. چون تفاضل $|y - Y|$، تنها دریك ضریب ثابت (برابر با کسینوس زاویهٔ بین مجانب ومحور x)، با فاصلهٔ δ فرق دارد، بنابراین وقتی $x \to +\infty$، این تفاضل نیزهمراه با δ، به‌سمت صفرمیل می‌کند:

$$\lim_{x \to +\infty}(y - ax - b) = 0 \qquad (3)$$

که با تقسیم بر x، داریم:

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{y}{x} = a \qquad (4)$$

علاوه بر آن، از (۳) مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to +\infty}(y - ax) = b \qquad (5)$$

به‌این ترتیب، برای آن‌که خط (۲)، مجانب‌منحنی مفروض باشد، لازم است‌که شرط‌های (۴) و (۵) برقرارباشد و، بابحث‌معکوس، می‌توان کافی بودن شرط‌ها را هم، ثابت‌کرد. مساله، منجربه تعیین حدهای (۴) و (۵) می‌شودکه آن‌ها هم، ضریب‌های معادلهٔ خط (۲) را مشخص می‌کنند.

روشن است‌که برای حالتی‌که x به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند، باید همهٔ بررسی‌ها را، ازنوانجام داد.

به‌عنوان مثال، هذلولی (۱) را درنظرمی‌گیریم، با فرض $x \to +\infty$، داریم:

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\to\pm\frac{b}{a}$$

و سپس

$$y\mp\frac{b}{a}x=\pm\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=\mp\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\to 0$$

و به‌همان مجانب‌هایی که می‌شناختیم، می‌رسیم:

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

به‌مسألهٔ رفتار تابع برمی‌گردیم و به‌آن چه در ۱)، ۲) و ۳) آوردیم، نکته‌های لازم زیر را اضافه می‌کنیم:

۴) تعیین مقدار x، که تابع $y=f(x)$ را به‌بی‌نهایت می‌رساند، و رسم مجانب قائم نظیر آن؛

۵) تعیین مجانب افقی یا مایل نمودار (ضمناً، اگر بازه ازدوطرف نامتناهی باشد، به‌طور جداگانه برای $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$).

دوباره به‌مثال می‌پردازیم ودنبالهٔ مثال‌ها را ادامه می‌دهیم.

۱۴۹. چند مثال. ۳) به‌تابع

$$y=(x+2)^2\cdot(x-1)^3$$

برمی‌گردیم، که در ۱۳۶، ۱) اکستره‌مم‌های آن را معین کردیم: این تابع، درتمامی بازهٔ $-\infty<x<+\infty$ پیوسته است. وقتی $x\to\pm\infty$، نه‌تنها y، بلکه $\frac{y}{x}$ هم، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و، بنابراین، مجانب وجود ندارد.

مشتق مرتبهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$y''=2(x-1)(10x^2+16x+1)$$

این مشتق، درنقطه‌های $x=1$، $-0/57$، $-1/53$، صفرمی‌شود وتغییرعلامت می‌دهد. جدول را تشکیل می‌دهیم:

۱	۰	−۰/۰۷	−۰/۸	−۱/۵۳	$x=-۲$
۰	−۴	−۴/۵۶	−۸/۴۰	−۳/۵۸	$y=۰$
$y'=۰$ عطف			$y'=۰$ min	عطف	$y'=۰$ max

نمودار آن را، قبلاً درشکل ۵۷، رسم کرده‌ایم.

۴) اگرداشته باشیم:

$$y=x^{\frac{۲}{۳}}-(x^۲-۱)^{\frac{۱}{۳}}$$

[۱۳۶، ۳) را ببینید]. تابع، پیوستگی خود را، درتمامی بازهٔ $(+\infty\ ،-\infty)$ حفظ می‌کند. اگرتابع را به‌صورت

$$y=\frac{۱}{x^{\frac{۴}{۳}}+x^{\frac{۲}{۳}}(x^۲-۱)^{\frac{۱}{۳}}+(x^۲-۱)^{\frac{۲}{۳}}}$$

بنویسیم، به‌سادگی معلوم می‌شودکه به‌ازای $x\to\pm\infty$ داریم: $y=۰$. بنابراین، محور x (هم درسمت چپ وهم درسمت راست)، مجانب نمودارتابع است. مشتق دوم y''، ریشه ندارد ونقطهٔ عطف، تنها درنقطه‌هایی خواهد بودکه مشتق اول برابربی‌نهایت می‌شود. با توجه به‌زوج بودن تابع، محورعرض، محورتقارن منحنی است.

جدول:

$+\infty$	۱	۰/۷۱	۰	−۰/۷۱	−۱	$x=-\infty$
۰	۱	۱/۵۹	۱	۱/۵۹	۱	$y=۰$
	$y'=-\infty$	$y'=۰$ max	$y'=\pm\infty$ min	$y'=۰$ max	$y'=+\infty$	

نمودار را درشکل ۵۹ دیده‌اید.

۵) $y=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۱}$ [۱۳۷ را ببینید].

تابع در $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است و، روشن است که، وقتی $x\to\pm\infty$، داریم $y=۱$ حد، و، درنتیجه، مجانب افقی داریم. مشتق دوم

$$y''=-۱۰.\frac{(x+۱)(x^۲-۴x+۱)}{(x^۲+۱)^۳}$$

درنقطه‌های $x=-۱,۲\pm\sqrt{۳}\doteq ۲/۴۱, ۰/۲۷$، برابرصفرمی‌شود وتغییر علامت می‌دهد (عطف). جدول:

$x=-\infty$	-۱۰	-۵	-۱	$-۰/۴۱$ ۰	۰/۲۷	۲	۲/۴۱	۳	۳/۷۳	۵	۱۰	$+\infty$
$y=۱$	۱/۵۵	۲/۱۵	۶	۷/۰۴ ۶	۴/۴۰	۰	$-۰/۰۳$	۰	۰/۰۸	۰/۲۳	۰/۵۵	۱
			عطف	$y'=۰$ max	عطف		$y'=۰$ min		عطف			

نمودار را درشکل ۶۱ داده‌ایم. مقیاس کوچك، مانع دقیق بودن شکل، به‌خصوص در فاصلهٔ ۲ تا ۵ می‌شود و، به‌همین مناسبت، این بخش نمودار را، با مقیاس بزرگتری، به‌طورجداگانه هم، رسم کرده‌ایم.

به‌مثال‌های تازه‌ای می‌پردازیم:

۶) $y=\frac{(x-۱)^۳}{(x+۱)^۲}$.

تابع به‌ازای $x=-۱$، بی‌نهایت می‌شود $(-\infty)$. چون، به ازای $x\to\pm\infty$، داریم:

$$\frac{y}{x}\to ۱,\ y-x=\frac{-۵x^۲+۲x-۱}{(x+۱)^۲}\to -۵$$

بنابراین، $Y=x-۵$ مجانب منحنی تابع است.

مشتق‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{(x-۱)^۲.(x+۵)}{(x+۱)^۳},\qquad y''=\frac{۲۴(x-۱)}{(x+۱)^۴}$$

مشتق اول، به‌ازای $x=1$ (عطف) و $x=-5$ (ماکزیمم)، برابر صفر می‌شود. نقطهٔ عطف دیگری وجود ندارد از روی جدول

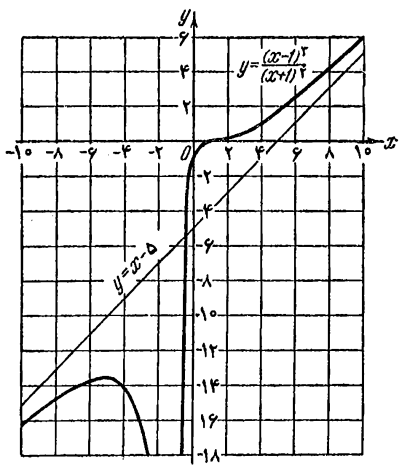
$x=-10$	-5	-3	-1	0	1	5	10
$y=-16/4$	$-13/5$	-16	$-\infty$	-1	0	$1/78$	$6/05$
	$y'=0$ max				$y'=0$ عطف		

و با توجه به مجانب‌ها، نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۷۹).

۷) $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ $(a>0)$.

تابع، تنها به‌ازای $x<0$ و $x>a$، مقدارهای حقیقی را اختیار می‌کند و، ضمناً، تابع، به ازای $x=a$، بی‌نهایت می‌شود. به‌فرض $x>a$، وقتی $x\to+\infty$، داریم:

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x}{x-a}}\to 1$$



شکل ۷۹

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}\to\frac{a}{2}$$

بنابراین، منحنی از طرف xهای مثبت، به مجانب $Y=x+\frac{a}{2}$ نزدیک می‌شود. به‌همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که، در جهت xهای منفی، مجانب $Y=-x-\frac{a}{2}$ وجود دارد.

مشتق

$$y' = \frac{1}{y}\cdot\frac{x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)}{(x-a)^2} = \left(x-\frac{3}{2}a\right)\sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}}$$

به ازای $x=\frac{3}{2}a$، با تغییرعلامت ازمنفی به‌مثبت، برابر صفر می‌شود (می‌نیمم). مشتق، به‌ازای $x=0$ هم، برابرصفرمی‌شود، ولی‌این‌نقطه، انتهای بازهٔ $(-\infty\,,0)$ است و، در آن‌جا، صحبت ازاکسترمم، نمی‌توان کرد.

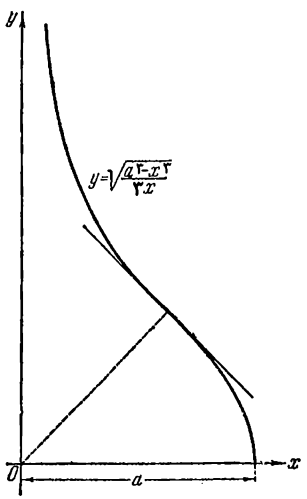
مشتق دوم

$$y'' = \frac{1}{y}\cdot\frac{\frac{3}{4}a^2x}{(x-a)^3}$$

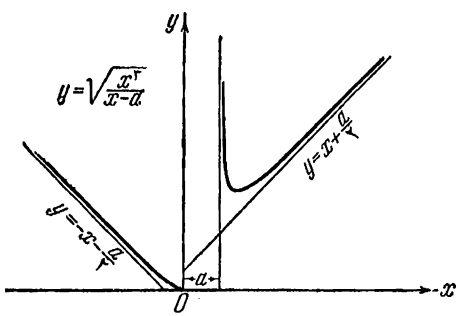
به‌ازای $x<0$ و $x>a$، مثبت است و، بنابراین، منحنی همواره محدب (به‌طرف پایین) است. بامحاسبهٔ عرض $y=2/60a$، نظیرنقطهٔ $x=\frac{3}{2}a$، داده‌های‌کافی برای رسم‌منحنی، دراختیارخواهیم داشت (شکل۸۰).

۸) $y=\sqrt{\frac{a^3-x^3}{3x}}$ $(a>0)$.

متغیرx، تنها دربازهٔ $[0\,,a]$ می‌تواند تغییرکند. تابع به‌ازای $x=0$، بی‌نهایت می‌شود.



شکل ۸۱



شکل ۸۰

مشتق

$$y' = -\frac{a^۳ + ۲x^۳}{۶x^۲y} = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

همیشه منفی است و، بنابراین، تابع نزول می‌کند. به‌ازای $x = a$ داریم: $y' = -\infty$.

مشتق دوم

$$y'' = \frac{۱}{۲}(y - xy')\left(\frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{y^۲}\right)$$

تنها به‌ازای $x = y = \frac{a}{\sqrt[۴]{۲}} \doteq ۰/۶۳a$ (عطف)، با تغییر علامت، برابر صفر می‌شود. ضمناً، روشن است که در این نقطه داریم $y' = -۱$. نمودار، در شکل ۸۱ داده شده است.

§۴. رفع ابهام

۱۵۰. ابهام به‌صورت $\frac{۰}{۰}$. حالا، از مفهوم مشتق و قضیه‌های اصلی که در بندهای ۳ و ۵ فصل قبل ثابت کردیم، برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم. قضیه‌هایی که در این‌جا می‌آوریم، به‌هوپیتال (G.F.de l'Hospitale) و برنولی (Joh.Bernoulli) تعلق دارند و قاعده‌ای که از آن‌ها ناشی می‌شود، معمولاً، به‌قاعدهٔ هوپیتال معروف است. ابتدا، به‌صورت اصلی ابهام، صورت $\frac{۰}{۰}$، می‌پردازیم، یعنی مسألهٔ حد نسبت دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را، که به‌سمت صفر میل می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهیم (برای روشن بودن وضع، وضع حدی را برای $x \to a$ می‌گیریم).

از قضیهٔ ساده‌ای آغاز می‌کنیم، که از خود مفهوم مشتق، استفاده می‌کند.

قضیهٔ ۱. هرگاه: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ معین باشند؛ ۲) داشته باشیم: $\lim_{x \to a} f(x) = ۰$ و $\lim_{x \to a} g(x) = ۰$؛ ۳) مشتق‌های متناهی $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته و ضمناً $g'(a) \neq ۰$ باشد. آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

اثبات. وجود مشتق‌های متناهی $f'(a)$ و $g'(a)$، پیوستگی تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را، در نقطهٔ a تأمین می‌کند. بنابر شرط ۲) داریم: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = ۰$ و

$g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0$، باتوجه به‌شرط $g'(a)\neq 0$ و، بنابر پیش قضیهٔ شمارهٔ ۱۰۹، برای مقدارهای x به‌قدرکافی نزدیك به a، $g'(x)\neq 0$ و، بنابراین، اگرخود را به‌همین مقدارها محدودکنیم، نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ دارای معنا می‌شود.

حالا، این نسبت را، به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

که اگرفرض‌کنیم $x\to a$، به‌همان نتیجهٔ موردنظر می‌رسیم.

چند مثال. ۱) مطلوب است حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$$

بنابرقضیهٔ ۱، حد این عبارت، برابر است با نسبت مشتق‌های صورت و مخرج، به ازای $x=0$:

$$\left.\frac{e_x+e^{-x}}{1-\dfrac{1}{e-x}}\right|_{x=0}=\frac{2}{1-\frac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}$$

۲) حد زیر را پیداکنید:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^{4}}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x^{3}}}$$

که برابراست با

$$\left.\frac{\dfrac{1-2x^{3}}{\sqrt{2x-x^{4}}}-\dfrac{1}{3\sqrt[4]{x^{2}}}}{-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}}\right|_{x=1}=\frac{16}{9}$$

درحالتی که داشته باشیم: $f'(a)=0$ و $g'(a)=0$، می‌توان قضیهٔ ۱ را، باتوجه

به‌مشتق مرتبه‌های بالاتر، تعمیم داد.

قضیهٔ ۲. هرگاه: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a,b]$ معین باشند؛ ۲) داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$؛ ۳) در بازهٔ $[a,b]$، مشتق‌های متناهی تا مرتبهٔ $(n-1)$ام $f'(x)$، $f''(x)$، ...، $f^{(n-1)}(x)$ و $g'(x)$، $g''(x)$، ...، $g^{(n-1)}(x)$ وجود داشته باشند؛ ۴) به‌ازای $x=a$، همهٔ این مشتق‌ها برابر صفر شوند؛ ۵) مشتق‌های متناهی $f^{(n)}(a)$ و $g^{(n)}(a)$ وجود داشته و، ضمناً، $g^{(n)}(a)\neq 0$ باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

اثبات. با استفاده از دستور تیلور با جملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو [**۱۲۴**، (۱۰a)]، برای هرکدام از تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ در بازهٔ $[a,x]$ $(a<x\leqslant x)$ ـ با توجه به شرط‌های ۲) و ۳) و ۴) ـ داریم:

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{n!}(x-a)^n$$

$$g(x)=\frac{g^{(n)}(a)+\beta}{n!}(x-a)^n$$

که در آن، به‌ازای $x\to a$، داریم: $\alpha\to 0$ و $\beta\to 0$.

رابطهٔ دوم، بنا به‌شرط $g^{(n)}(a)\neq 0$، نشان می‌دهد که $g(x)$، دست‌کم برای مقدارهای به‌قدر کافی نزدیک به a، مخالف صفر است. اگر به‌همین مقدارها اکتفا شود، در آن‌صورت، $\frac{f(x)}{g(x)}$، دارای معناست.

از برابری‌های قبل، مستقیماً، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{g^{(n)}(a)+\beta}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

مثال. ۳) مطلوب است تعیین حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$

در این جا، داریم:

$$f(x)=e^x-e^{-x}-2x,\ f(0)=0;\quad g(x)=x-\sin x,\ g(0)=0$$

$$f'(x)=e^x+e^{-x}-۲,\ f'(۰)=۰;\ g'(x)=۱-\cos x,\ g'(۰)=۰$$

$$f''(x)=e^x-e^{-x}\quad f''(۰)=۰;\quad g''(x)=\sin x,\quad g''(۰)=۰$$

$$f'''(x)=e^x+e^{-x},\ f'''(۰)=۲;\ g'''(x)=\cos x,\ g'''(۰)=۱$$

و درنتیجه، حد مطلوب، برابراست با ۲.

اگرچه، دراغلب موردها، همین قضیه‌ها، برای رفع ابهام در حالت $\frac{۰}{۰}$، کافی هستند، ولی در عمل استفادهٔ ازقضیهٔ زیر، راحت‌تراست.

قضیهٔ ۳. هرگاه: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، دربازهٔ $[a,b)$ معین باشند؛ ۲) $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$؛ ۳) دربازهٔ $[a,b)$، مشتق‌های متناهی $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته و، ضمناً داشته باشیم $g'(x)\neq ۰$؛ ۴) حد (متناهی یا نامتناهی) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ وجود داشته باشد؛ آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$$

اثبات. تعریف تابع‌های $f(x)$ و$g(x)$ را، با فرض صفرشدن آن‌ها به‌ازای $x=a$، تکمیل می‌کنیم: $f(a)=g(a)=۰$*، آن‌گاه، این تابع‌ها، دربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته می‌شوند ومقدارهای آن‌ها درنقطهٔ a، بامقدارهای حدی، به‌ازای $x\to a$ (با توجه به‌شرط ۲))، یکی می‌شوند. درسایر نقطه‌ها هم، پیوستگی، ناشی از وجود مشتق متناهی است (شرط ۳)). با به‌کاربردن قضیهٔ کوشی، داریم [۱۱۴]:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

که درآن داریم: $a<c<x$. این وضع که $g(x)\neq ۰$، یعنی $g(x)\neq g(a)$، نتیجه‌ای است ازفرض $g'(x)\neq ۰$، همان‌طورکه ضمن نتیجه گیری رابطهٔ کوشی، برقراربود.

وقتی که $x\to a$، روشن است که $c\to a$ و، بنابرشرط ۴)

---

*) البته، می‌شد از ابتدا، تابع را، به‌ازای $x=a$، معین و پیوسته فرض کرد؛ ولی بهتراست، شرط‌های قضیه را، به‌همان صورتی که در متن داده شده است، تنظیم‌کنیم (مثلاً. قضیهٔ ۳° را ببینید).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K$$

چیزی که اثبات آن را، لازم داشتیم.

به‌این‌ترتیب، این قضیه، حد نسبت دو تابع را، به‌حد نسبت مشتق‌های آن‌ها می‌کشاند و، اگر نسبت اخیر وجود داشته باشد، بسیار پیش می‌آید که تعیین حد نسبت مشتق‌ها، ساده‌تر است و با روش‌های مقدماتی، می‌توان آنرا به‌دست آورد.

مثال. ۴) حد زیر را پیدا کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-sinx}$$

نسبت مشتق‌ها را، می‌توان، پشت‌سرهم، ساده کرد:

$$\frac{\frac{1}{cos^2x}-1}{1-cosx}=\frac{1}{cos^2x}\cdot\frac{1-cos^2x}{1-cosx}=\frac{1+cosx}{cos^2x}$$

که، وقتی $x\to 0$، حدآن برابراست با ۲ و، طبق‌قضیهٔ ۳، حدمطلوب هم، همان ۲می‌باشد.

دراین مساله، نمی‌توانستیم ازقضیهٔ۱ استفاده کنیم، زیرا، به‌ازای $x=0$، مشتق‌های صورت ومخرج،هردو، برابر صفر می‌شوند. در نتیجه، لازم می‌شدکه ازقضیهٔ ۲ استفاده کنیم. هرچند به‌کمك قضیهٔ ۲ می‌توانستیم مساله را حل کنیم، ولی برای این‌منظور، ناچار بودیم، سه‌بار متوالی، ازصورت ومخرج مشتق بگیریم، وکار به‌تفصیل بیشتری می‌کشید.

دراین‌جا، درمورد مشتق ــ که به‌نوبهٔ خود به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است ــ از روش‌های مقدماتی‌استفاده کردیم، ولی‌درحالت‌هایی، ممکن‌است‌لازم باشدکه‌ازاین‌قضیه، دویاچندبار، استفاده شود. ولی، باید بر این نکته تاکیدکردکه در هر مرحله‌ای، باید از ساده‌کردن عبارت‌هایی که به‌دست‌می‌آیند ویا استفاده‌کردن ازحدهایی‌که برای ما معلوم است، استفاده کنیم (درحالی‌که اگر می‌خواستیم ازقضیهٔ ۲ استفاده‌کنیم، این عمل‌ها ممکن نبود). مثلاً، درمثال زیر، سه‌بار متوالی، ازقضیهٔ ۳ استفاده شده است. پس‌از بار اول، به e^x ساده کرده‌آیم و، بعدازبار دوم،ضریب e^x را درمخرج کنار گذاشته‌ایم(زیرا، این‌ضریب، به‌سمت ۱ میل می‌کند) و، طبیعی است‌که ازاین راه‌ها، کار محاسبه، خیلی ساده‌تر می‌شود.

مثال. ۵)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{2x}+x\cdot e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{2x}+e^{2x}+xe^x+e^x-4e^{2x}+2e^x}{3(e^x-1)^2\cdot e^x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x.e^x - 3e^x + 3 + x}{3(e^x-1)^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{2x.e^x + 2e^x - 3e^x + 1}{2(e^x-1).e^x} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x + 2x.e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{2x.e^x + e^x}{e^x} = \frac{1}{6}$$

۶) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} . \frac{x - (1+x).\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

چون عامل $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ به سمت e میل می‌کند، کافی است به عامل دوم بپردازیم. اگر دوبار از قضیهٔ ۳ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که حد آن، برابر است با $-\frac{1}{2}$.

جواب: $-\frac{e}{2}$.

قضیهٔ ۳ را، می‌توان به‌سادگی، برای حالتی هم که آوند x به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند $(x = \pm\infty)$، تعمیم داد (روشن است که از قضیهٔ ۱ و ۲ نمی‌توان استفاده کرد):

قضیهٔ ۳*. هرگاه: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ در بازهٔ $[c, +\infty]$، که در آن، $c > 0$ معین باشند؛ ۲) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$، ۳) در بازهٔ $[c, +\infty]$، مشتق‌های متناهی $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشد و، ضمناً، $g'(x) \neq 0$؛ ۴) حد (متناهی یا نامتناهی)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

اثبات. متغیر x را، با رابطهٔ $x = \frac{1}{t}$ و $t = \frac{1}{x}$، تبدیل می‌کنیم. وقتی $x \to +\infty$، داریم $t \to 0$ و برعکس. با توجه به شرط ۲) داریم: $\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ و $\lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ و بنابر ۴)

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K$$

در مورد تابع‌های $f\left(\frac{1}{t}\right)$ و $g\left(\frac{1}{t}\right)$، با متغیر جدید t، می‌توان قضیهٔ ۳ را به‌کار برد، که نتیجه می‌شود:

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K^*$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$$

یادداشت. گاهی برای رفع ابهام در حالت‌هایی که بحث کردیم، می‌توان بدون استفاده از این قضیه‌ها، و با به‌کارگرفتن بسط تابع از روی دستور تیلور [۱۲۴، ۱۲۵]، عمل کرد، فرض کنید $x\to 0$ (در این حالت، همیشه می‌توان به‌این راه متوسل شد). اگر موفق شویم، از راه این بسط، جزءهای اصلی صورت ومخرج را جدا کنیم:

$$f(x)=ax^n+o(x^n),\qquad g(x)=bx^m+o(x^m)$$

در آن‌صورت، حدکسر $\frac{f(x)}{g(x)}$، مستقیماً به‌دست می‌آید. این‌حد، برابراست با ۰ یا $\frac{a}{b}$ ویا $\pm\infty$، برحسب آن‌که n کوچکتر، برابر و یا بزرگتراز m باشد ** [۶۲، ۶۳].

مثلاً اگر در مثال ۱)، تابع‌های e^x، e^{-x} و $\ln(e-x)-1=\ln\left(1-\frac{x}{e}\right)$ را، با چند جملهٔ اول بسط آن‌ها، تعویض کنیم:

---

*) از تابع‌های $f\left(\frac{1}{t}\right)$ و $g\left(\frac{1}{t}\right)$، همچون تابع‌های مرکب، نسبت به t، مشتق گرفته‌ایم.

**) درحالت آخر، علامت بی‌نهایت را، از روی علامت‌های a و b وهمچنین (در صورت فرد بودن $m-n$)، از روی علامت x می‌توان مشخص کرد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\cdots)-(1-x+\cdots)}{\left(-\frac{x}{e}+\cdots\right)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\cdots}{\left(1-\frac{1}{e}\right)x+\cdots}=\frac{2e}{e-1}$$

و، به‌همین ترتیب، درمثال ۴)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-x}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\cdots}{\frac{x^3}{6}+\cdots}=2$$

پیشنهاد می‌کنیم که مثال‌های ۳) و ۵) را، به‌عنوان تمرین، باهمین روش، حل کنید.

۱۵۱. ابهام به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ به عبارت مبهم به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ می‌پردازیم، یعنی حدنسبت دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم که (وقتی $x\to a$)، به سمت $+\infty$ میل می‌کنند.

ثابت می‌کنیم که دراین‌حالت هم، می‌توان ازقاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد: قضیهٔ زیر، تغییر شکل ساده‌ای، ازقضیهٔ ۳ است.

قضیهٔ ۴. هرگاه: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، درباز‌هٔ $[a,b]$، معین باشند؛ ۲) $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$؛ ۳) درباز‌هٔ $[a,b]$، مشتق‌های متناهی $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته و، ضمناً، $g'(x)\neq 0$ باشد؛ ۴) حد (متناهی یا نامتناهی)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

وجود داشته باشد. آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$$

اثبات. ابتدا، حالتی را در نظر می‌گیریم که K متناهی باشد. چون مشتق $g'(x)$ صفر نیست، بنابرقضیهٔ داربو [۱۱۰]، علامت خود را حفظ می‌کند وتابع $g(x)$ به‌طور یکنوا، تغییر می‌کند [۱۳۲]. آن‌وقت، باتوجه به‌شرط ۲)، روشن است که $g'(x)<0$، و $g(x)$ با نزول x، به‌طور یکنوا به‌سمت $+\infty$ صعود می‌کند. می‌توان همیشه فرض کرد $g(x)>0$.

به‌ازای عدد دلخواه $\varepsilon>0$، باتوجه به‌شرط ۴)، عدد $\eta>0$ را طوری پیدا

می‌کنیم که، برای $a<x<a+\eta$، داشته باشیم:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم $a+\eta=x_۰$ و x را بین a و $x_۰$ اختیار می‌کنیم. در بازهٔ $[x_۱,x_۰]$، دستور کوشی را به‌کار می‌بریم*.

$$\frac{f(x)-f(x_۰)}{g(x)-g(x_۰)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

که در آن: $x<c<x_۰$، در نتیجه

$$\left|\frac{f(x)-f(x_۰)}{g(x)-g(x_۰)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۱)$$

حالا، اتحاد زیر را می‌نویسیم (که مستقیماً قابل تحقیق است):

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=\frac{f(x_۰)-K\cdot g(x_۰)}{g(x)}+\left[۱-\frac{g(x_۰)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_۰)}{g(x)-g(x_۰)}-K\right]$$

از آن‌جا

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|\leqslant\left|\frac{f(x_۰)-K\cdot g(x_۰)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_۰)}{g(x)-g(x_۰)}-K\right|$$

جملهٔ دوم سمت راست، به‌ازای $x<x_۰=a+\eta$، بنابر(۱)، کمتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ است و، با توجه به‌این که به‌ازای $x\to o$ داریم $g(x)\to+\infty$، جملهٔ اول به‌سمت صفر میل می‌کند و $o<\delta$ چنان وجود دارد (می‌توان $\delta<\eta$ به‌حساب آورد) که به ازای $a<x<a+\delta$، جملهٔ اول هم کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ بشود. در نتیجه، به‌ازای مقدارهای مورد نظر x، خواهیم داشت:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon$$

---

*) اثبات، اساساً، با اثبات قضیهٔ ۳ متفاوت است. در این‌جا، نمی‌توان قضیهٔ کوشی را، در بازهٔ $[a,x]$ به‌کار برد، زیرا ممکن است تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در نقطهٔ a، معین نباشند. از ۲) نمی‌توان نتیجه گرفت که این تابع‌ها، در این نقطه، پیوسته هستند.

و به‌این ترتیب، حکم مطلوب، ثابت شد*.

در حالتی که داشته باشیم: $K=+\infty$ (معلوم است که، دست‌کم در نزدیکی a، داریم $f'(x)\neq 0$)، با تعویض نقش‌های f و g، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$$

به‌نحوی که، ضمناً

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

و از آن‌جا، سرانجام

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

زیرا روشن است که، دست‌کم در نزدیکی a، هم $f(x)>0$ و هم $g(x)>0$**.

یادآوری می‌کنیم که استدلال را، بدون تفاوت جدی، می‌توان برای حالت $a=-\infty$ نیز به‌کار برد. درست به‌همین ترتیب، قضیه را درمورد بازهٔ $[b,a)$ $(b<a)$ هم می‌توان اثبات کرد، خواه a متناهی باشد یا $a=+\infty$. به‌این ترتیب، قضیهٔ ۴، درمورد حدی نهایت آوند هم، خود به‌خود گسترش می‌یابد.

به‌عنوان مثال، حدهای زیر را ــ که ازقبل هم برای ما معلوم‌اند ــ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0\ (\mu>0) \qquad (۷$$

سپس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}.\ln a} \qquad (a>1\ \text{و}\ \mu>0) \qquad (۸$$

اگر $\mu>1$، در آن‌صورت، درسمت راست، بازهم به‌ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد می‌کنیم. ولی،

---

*) یادآوری می‌کنیم که در استدلال خود، به‌واقع، ازفرض $f(x)=+\infty$ حد، استفاده نکردیم [با اثبات قضیهٔ شتولتس در **۳۳** مقایسه کنید].

**) بافرض‌های قضیه، حالت $K=-\infty$، ممکن نیست.

با ادامهٔ این روش و استفاده مکرر ازقضیهٔ ۴، درصورت، به‌توان منفی (یا صفر) می‌رسیم و، بنابراین، درهرحال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0$$

دربارهٔ قضیه‌های ۳ (*۳) و ۴، یك ملاحظهٔ کلی، لازم است. درآن‌ها، حد نسبت آن‌ها را بافرض وجود حد نسبت مشتق‌ها، به‌دست‌آوردیم. ولی، عکس این قضیه‌ها درست نیست، یعنی ممکن است حد نسبت اولی وجود داشته باشد، درحالی‌که برای نسبت دومی، حدی پیدا نشود.

مثلاً حد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

وجود دارد، در حالی‌که نسبت مشتق، برابر $1+\cos x$ می‌شود، که به ازای $x\to+\infty$، دارای حدی نیست.

۱۵۲. صورت‌های دیگر ابهام. قضیه‌هایی را که ثابت‌کردیم، مربوط به ابهام‌هایی می‌شوندکه به‌صورت $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ باشند.

درحالت ابهام $0\times\infty$، می‌توان آن را به‌صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد و، سپس، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده‌کرد.

هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$، آن‌گاه داریم:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

که، به‌ازای $x\to a$، عبارت دوم به‌صورت $\frac{0}{0}$ وعبارت سوم به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ است.

مثال. ۹) باشرط $\mu>0$ داریم:

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

ابهام به‌صورت $\infty-\infty$ را نیز، همواره می‌توان به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآورد.

اگر عبارت $f(x)-g(x)$ را داشته باشیم و، ضمناً، $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$، مثلاً می‌توان تبدیل زیر را انجام داد و این عبارت را به‌صورت $\frac{0}{0}$ درآورد:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

ولی، غالباً، به‌صورت ساده‌تری، می‌توان به‌این نتیجه رسید.

مثال. ۱۰)

$$\lim_{x\to 0}\left(cotg^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

ولی

$$\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}$$

حد عامل اول، باروش‌های مقدماتی به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2$$

و درمورد عامل دوم، ازقضیهٔ ۳ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}$$

و به‌این ترتیب، حد مطلوب برابراست با $-\frac{2}{3}$.

درحالتی که عبارت‌های مبهم، به‌صورت 1^{∞}، 0^{0} یا ∞^{0} باشند، توصیهٔ کلی این است که، ابتدا، ازعبارت‌ها، لگاریتم گرفته شود.

اگرداشته باشیم: $y=[f(x)]^{g(x)}$، خواهیم داشت $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$. حد $\ln y$، به‌صورت $0\times\infty$ درمی‌آید. فرض کنیم که، با یکی از روش‌های فوق، حد $\ln y$ به‌دست آید وبرابرعدد متناهی k، یا $+\infty$ ویا $-\infty$ بشود. دراین صورت، $\lim_{x\to a} y$، به‌ترتیب، برابر e^{k} یا $+\infty$ ویا 0 خواهد شد.

مثال‌ها. ۱۱) اگرداشته باشیم:

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

می‌خواهیم حد y را، وقتی $x\to 0$، پیدا کنیم (ابهام به‌صورت 1^{∞}).

x را مثبت می‌گیریم (با توجه به‌زوج بودن تابع y، می‌توان به‌این فرض اکتفا کرد). درآن صورت

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$$

که با به‌کاربردن قضیهٔ ۳ (وبا استفاده ازنتیجهٔ حاصل ازمثال قبل)، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^{2}x}=-\frac{1}{3}$$

و ازآن‌جا

$$\lim_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

۱۲) عبارت زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{-\frac{1}{\ln x}}$$

این عبارت، به‌ازای $x\to+\infty$، به‌حالت ابهام 0^{0} درمی‌آید. داریم:

$$\ln y=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}{\ln x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

و بنا بر قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

بنا بر این

$$\lim_{x\to+\infty}y=\frac{1}{e}$$

§۵. حل تقریبی معادله‌ها

۱۵۳. ملاحظه‌های مقدماتی. حالا، به‌مسألهٔ تعیین ریشه‌های تابع مفروض $f(x)$، یعنی ریشه‌های معادلهٔ زیر، می‌پردازیم:

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

ولی در این‌جا، فرض‌ما بر این است که‌می‌خواهیم، ریشهٔ منفرد ξ را پیدا کنیم، یعنی ریشه‌ای که در بازهٔ $[a,b]$ قرار دارد:

$$a<\xi<b$$

و ریشهٔ دیگری هم، در این بازه پیدا نمی‌شود.

اگر، علاوه بر آن، تابع $f(x)$، در دو انتهای بازه، دارای مقدارهای $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشد، در آن‌صورت، همان‌طور که ضمن قضیهٔ اول بولزانو ـ کوشی [۸۱] شرح دادیم، با تقسیم بازه، به‌بخش‌های شامل ریشه ـ با تعیین علامت تابع $f(x)$ در نقطه‌های تقسیم ـ می‌توان بازهٔ شامل ریشه را تنگ‌تر کرد و محاسبهٔ تقریبی ریشه را، در آن، انجام داد. ولی این روش، با همهٔ سادگی اصولی آن، اغلب، به‌محاسبه‌های مفصل نیاز دارد و، به‌همین‌مناسبت، نمی‌تواند روش‌مناسبی به‌حساب آید. در این‌بند، با روش‌های ساده‌ای آشنا می‌شویم که، به‌کمک آن‌ها، می‌توان مقدار تقریبی ریشهٔ (منفرد) معادلهٔ (۱) را

سریع‌تر و منظم‌تر به‌دست آورد. در این‌جا، دوباره، با روش‌ها وقاعده‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی، سروکار داریم.

فرض بر این است که، همیشه، شرط‌های زیر برقرارند:

۱) تابع $f(x)$، همراه با مشتق‌های خود $f'(x)$ و $f''(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته است؛

۲) مقدارهای $f(a)$ و $f(b)$ تابع ــ در دو انتهای بازه ــ علامت‌های مختلف دارند: $f(a)\cdot f(b)<0$؛

۳) هر کدام از دو مشتق $f'(x)$ و $f''(x)$، در سرتاسر بازهٔ $[a,b]$، علامت معین وثابتی را حفظ می‌کنند.

ازپیوستگی تابع $f(x)$ و باتوجه به‌شرط ۲)، نتیجه می‌شود که ریشهٔ ξ معادلهٔ (۱)، بین a و b قرار دارد [۸۰]، چون مشتق $f'(x)$، علامت ثابتی دارد [شرط۳)]، بنابراین، $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$، یا صعودی و یا نزولی است و، درنتیجه، تنها یك‌بار برابر صفر می‌شود: ریشهٔ ξ، دراین بازه، منحصر به‌فرد است.

شرط ۳)، ازلحاظ هندسی، به‌این معناست که منحنی تابع $y=f(x)$، نه تنها در یك‌جهت سیر می‌کند (همواره صعودی یا همواره نزولی است) [۱۳۲]، بلکه ضمناً، بسته به‌علامت $f''(x)$ [۱۴۳]، یا محدب است و یا مقعر. درشکل ۸۲، چهار حالت مختلفی که نظیر ترکیب‌های متفاوت علامت‌های $f'(x)$ و $f''(x)$ است، نشان داده شده است.

درجبر ثابت می‌شود که همیشه می‌توان، برای محاسبهٔ ریشه‌های (حقیقی) یك‌معادلهٔ جبری، چنان وضعی به‌وجود آورد که شرط‌های ۱)، ۲) و ۳) برقرار باشند، به‌نحوی که، این شرط‌ها، اصولاً، کاربرد روش‌هایی را که دراین‌جا خواهیم آورد، محدود نمی‌کنند. چنین حکمی را درمورد معادله‌های غیرجبری نمی‌توان کرد، باوجوداین درعمل، این محدودیت‌ها، کمتر موجب اشکال می‌شوند، زیرا غالباً، درمورد این معادله‌ها، به‌خودی‌خود، این شرط‌ها برقرارند.

۱۵۴. قاعدهٔ بخش‌های متناسب (روش وترها). اگر بازهٔ $[a,b]$ به‌قدر کافی کوچك باشد، در آن‌صورت، باتقریب معلومی می‌توان فرض کرد که، به‌ازای تغییر x در حدود آن، نمو تابع $f(x)$، با نمو آوند آن، متناسب است. به‌خصوص، اگر ریشهٔ تابع را ξ بنامیم، داریم:

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\xi-a}{b-a}$$

از آن‌جا، باتوجه به‌این که $f(\xi)=0$، به‌دست می‌آید:

$$\xi = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

به‌این‌ترتیب، به‌عنوان مقدار تقریبی ریشه، می‌توان این عدد را انتخاب کرد:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (۲)$$

و روشن است که، این‌عبارت را، به‌شکل زیر هم می‌توان نوشت:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)\cdot f(b)}{f(b)-f(a)} \qquad (۲^*)$$

این قاعده، برای محاسبهٔ مقدار تقریبی ریشه، به‌قاعدهٔ بخش‌های متناسب*، معروف است. این قاعده، تعبیر هندسی ساده‌ای دارد: به‌جای کمان MM' منحنی (شکل ۸۲)، از وتر آن استفاده می‌کنیم. معادلهٔ وتر را، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (۳)$$

قاعدهٔ مـا، در واقع، به‌این معناست که، به‌جای نقطهٔ A، محل برخورد منحنی با محور x، نقطهٔ D، محل برخورد وتر با محـور x، را در نظر می‌گیریم. اگر در معادلهٔ (۳) فرض کنیم $y = ۰$، بـرای طـول x_1 نقطهٔ D، درست همان عبارت (۲) بـه‌دست می‌آیـد و، به‌همین علت، قاعدهٔ بخش‌های متناسب را، قاعدهٔ وترها نیز می‌نامند.

حالا، به‌بررسی وضع نقطهٔ x_1، نسبت به‌ریشهٔ ξ می‌پردازیم. مستقیماً معلوم است که x_1 بین a و b قرار دارد، ولی در کدام طرف ξ؟

چون درحالت‌های I و II (III و IV)، با تابع‌هـای محدب به‌طرف پایین (بالا) سروکار داریم، بنابراین منحنی MM'، زیر (بالای) وتر MM' قرار دارد، یعنی

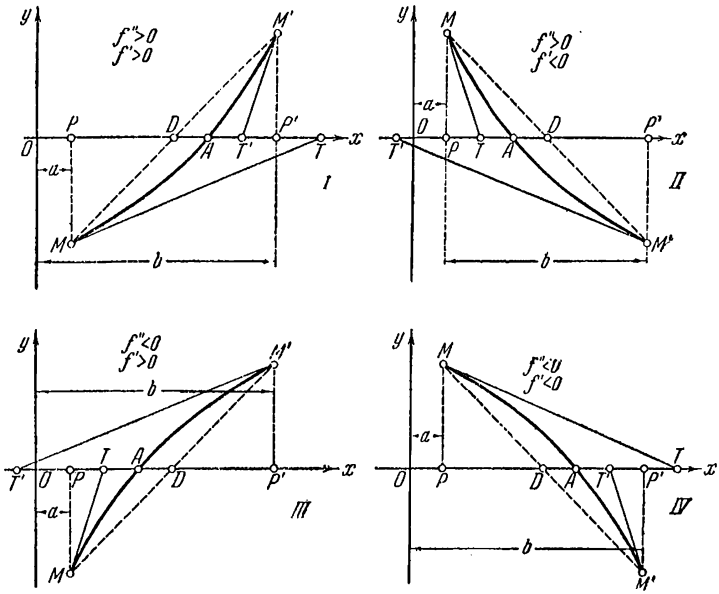
$$f(x) \underset{(>)}{<} f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (a<x<b) \qquad (۴)$$

که با فرض $x = x_1$، بلافاصله، نتیجه می‌شود:

$$f(x_1) \underset{(>)}{<} ۰$$

---

*) قبلاً این روش را «موقعیت‌کاذب» (regula falsi) می‌نامیدند، زیرا مبتنی برفرض‌هایی است که، به‌معنای دقیق خود، مطابق باواقعیت نیست.



شکل ۸۲

یعنی $f(x_1)$، همیشه علامتی مخالف علامت $f''(x)$ دارد. ازاین‌جا، سرانجام، به‌این‌نتیجه می‌رسیم که: درحالت‌های I و IV، مقدار x_1 بین a و ξ، و در حالت‌های II و III بین ξ و b قرار دارد.

با اکتفا به‌حالت‌های I و IV، قاعده را دوباره، و این‌بار در بازهٔ $[x_1, b]$، به‌کار می‌بریم. در رابطهٔ (۲)، به جای a، مقدار x_1 را می‌گذاریم و مقدار تقریبی تازه‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)\cdot f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

که بنا بر آن‌چه گفته‌ایم، بین x_1 و ξ قرار دارد. این روش را می‌توان ادامه داد و دنبالهٔ مقدارهای تقریبی صعودی را به‌دست آورد:

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots<\xi$$

ضمناً، دومقدار متوالی و دلخواه x_n و x_{n+1}، با رابطه‌ای مشابه (۲)، به‌هم مربوط‌اند:

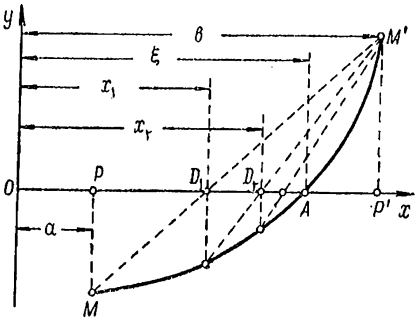
$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)\cdot f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad (۵)$$

ثابت می‌کنیم، با بزرگ‌شدن n، $\xi \leftarrow x_n$. در واقع، متغیر یکنوا وصعودی x_n، که

کران‌دار است (مثلاً بـاعدد c)، بایـد به سمت عـددی مثل ξ $\alpha \leqslant$ میل کند. اگـر در رابطهٔ (۵)، به حد عبور کنیم و، ضمناً، به پیوستگی تابع $f(x)$ توجه داشته باشیم، نتیجه می‌شود که

$$\frac{(b-a)\cdot f(\alpha)}{f(b)-f(\alpha)}=0$$

از آن‌جـا $f(\alpha)=0$، و چـون در بازهٔ $[a,b]$، ریشهٔ دیگری، غیر از ξ، وجـود ندارد، بنا بـراین $\xi=\alpha$*. شکل ۸۳، نـزدیک‌شدن تـدریجی نقطه‌های D_1، D_2، ... نقطه‌هـای برخورد متوالی وترهـا با محـور xـ را، به‌نقطهٔ مطلوب A، نشان می‌دهد. بـه‌سادگی می‌توان فهمید که، با استفادهٔ متوالی ازقاعده، به‌دنبالهٔ‌مقدارهای تقریبی ونزولی زیرمی‌رسیم:



شکل ۸۳

$$b>x_1>x_2>\dots>x_n>x_{n+1}>\dots>\xi$$

که ازسمت راست، به‌طرف ξ میل می‌کند.

به‌این‌ترتیب، درهمهٔ حـالت‌هـا، بـا استفادهٔ پیاپی (وبـه‌تعدادکافی) ازقـاعـده، می‌توان ریشهٔ ξ را، با دقت دلخواه، به‌دست آورد. ولی، هنوز این پرسش باقی مانده است که : مرتبهٔ دقت مقدار تقریبی x_n را چگونه باید برآوردکرد.

برای پـاسخ دادن بـه‌این پـرسش، دستور نموهـای محدود را، دربـارهٔ تفاضل $f(x_n)-f(\xi)$، به‌کار می‌بریم:

$$f(x_n)=f(x_n)-f(\xi)=(x_n-\xi)\cdot f'(c) \qquad (c \text{ بین } \xi \text{ و } x_n)$$

از آن‌جا

$$x_n-\xi=\frac{f(x_n)}{f'(c)}$$

اگر، کمترین مقدار $|f'(x)|$ را، در بـازهٔ مورد بررسی (که یـک‌بـار، و برای همیشه، می‌توان آن را از قبل محاسبه‌کـرد) بـه m نشان دهیم، درآن‌صـورت، این بـرآورد،

---

*) تقارب‌این روند را، بدون‌فرض مربوط به‌مشتق‌دوم هم، می‌توان‌ثابت‌کرد، ولی درآن‌صورت، این امکان ازبین نمی‌رودکه نقطهٔ x_n، ازیک‌طرف به‌طرف دیگر ریشه، جا به‌جا شود.

به‌دست می‌آید:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m} \qquad (۶)$$

به‌نحوی که، می‌بینیم از روی خود مقدار $f(x_n)$، در بازهٔ نزدیکی x_n به ریشه، داوری کنیم. به یک مثال بپردازیم. معادلهٔ

$$x^۳-۲x^۲-۴x-۷=۰$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله، ریشه‌ای بین ۳ و ۴ دارد. اگر عبارت سمت چپ معادله را، $f(x)$ بنامیم

$$f(۳)=-۱۰<۰, \qquad f(۴)=۹>۰$$

فرض کنیم که بخواهیم، این ریشه را، با ۰/۰۱ تقریب، پیدا کنیم. در بازهٔ [۳،۴]، هر دو مشتق

$$f'(x)=۳x^۲-۴x-۴, \qquad f''(x)=۶x-۴$$

علامت مثبت خود را حفظ می‌کنند (حالت I). حداقل مقدار $f'(x)$ برابر $m=۱۱$ است. داریم:

$$x_۱=۳-\frac{f(۳)}{f(۴)-f(۳)}=۳+\frac{۱۰}{۱۹}=۳+۰/۵۲\ldots$$

آن‌را گرد می‌کنیم و $x_۱=۳/۵۲$ در نظر می‌گیریم. چون $f(۳/۵۲)=-۲/۲۴۶۵۹۲$، با توجه به نابرابری (۶)، هنوز به‌دقت مطلوب نرسیده‌ایم. ادامه می‌دهیم:

$$x_۲=۳/۵۲-\frac{۰/۴۸\times f(۳/۵۲)}{f(۴)-f(۳/۵۲)}=۳/۵۲+\frac{۱/۰۷۸۳۶۴۱۶}{۱۱/۲۴۶۵۹۲}=$$
$$=۳/۵۲+۰/۰۹\ldots$$

یعنی، با گرد کردن، $x_۲=۳/۶۱$، که با محاسبهٔ $f(۳/۶۱)=-۰/۴۵۸۳۱۹$ و با استفاده از نابرابری (۶)، مجدداً می‌بینم که هنوز به‌دقت موردنظر نرسیده‌ایم. بالاخره

$$x_۳=۳/۶۱-\frac{۰/۳۹\cdot f(۳/۶۱)}{f(۴)-f(۳/۶۱)}=۳/۶۱+\frac{۰/۱۷۸۷۴۴۴۱}{۹/۴۵۸۳۱۹}=$$
$$=۳/۶۱+۰/۰۱۸۸\ldots$$

که با گرد کردن، می‌توان $x_۳=۳/۶۳$ گرفت. چون رقم سمت راست ریشه را گرد

کردیم، این احتمال وجود دارد، که از مقدار ریشه، گذشته باشیم. ولی، با توجه به علامت $f(۳/۶۳) = -۰/۰۴۱۶۵۳$، معلوم‌می‌شود که‌این‌اتفاق، نیفتاده است. ازروی نابرابری (۶)، داریم:

$$|x_۳ - \xi| = \xi - x_۳ < \frac{۰/۰۴۱\ldots}{۱۱} < ۰/۰۰۴$$

وبنابراین

$$۳/۶۳۰ < \xi < ۳/۶۳۴$$

به‌همین یک مثال اکتفا می‌کنیم، زیرا روش وترها، چندان مناسب نیست و، روش مماس‌ها، که اکنون به‌آن می‌پردازیم، برآن ترجیح دارد.

۱۵۵. قاعدهٔ نیوتون (روش مماس‌ها). با قبول همان فرض‌ها، برای تابع $f(x)$ [۱۵۳]، ریشهٔ‌مطلوب ξ این‌تابع را، که‌در بازهٔ $[a,b]$ منحصربه‌فرد است، درنظرمی‌گیریم: $a < \xi < b$. باحرکت از یک انتهای این بازه، ومثلا b، دستور تیلور را با جملهٔ متمم به‌شکل لاگرانژ، می‌نویسیم:

$$۰ = f(\xi) = f(b) + f'(b).(\xi - b) + \frac{۱}{۲} f''(c).(\xi - b)^۲ \quad (\xi < c < b) \quad (۷)$$

که، باصرف‌نظر از جملهٔ متمم، به‌تقریب، می‌توان نوشت:

$$f(b) + f'(b).(\xi - b) \doteq ۰$$

از آن‌جا

$$\xi = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

و از این راه، به‌مقدار تقریبی ریشهٔ ξ، می‌رسیم:

$$x'_۱ = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (۸)$$

این نتیجه را، می‌توان به‌سهولت، تعبیر هندسی کرد. مماس برمنحنی $y = f(x)$را، درنقطهٔ M' به‌طول b، درنظر می‌گیریم. معادلهٔ این مماس، چنین است:

$$y - f(b) = f'(b).(x - b)$$

که بافرض $y = ۰$، طول نقطهٔ T، محل برخورد مماس بامحور x، به‌دست می‌آیدکه،

کاملاً، بر (۸) منطبق است. یعنی، دراین‌جا، جای گزینی تقریبی کمان MM' منحنی، با مماس بریکی از دو انتهای آن، مطرح است (شکل ۸۲ را ببینید).

این روش را، روش نیوتن یا روش مماس‌ها، می‌نامند.

باید به‌این پرسش، پاسخ دهیم که: مقدار x'_1، حاصل از دستور (۸)، در کجا قرار دارد؟ همان شکل ۸۲، نشان می‌دهد که نقطهٔ برخورد مماس بامحور x، حتی ممکن است در بیرون بازهٔ مورد بررسی، قرار گیرد. ثابت می‌کنیم که، اگر $f(b)$ با $f''(x)$ هم‌علامت باشد (یعنی درحالت‌های I و IV)، x'_1 بین ξ و b قرار می‌گیرد.

در واقع، چون $f(b)$ و $f'(x)$، هم‌علامت هستند، از (۸) مستقیماً نتیجه می‌شود که $x'_1 < b$. ازطرف دیگر، از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$\xi - x'_1 = \xi - b + \frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c)}{f'(b)}(\xi - b)^2 \qquad (۹)$$

ولی، دراین‌حالت، $f''(x)$ با $f'(x)$ هم‌علامت است، نتیجه می‌شود : $x'_1 > \xi$، یعنی $\xi < x'_1 < b$.

به‌همین‌ترتیب، اگر ازنقطهٔ a آغاز می‌کردیم و مماس برمنحنی، در انتهای M (به‌طول a) رسم می‌شد، درآن‌صورت به‌جای (۸)، این مقدار تقریبی، به‌دست می‌آمد:

$$x'_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (۸^*)$$

و مثل حالت قبلی‌می‌توان گفت که: اگر مقدار $f(a)$ با $f''(x)$ هم‌علامت باشد (حالت‌های II و III)، x'_1 بین a و ξ قرار می‌گیرد.

به‌این‌ترتیب، برای هریك از چهار حالت ممکن، معلوم است که با کدام انتها باید آغاز کرد، تا روش تقریبی نیوتون‌کارساز باشد. با استفادهٔ متوالی ازقاعده، درحالت‌های I و IV، به‌دنبالهٔ مقدارهای نزولی

$$b > x'_1 > x'_2 \cdots > x'_n > x'_{n+1} > \cdots > \xi$$

و درحالت‌های II و III، به‌دنبالهٔ مقدارهای صعودی

$$a < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_n < x'_{n+1} < \cdots < \xi$$

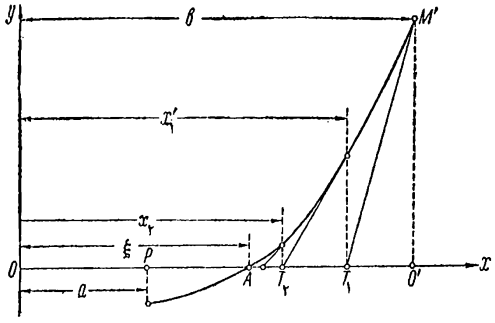
می‌رسیم. ضمناً، محاسبهٔ مقدارهای متوالی، همواره از روی دستور زیر انجام می‌گیرد:

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)} \qquad (۱۰)$$

دراین‌جانیز، به‌سادگی ثابت می‌شود که $x'_n \to \xi$. متغیر یکنوای کران‌دار x'_n دارای حد متناهی β است، و، با گذر به‌حد درهمان دستور (۱۰) باتوجه به‌پیوستگی هردوتابع $f(x)$ و $f'(x)$، داریم:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0 \Rightarrow f(\beta) = 0, \qquad \beta = \xi$$

شکل ۸۴، نزدیک‌شدن به‌نقطه A را، ازطریق نقطه‌های $T_1, T_2, \ldots$ ـ محل برخورد محور x با مماس‌ها ـ به‌خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۸۴

به‌این‌ترتیب، با استفادهٔ متوالی ازقاعدهٔ نیوتون، می‌توان ریشهٔ ξ را، با هر تقریب لازم، به‌دست آورد. ضمناً، دقت این‌مقدار تقریبی را، می‌توان مثل‌حالت قبل، با کمک‌دستور (۶) برآورد کرد.

برای تشخیص سرعت نزول تفاضل $\xi - x_n$، از دستور (۶) استفاده می‌کنیم، و درآن، b را به x'_n و x'_1 را به x'_{n+1} تبدیل می‌کنیم:

$$x'_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (x'_n - \xi)^2$$

اگر بیشترین مقدار $|f''(x)|$ را، دربازهٔ مفروض $[a,b]$، M بگیریم (کمترین مقدار را، همان m فرض می‌کنیم)، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$|x'_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2m} |x'_n - \xi|^2 \qquad (11)$$

وجود مجذور در طرف‌راست، موجب می‌شود که x'_n باسرعت بیشتری به ξ نزدیک شود (دست‌کم، ازمرحله‌ای به‌بعد) و، به‌همین دلیل، روش‌مماس‌ها، یکی‌ازمناسب‌ترین روش‌ها، برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها، درمی‌آید.

نابرابری (۱۱)، وظیفهٔ دیگری را هم، انجام می‌دهد. اگر دقت ریشهٔ x'_n به‌نحوی، و مثلاً به‌کمک نابرابری (۶)، محاسبه شده باشد، آن‌وقت، به‌کمک نابرابری (۱۱) می‌توان دقت ریشهٔ تقریبی x'_{n+1} را ـ که هنوز محاسبه نشده است ـ برآورد کرد. ضمناً، ازهمین‌مطلب می‌توان استفاده کرد وتصمیم گرفت که ریشهٔ تقریبی‌را، درکدام رقم اعشاری،

بهتر است گرد کنیم!

به‌چند مثال می‌پردازیم. روشن است که، ضمن حل مساله‌ها، می‌توان از هروسیلهٔ محاسبه‌ای که در دسترس باشد، استفاده کرد: جدول توان‌ها و ریشه‌ها، جدول‌های ضرب، جدول‌های لگاریتم و جدول‌های لگاریتم خطهای مثلثاتی، جدول‌های طبیعی خطهای مثلثاتی، جدول‌های تبدیل زاویه‌ها از درجه به رادیان و، در صورت وجود، ماشین‌حساب و غیره.

۱۵۶. مثال‌ها و تمرین‌ها. دراین شماره، تنها از روش مماس‌ها، استفاده خواهیم کرد.

۱) ریشهٔ معادلهٔ زیر را، بادقت تا ۰/۰۱ تقریب، محاسبه کنید:

$$x^3-2x^2-4x-7=0$$

درصورتی که بدانیم، این ریشه، دربازهٔ [۳،۴] قرار دارد [با **۱۵۴** مقایسه کنید].

داریم:

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-7,\quad f(3)=-10<0,\quad f(4)=+9>0$$

$$f'(x)=3x^2-4x-4>0,\quad f''(x)=6x-4>0\quad (3\leqslant x\leqslant 4)$$

(حالت I)، کمترین مقدار $|f'(x)|$، برابر است با $m=11$.

ازانتهای $b=4$ بازهٔ مفروض، آغاز می‌کنیم که، در آن‌جا، علامت تابع $f(x)$ با علامت $f''(x)$ یکی است. بنابردستور (۸):

$$x_1'=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\frac{9}{28}=4-0/32\ldots$$

با گرد کردن عدد می‌گیریم $x_1'=4-0/3=3/7$. چون $f(x_1')=f(3/7)=1/473$،

بنابرنابرابری (۶): $0/14<\frac{1/473}{11}<\xi-x_1'$. یعنی تقریب حاصل، کافی نیست.

ادامه می‌دهیم:

$$x_2'=3/7-\frac{f(3/7)}{f'(3/7)}=3/7-\frac{1/473}{22/27}=3/7-0/066\ldots$$

می‌گیریم $x_2'=3/7-0/066=3/634$. این بار... $f(x_2')=f(3/634)=0/042$

و بنابر (۶) $0/004<\frac{0/042}{11}<\xi-x_2'$ و بنابراین $3/634<\xi<3/630$ و $\xi=3/63$

باتقریب مطلوب خواهد بود.

(در ۱۵۴، همین نتیجه را، با روش وترها، در سه مرحله به‌دست آوردیم).

۲) برای مثال دوم، حل این معادله را درنظر می‌گیریم:

$$x.\log x = ۱$$

از این مثال استفاده می‌کنیم و برای خواننده توضیح می‌دهیم، که چگونه می‌توان منحنی نمایش تغییر تابع را، برای روشن‌کردن موقعیت ریشه‌ها، به‌خدمت گرفت. روشن است، مقداری از x که درمعادلهٔ

$$\log x = \frac{۱}{x}$$

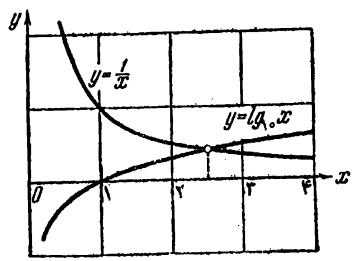
صدق می‌کند، همان طول نقطه برخورد منحنی‌های زیر است:

$$y = \log x \quad و \quad y = \frac{۱}{x}$$

حتی رسم تقریبی منحنی‌ها (شکل ۸۵)، نشان می‌دهدکه ریشهٔ مطلوب بین ۲ و ۳ قرار دارد. این را، حالا به‌سادگی می‌توان بامحاسبه هم، تحقیق کرد؛زیرا بافرض $f(x) = x\log x - ۱$ داریم:

$$f(۲) = -۰/۳۹۷۹۳\ldots < ۰;$$

$$f(۳) = ۰/۴۳۱۳۶\ldots > ۰$$



شکل ۸۵

ریشهٔموردنظر راتا ۰/۰۰۰۱ تقریب،محاسبه‌می‌کنیم. روشن است که دربازهٔ $۲ \leqslant x \leqslant ۳$ داریم:

$$f'(x) = \log x + \log e > ۰,$$

$$f''(x) = \frac{\log e}{x} > ۰$$

(حالت I) و می‌توان فرض کرد $m = ۰/۷$.

چون $f(۳)$ و $f''(x)$ هم‌علامت‌اند، بنابردستور (۸)

$$x_۱' = ۳ - \frac{f(۳)}{f'(۳)} = ۳ - \frac{۰/۴۳۱۳۶\ldots}{۰/۹۱۱۴۱\ldots} = ۳ - ۰/۴۷۳\ldots$$

فرض‌می‌کنیم $x_۱' = ۳ - ۰/۴۷ = ۲/۵۳$،داریم $f(x_۱') = f(۲/۵۳) = ۰/۰۱۹۸۹۴\ldots$

و بنابراین $۰/۰۲ > \frac{۰/۰۱۹۹}{۰/۷} \geqslant \xi - x_۱'$. سپس

$$x'_۲ = ۲/۵۳ - \frac{f(۲/۵۳)}{f'(۲/۵۳)} = ۲/۵۳ - \frac{۰/۰۱۹۸۹۴\ldots}{۰/۸۳۷۴۱\ldots} = ۲/۵۳ - ۰/۰۲۳۷۵\ldots$$

$x'_۲ = ۲/۵۳ - ۰/۰۲۳۷ = ۲/۵۰۶۳$ می‌گیریم. خطا را از روی (۶) برآورد می‌کنیم:

$$f(۲/۵۰۶۳) = ۰/۰۰۰۰۹۶;\quad x'_۲ - \xi < \frac{۰/۰۰۰۰۹۶}{۰/۷} < ۰/۰۰۰۲$$

یعنی $۲/۵۰۶۳ > \xi > ۲/۵۰۶۱$. درچنین حالتی، با تقریب مطلوب، داریم:

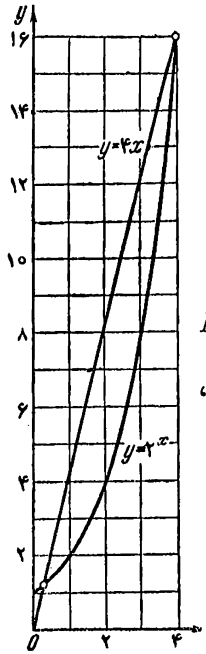
$$\xi = ۲/۵۰۶۲ \pm ۰/۰۰۰۱$$

(درواقع، ۲/۵۰۶۲، مقدار تقریبی اضافی برای ریشهٔ ξ است، زیرا $۰ < f(۲/۵۰۶۲)$ است).

۳) به معادلهٔ زیر می‌پردازیم

$$۲^x = ۴x$$

که در **۸۱** هم، آن را مورد بررسی قرار داده بودیم. دیدیم که ریشه این معادله، بین ۰ و ۰/۵ قرار دارد. این نتیجه را، به کمک نمودار تابع‌های $y = ۲^x$ و $y = ۴x$ هم، می‌توان به‌دست آورد. روی شکل ۸۶، به‌روشنی دیده می‌شود که این منحنی‌ها، علاوه بر نقطهٔ به‌طول ۴، در نقطهٔ دیگر به طول ξ هم، بین ۰ و ۰/۵، یکدیگر را قطع می‌کنند. می‌خواهیم، این ریشه را با دقت تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب، حساب کنیم.



شکل ۸۶

برای $۰ \leqslant x \leqslant ۰/۵$ داریم:

$$f(x) = ۲^x - ۴x,\quad f'(x) = ۲^x \cdot \ln ۲ - ۴ < ۰,$$

$$f''(x) = ۲^x \cdot \ln^۲ ۲ > ۰$$

(حالت II). در این جا $M = \sqrt{۲}\ln^۲ ۲ < ۰/۷$، $m = ۴ - \sqrt{۲}\ln ۲ > ۳$ و $\frac{M}{۲m} < ۰/۱۲$. چون $f(۰) = ۱$، دارای همان علامت $f''(x)$ است، از $a = ۰$ آغاز می‌کنیم بنابر (۶)، خطای این مقدار تقریبی، کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ است و بنابر (۱۱)، از قبل، می‌توان خطا را پیش‌بینی کرد:

$$\xi - x'_۱ < ۰/۱۲ \times \frac{۱}{۹} < ۰/۰۱۴$$

بنابراین، مقداری که از روی (*۸) محاسبه می‌شود:

$$x_1' = ۰ - \frac{۱}{\ln ۲ - ۴} = \frac{۱}{۳/۳۰۶۸۵۲...} = ۰/۳۰...$$

در رقم دوم، گرد می‌کنیم $x_1' = ۰/۳۰$. با استفاده از مقدار $f(۰/۳۰) = ۰/۰۳۱۱۴۴...$ و نابرابری (۶)، خطا را برآورد می‌کنیم:

$$\xi - x_1' < \frac{۰/۰۳۱۱۴۴...}{۳} < ۰/۰۱۱$$

و سپس، بنابر (۱۱):

$$\xi - x_2' < ۰/۱۲ \times ۰/۰۰۰۱۲۱ < ۰/۰۰۰۰۱۵$$

به‌نحوی که به تقریب مطلوب، نزدیک می‌شویم. تقریب بعدی

$$x_2' = ۰/۳۰ - \frac{۰/۰۳۱۱۴۴...}{۰/۸۵۳۳۶۴۳... - ۴} = ۰/۳۰ + \frac{۰/۰۳۱۱۴۴...}{۳/۱۴۶۶۳۵۶...} = ۰/۳۰۹۸۹۷$$

$x_2' = ۰/۳۰۹۹۰$ می‌گیریم. چون $f(۰/۳۰۹۹۰) = ۰/۰۰۰۰۲۱... > ۰$، بنابراین، این مقدار، از ریشه کوچکتر است. خطای آن، بنابر (۶)، عبارت است از

$$\xi - x_2' < \frac{۰/۰۰۰۰۲۲}{۳} < ۰/۰۰۰۰۱$$

به‌این قرار، بالاخره

$$\xi = ۰/۳۰۹۹۰ \pm ۰/۰۰۰۰۱$$

۴) معادلهٔ

$$tgx = x$$

دارای بی‌نهایت ریشه است و این مطلب را، از روی شکل ۸۷ ـ با توجه به مجموعهٔ نامتناهی نقطه‌های برخورد نمودار $y = tgx$ با خط $y = x$، آشکارا می‌توان دید. می‌خواهیم، کوچکترین ریشهٔ مثبت این معادله را که بین $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ است، حساب کنیم.

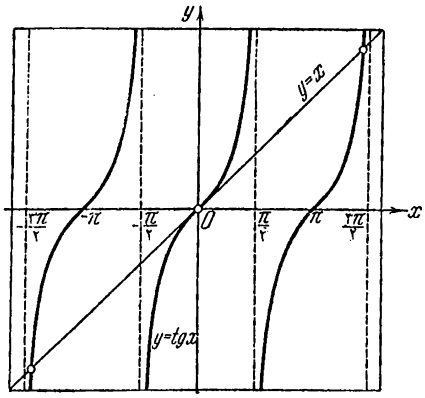
چون به‌ازای $x = \frac{۳\pi}{۲}$، مقدار تانژانت بی‌نهایت می‌شود، بهتر است معادلهٔ مفروض را به‌صورت $f(x) = \sin x - x\cos x = ۰$ نوشت؛ داریم:

$$f\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱ - \frac{۵\pi}{۴}\right) > ۰, \quad f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = -۱ < ۰$$

$$f'(x)=x\cdot\sin x<0,$$

$$m>2/7,\quad f''(x)=\sin x+x\cdot\cos x<0$$

$$b=\frac{3\pi}{2}=4/7123889\ldots \text{ (حالت IV) از}$$



شکل ۸۷

آغاز می‌کنیم؛ داریم:

$$x'_1=\frac{3\pi}{2}-\frac{2}{3\pi}=$$

$$=4/7123889\ldots-0/2122066\ldots$$

دراین‌جا، به‌نکته‌ای توجه کنیم: در جدول کمیت‌های مثلثاتی (و لگاریتم‌های آن‌ها)، زاویه‌ها را به‌درجه، دقیقه‌وثانیه داده‌اند و، بنابراین، ضمن گردکردن عدد $0/2122066$ بهتر است به‌همین واحدها، توجه داشته باشیم. ما زاویهٔ $(12^\circ,10')$ را انتخاب‌می‌کنیم، که به‌عددکمی بزرگتر $0/2122348840\ldots$ پاسخ‌می‌دهد («به‌طرف ریشه» گرد شده‌است)، درنتیجه

$$x'_1=4/5000406 \quad (257^\circ,50')$$

سپس

$$f(x'_1)=-\cos 12^\circ 10'+4/5000406\ldots\sin 12^\circ 10'=-0/0291274\ldots,$$

$$f'(x'_1)=-4/3989620\ldots;\quad x'_1-\xi<\frac{0/03}{2/7}<0/012$$

ادامه می‌دهیم:

$$x'_2=4/5000406\ldots-\frac{0/0291274\ldots}{4/3989620\ldots}=4/5000406-0/0066214\ldots$$

به‌صورت $0/0066217\ldots$ $(22',45'')$ گرد می‌کنیم و درنظر می‌گیریم:

$$x'_2=4/4934229\ldots(257^\circ,27',15'')$$

چون $f(x'_2)=-0/00059\ldots$، به‌نحوی که

$$x'_2-\xi<\frac{0/00006}{2/7}<0/0000223$$

بنا بر این

$$۴/۴۹۳۴۰۰۶\ldots<\xi<۴/۴۹۳۴۲۲۹\ldots$$

و می‌توان فرض کرد:

$$\xi=۴/۴۹۳۴+۰/۰۰۰۰۳$$

۵) با روش نیوتون، به‌خصوص، معلوم می‌شود، که بازهٔ شامل ریشه، چه‌موقع به‌اندازهٔ کافی کوچک می‌شود. در پایان، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳-۲x-۵=۰$ را، با دقت بیشتری، و مثلاً تا تقریب $\frac{۱}{۱۰^{۱۰}}$، محاسبه می‌کنیم. از بازهٔ $(۲،۲/۱)$، که ریشه در درون آن واقع است، آغاز می‌کنیم.

در این‌جا، داریم:

$$f(x)=x^۳-۲x-۵،\quad f(۲)=-۱<۰،\quad f(۲/۱)=۰/۰۶۱>۰،$$

$$f'(x)=۳x^۲-۲>۰،\quad f''(x)=۶x>۰\quad(۲\leqslant x\leqslant ۲/۱)$$

(حالت I). به‌سادگی برآورد می‌شود $m=۱۰$، $M=۱۲/۶$ و، بنا بر این $\frac{M}{۲m}<۰/۶۳$

از $b=۲/۱$ آغاز می‌کنیم. بنا بر دستور (۶):

$$b-\xi<\frac{۰/۰۶۱}{۱۰}=۰/۰۰۶۱$$

با استفاده از نابرابری (۱۱)، از پیش، حساب می‌کنیم که چه تقریبی از $x'_۱$ باید انتظار داشت:

$$x'_۱-\xi<۰/۶۳\times ۰/۰۰۶۱^۲<۰/۰۰۰۰۲۴$$

به‌همین علت، عدد

$$x'_۱=۲/۱-\frac{f(۲/۱)}{f'(۲/۱)}=۲/۱-\frac{۰/۰۶۱}{۱۱/۲۳}=۲/۱-۰/۰۰۵۴۳\ldots$$

را «به‌سمت ریشه»، روی رقم پنجم، گرد می‌کنیم:

$$x'_۱=۲/۱-۰/۰۰۵۴۴=۲/۰۹۴۵۶$$

چون $f(x'_۱)=f(۲/۰۹۴۵۶)=۰/۰۰۰۰۹۵۰۷۸۶۹۰۸۱۶$، بادستور (۶)، می‌توان خطا را، دقیق‌تر برآورد کرد:

$$x'_۱-\xi<\frac{۰/۰۰۰۹۵۰۰۰}{۱۰}<۰/۰۰۰۰۱$$

برای $x'_۲$ هم، ازقبل، بامتوسل‌شدن به (۱۱)، حساب می‌کنیم

$$x'_۲-\xi<۰/۶۳\times ۰/۰۰۰۰۱^۲=۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۳$$

به‌این‌سبب، عدد

$$x'_۲=۲/۰۹۴۵۶-\frac{۰/۰۰۰۰۹۵۰۷۸۶۹۰۸۱۶}{۱۱/۱۶۱۵۴۴۷۸۰۸}=$$

$$=۲/۰۹۴۵۶-۰/۰۰۰۰۰۸۵۱۸۴۱۶۰۰۰$$

را در رقم یازدهم گرد می‌کنیم:

$$x'_۲=۲/۰۹۴۵۶-۰/۰۰۰۰۰۸۵۱۸۴۱=۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۹.$$

که با ریشهٔ مطلوب، اختلافی کمتراز ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷ دارد. پس

$$۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۲<\xi<۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۹$$

یعنی

$$\xi=۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵+\frac{۱}{۱۰^{۱۰}}$$

۱۵۷. روش ترکیبی. این روش، از استفادهٔ هم‌زمان روش مماس‌ها و روش وترها، درست شده است.

برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم که با حالت I سروکار داریم. مقدارهای تقریبی $x_۱$ و $x'_۱$ را، مثل قبل و با استفاده از دستورهای (۲) و (۸)، حساب می‌کنیم:

$$x_۱=a-\frac{(b-a).f(a)}{f(b)-f(a)},\qquad x'_۱=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

که دراین‌صورت، داریم:

$$a<x_۱<\xi<x'_۱<b$$

برای مرحلهٔ بعد، خیلی ساده، جای a و b را به $x_۱$ و $x'_۱$ می‌دهیم:

$$x_۲=x_۱-\frac{(x'_۱-x_۱).f(x_۱)}{f(x'_۱)-f(x_۱)},\qquad x'_۲=x'_۱-\frac{f(x'_۱)}{f'(x'_۱)}$$

این روش را، می‌توان به‌همین‌ترتیب، ادامه داد: با دراختیار داشتن x_n و x'_n، که ریشهٔ ξ بین آن‌ها قرار دارد، از روی رابطه‌های

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x'_n-x_n)\cdot f(x_n)}{f(x'_n)-f(x_n)},\quad x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}$$

به‌زوج مقدارهای تقریبی بعدی می‌رسیم.

رابطهٔ دوم، همان رابطهٔ (۱۰) است؛ تفاوت رابطهٔ اول با رابطهٔ (۵) دراین است که: به‌جای نقطهٔ b، باید نقطهٔ x'_n را ــ که‌خیلی به ξ نزدیک‌تراست ــ گرفت. اگرنابرابری (۴) را، دراین حالت، به‌صورت

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)}>\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

بنویسیم و در آن $a=x_n$ و $x=x'_n$ فرض‌کنیم، به‌سادگی دیده می‌شود که تعویض b به x'_n، تنها به‌سرعت بیشتر نزدیک‌شدن x_n به ریشهٔ مطلوب،کمک می‌کند (تعبیر هندسی این مطلب، روشن است).

به‌این‌ترتیب، با روش ترکیبی، درعین‌حال، مقدارهای تقریبی نقصانی و اضافی را به‌دست می‌آوریم،که از دو جهت مختلف، به‌سمت ریشه، میل می‌کنند. در حالت‌های I و IV، x_n از سمت چپ و و x'_n از سمت راست، به‌سمت ξ میل می‌کنند، و در حالت‌های II و III، برعکس آن. کمیت $|x'_n-x_n|$ مستقیماً امکان می‌دهد تا در مورد مقدار تقریب حاصل، داوری‌کنیم و حسن روش ترکیبی هم، درهمین است.

کاربرد این روش را، ضمن چند مثال، روشن می‌کنیم.

۱۵۸. مثال‌ها و تمرین‌ها. دراین‌جا، تنها از روش ترکیبی استفاده می‌کنیم.

۱) سه ریشهٔ معادلهٔ زیر را، تا ۰/۰۰۱ تقریب، پیدا کنید:

$$f(x)=2x^3-x^2-7x+5=0$$

با رسم تقریبی نمودار تابع $y=f(x)$، بازه‌های شامل ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-2<\xi<-1,\qquad 0<\xi<1,\qquad 1<\xi<2$$

تحقیق درستی این مطلب، با استفاده ازتعبیر علامت تابع، دشوار نیست.

(a) دربازهٔ $[-2,-1]$:

$$f'(x)=6x^2-2x-7>0,\qquad f''(x)=12x-2<0\quad\text{(حالت III)}$$

چون $f(-2)=-1<0$ و $f(-1)=9>0$، بنابراین، قاعدهٔ‌نیوتون را از انتهای

چپ بازه، به‌کار می‌بریم؛ داریم: $f'(-۲)=۲۱$ و

$$x_۱'=-۲-\frac{-۱}{۲۱}=-۱/۹۵۲\ldots$$

$$x_۱=-۱-\frac{۹}{۹-(-۱)}=-۱/۹$$

$x_۱'$ را، با کوچکتر کردن آن، گرد می‌کنیم، به‌دست می‌آید: $\xi<-۱/۹۶$. اگر آن را، با بزرگتر کردن، گرد می‌کردیم، یعنی به‌طرف ریشه می‌رفتیم، به‌عدد $-۱/۹۵$ می‌رسیدیم، ولی $f(-۱/۹۵)=۰/۰۱۷۷۵>۰$، یعنی، با این گرد کردن، از ریشه رد می‌شدیم. این آزمایش لازم بود، زیرا ضمناً، بدون‌توجه به‌مقدار $x_۱$، امکان داد تا بازهٔ شامل ریشه را، کوتاه‌تر کنیم:

$$x_۱=-۱/۹۵،\qquad x_۱'=-۱/۹۶$$

سپس داریم:

$$f(-۱/۹۶)=-/۱۸۰۶۷۲،\qquad f'(-۱/۹۶)=۱۹/۹۶۹۶$$

$$x_۲'=-۱/۹۶+\frac{۰/۱۸۰۶۷۲}{۱۹/۹۶۹۶}=-۱/۹۶+۰/۰۰۹۰۴=-۱/۹۵۰۹۵\ldots،$$

$$x_۲=-۱/۹۵-\frac{۰/۰۱\times۰/۰۱۷۷۵}{۰/۰۱۷۷۵+۰/۱۸۰۶۷۲}=$$

$$=-۱/۹۵-۰/۰۰۰۸۹=-۱/۹۵۰۸۹\ldots$$

وچون ξ باید بین این دوعدد قرار گیرد، روشن است که

$$\xi_۱=-۱/۹۵۰۹\pm۰/۰۰۰۱$$

(و همان‌طور که می‌بینید، از تقریب مطلوب هم، گذشته است).

(b) در بازهٔ $[۰،۱]$، مشتق اول $f'(x)$ منفی است، ولی مشتق دوم $f''(x)$، در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۶}$، تغییر علامت می‌دهد. همین کیفیت، ما را وا می‌دارد تا بازه را، کوتاه‌تر کنیم. چون داریم: $f(۱)=-۱<۰$ و $f(۰/۵)=۱/۵>۰$، بنابراین، ξ در درون بازهٔ $[۰/۵،۱]$ قرار دارد، که در آن، $f''(x)$، همیشه مثبت است (حالت II). در این‌جا، قاعدهٔ نیوتون را، از انتهای چپ به‌کار می‌بریم، داریم:

$$x_1 = ۱ - \frac{۰/۵}{۲/۵} = ۰/۸۰ \qquad x_1' = ۰/۵ + \frac{۱/۵}{۶/۵} = ۰/۷۳۰۷ \doteq ۰/۷۴،$$

گردکردن x_1، به‌سمت ریشه، موجب رد شدن آن از ریشه نمی‌شود، زیرا $f(۰/۷۴) = ۰/۰۸۲۸۴۸ > ۰$. بالاخره

$$x_2' = ۰/۷۴ + \frac{۰/۰۸۲۸۴۸}{۵/۱۹۴۴} = ۰/۷۵۵...،$$

$$x_2 = ۰/۸۰ - \frac{۰/۰۱۲۹۶}{۰/۲۹۸۸۴۸} = ۰/۷۵۶...$$

و بنا بر این

$$۰/۷۵۵... < \xi_2 < ۰/۷۵۶...$$

و می‌توان فرض کرد

$$\xi_2 = ۰/۷۵۶ \pm ۰/۰۰۱$$

(c) در بازهٔ $[۱،۲]$، مشتق دوم مثبت است، ولی مشتق اول، درنقطهٔ

$$x = \frac{۱ + \sqrt{۴۳}}{۶} \doteq ۱/۲۶$$

تغییر علامت می‌دهد. ۱/۵ را آزمایش می‌کنیم. $f(۱/۵) = -۱$ وچون $f(۲) = ۳$، بنا بر این $۱/۵ < \xi_3 < ۲$. دراین بازه، $f'(a)$ همیشه مثبت‌است (حالت I)؛ داریم:

$$x_1 = ۱/۵ + \frac{۱}{۸} \doteq ۱/۶، \qquad x_1' = ۲ - \frac{۳}{۱۳} \doteq ۱/۷$$

دراین‌جا نیز، از ریشه رد نشده‌ایم، زیرا $f(۱/۷) = ۰/۰۳۶$. بالاخره

$$x_2 = ۱/۶ + \frac{۰/۰۵۶۸}{۰/۶۰۴} = ۱/۶ + ۰/۰۹۴... = ۱/۶۹۴...$$

$$x_2' = ۱/۷ - \frac{۰/۰۳۶}{۶/۹۴} = ۱/۷ - ۰/۰۰۵... = ۱/۶۹۴...$$

بنا بر این

$$\xi_3 = ۱/۶۹۴ + ۰/۰۰۱$$

یادداشت. با توجه به‌این‌که، بنا برقضیهٔ معروف جبر، مجموع سه ریشه باید برابر

۰/۵ باشد، می‌توان از این مطلب، برای تحقیق، استفاده کرد.

۲) معادلهٔ

$$f(x)=x^4-3x^2+75x-10000=0$$

دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی بین ۱۱− و ۱۰− و دیگری بین ۹ و ۱۰ است. این ریشه‌ها را، بادقت تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب پیدا کنید.

(a) دربازهٔ $[-10,-11]$

$$f''(x)=12x^2-6>0 \qquad f'(x)=4x^3-6x+75<0$$

(حالت II). به‌دست می‌آید:

$$x_1'=-11+\frac{3453}{5183}=-10/33\ldots\doteq-10/3$$

$$x_1=-10-\frac{1050}{4503}=-10/23\ldots\doteq-10/2$$

درحالت اول، عدد را، به‌طرف ریشه، گردکردیم، ولی ازآن رد نشدیم. سپس

$$x_2'=-10/3+\frac{164/3181}{4234/108}=-10/262\ldots\doteq-10/262$$

$$x_2=-10/2-\frac{25/27984}{417/1165}=-10/260\ldots\doteq-10/260$$

و بالاخره

$$x_3'=-2/262+\frac{4/334569118736}{4186/137218912}=-10/262+$$

$$+0/0010354\ldots=-10/26096445\ldots$$

$$x_3=-10/260-\frac{0/00807038048}{8/369759358736}=$$

$$=-10/260-0/0009644\ldots=-10/26096442\ldots$$

و بنابراین

$$\xi_1=-10/2609643-0/0000001$$

(که حتی از تقریب مطلوب هم، دقیق‌تر است).

(b) دربازهٔ $[9,10]$ داریم: $f'(x)>0$ و $f''(x)>0$ (حالت I). دراین‌جا:

$$x_1' = ۹ + \frac{۳۰۰۷}{۳۴۵۷} = ۹ + ۰/۸۶۹\ldots \doteq ۹/۸۷ \qquad \text{(به طرف ریشه)}$$

$$x_1' = ۱۰ - \frac{۴۵۰}{۴۰۱۵} = ۱۰ - ۰/۱۱۲\ldots \doteq ۹/۸۹$$

$$x_2 = ۹/۸۷ + \frac{۱/۲۳۸۹۶۵۸۸۷۸}{۷۷/۴۶۸۹۰۰۸} = ۹/۸۷ + ۰/۰۱۵۹۹\ldots = ۹/۸۸۵۹۹\ldots$$

$$x_2' = ۹/۸۹ - \frac{۱۵/۵۲۰۶۰۶۴۱}{۳۸۸۵/۱۰۶۶۷۶} = ۹/۸۹ - ۰/۰۰۳۹۹۳\ldots = ۹/۸۸۶۰۰۶\ldots$$

و بنابراین، روشن است که

$$\xi_2 = ۹/۸۸۶۰۰ \pm ۰/۰۰۰۰۱$$

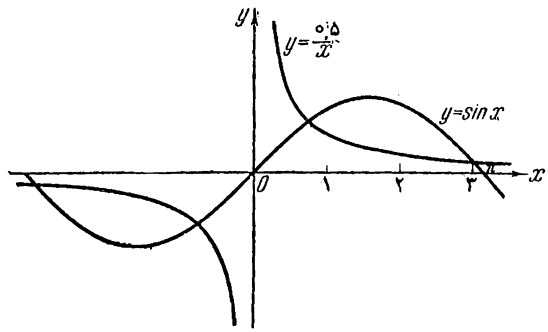
۳) این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$y = x \cdot \sin x - ۰/۵ = ۰$$

با رسم نمودارهای تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \frac{۰/۵}{x}$ (شکل ۸۸)، می‌بینیم که، این نمودارها، درمجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌ها، یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین، معادلهٔ مفروض، بی‌نهایت جواب دارد. از روی نمودار، همچنین، دیده می‌شود که کوچکترین ریشهٔ مثبت ξ، نزدیک ۰/۷ است. می‌خواهیم آن‌را با تقریب ۰/۰۰۰۰۰۱ حساب کنیم (آن‌چه‌را که دربارهٔ گرد کردن عددها، به‌صورت درجه، درمسألهٔ ۴) شماره **۱۵۶** توضیح دادیم، دراین‌جاهم، باید مورد توجه قرار دهیم).

این مقدارها را در تابع $f(x)$ می‌گذاریم:

$$a = ۰/۶۹۸۱۳۱۷\ldots (۴۰^\circ), \qquad b = ۰/۷۸۵۳۹۸۲\ldots (۴۵^\circ)$$



شکل ۸۸

$f(a)$ منفی و $f(b)$ مثبت می‌شود، یعنی $a<\xi<b$. مشتق‌های $f'(x)$ و $f''(x)$، دراین بازه، مثبت هستند (حالت I). به‌محاسبه می‌پردازیم:

$$x_1 = ۰/۶۹۸۱۳۱۷\ldots + ۰/۰۴۱۹۵۱۲\ldots$$

$$x'_1 = ۰/۷۸۵۳۹۸۲\ldots - ۰/۰۴۳۸۵۱۰\ldots$$

اولی را به‌صورت $۰/۰۴۱۸۸۷۹\ldots$ $(۲^\circ ۲۴')$ و دومی را به‌صورت $۰/۰۴۳۹۲۳۱\ldots$ $(۲^\circ ۳۱')$ گرد می‌کنیم، درنتیجه

$$x_1 = ۰/۷۴۰۰۱۹۶\ldots(۴۲^\circ ۲۴'); \qquad x'_1 = ۰/۷۴۱۴۷۴۱\ldots(۴۲^\circ ۲۹')$$

و سپس

$$x_2 = ۰/۷۴۰۰۱۹۶\ldots + ۰/۰۰۰۸۲۱۱\ldots = ۰/۷۴۰۸۴۰۷\ldots$$

$$x'_2 = ۰/۷۴۱۴۷۴۱\ldots - ۰/۰۰۰۶۳۲۹\ldots = ۰/۷۴۰۸۴۱۲\ldots$$

و از آن‌جا، باتقریب مطلوب، به‌دست می‌آید:

$$\xi = ۰/۷۴۰۸۴۱ \pm ۰/۰۰۰۰۰۰۵$$

۴) درپایان، به‌این معادله، برمی‌گردیم:

$$f(x) = x^4 - x - ۱ = ۰$$

در **۸۱** دیدیم که این معادله، دارای ریشهٔ ξ بین $a = ۱/۲۲$ و $b = ۱/۲۳$ است. ببینید، اگر روش ترکیبی را دوبار به‌کار ببریم، این ریشه با چه‌تقریبی پیدا می‌شود؟

طرح محاسبه (حالت I):

$$x_1 = ۱/۲۲ + \frac{۰/۰۰۰۰۴۶۶۵۴۴}{۰/۰۶۳۵۳۱۱۵} = ۱/۲۲۰۷۳\ldots \doteq ۱/۲۲۰۷$$

$$x'_1 = ۱/۲۳ - \frac{۰/۰۵۸۸۶۶۴۱}{۶/۴۴۳۴۶۸} = ۱/۲۲۰۸۶\ldots \doteq ۱/۲۲۰۹$$

$$x_2 = ۱/۲۲۰۷ + \frac{۰/۰۰۰۰۰۰۰۵۵۳۳۷۶۰۵۹۸۳۹۸}{۰/۰۰۱۲۵۵۵۳۸۰۱۲۰۹۶} = ۱/۲۲۰۷۴۴۰۷\ldots$$

$$x'_2 = ۱/۲۲۰۹ - \frac{۰/۰۰۰۹۷۸۸۴۹۹۸۲۱۷۶۱}{۶/۲۷۹۴۷۸۵۸۱۳۱۶} = ۱/۲۲۰۷۴۴۱\ldots$$

و بنابراین

$$\xi = ۱/۲۲۰۷۴۴۱ \pm ۰/۰۰۰۰۰۰۱$$

MATH75.IR

فصل پنجم

تابع‌های با چند متغیر

§۱. مفهوم‌های اساسی

۱۵۹. بستگی تابعی بین متغیرها. مثال‌ها. تا این‌جا، تغییرهای توأم دو متغیر را آموختیم، که در آن‌ها، یکی از متغیرها، وابسته به دیگری بود و مقدارهای متغیر مستقل، کاملاً، تغییرهای متغیروابسته یا تابع را، معین می‌کرد. ولی، در دانش و در زندگی، کم نیستند موردهایی که با چند متغیر مستقل برخورد می‌کنیم، که برای تعیین مقدار تابع، باید قبلاً، مقدارهایی برای همهٔ این متغیرهای مستقل، درنظر بگیریم.

۱) مثلاً، حجم V ازاستوانهٔ مستدیر، تابعی است از R شعاع قاعده‌و H ارتفاع آن بستگی بین این متغیرها، بادستور زیر بیان می‌شود:

$$V=\pi R^{۲}H$$

که با معلوم‌بودن متغیرهای مستقل R و H، می‌توان مقدار V نظیر را، پیدا کرد.

روشن است که حجم V مجروط ناقص، تابعی است از سه متغیر مستقل: شعاع‌های R و r دوقاعده و ارتفاع H آن، از روی دستور

$$V=\frac{\pi H}{۳}(R^{۲}+R\cdot r+r^{۲})$$

۲) بنا به قانون اُهم، فشار (ولتاژ) V در مدار جریان الکتریکی، با مقاومت Rمدار و شدت I جریان، با دستور $V=RI$ به‌هم مربوطاند. اگر V و R را مفروض بگیریم،در آن‌صورت، I، همچون تابعی از V و R معین می‌شود:

$$I=\frac{V}{R}$$

۳) فرض کنیم، درجهٔ حرارت جرم گاز موجود در زیر پیستون سیلندر، ثابت نباشد؛

در این صورت، حجم V و فشار p یك مولکول گرم گـاز، بادستور کلاپیرون، بـه‌درجهٔ حرارت (مطلق) آن T، مربوط می‌شود:

$$pV = RT \qquad (R = \text{const.})$$

از این‌جا اگر، مثلاً، V و T را متغیر مستقل بگیریم، تابع p را، برحسب آن‌ها، می‌توان این‌طور بیان کرد:

$$p = \frac{RT}{V}$$

۴) در مطالعهٔ حالت فیزیکی یك جسم، غالباً پیش می‌آید که شاهدتغییر ویژگی‌های آن (از قبیل وزن مخصوص، درجهٔ حرارت، پتانسیل الکتریکی و ...)، از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر هستیم. همهٔ این کمیت‌ها، «تابعی از نقطه» یا اگر بخواهیم، تابعی از مختصات x و y و z نقطه است. اگرحالت فیزیکی جسم، در زمان هم تغییرکند، آن وقت، به‌این‌متغیرهای مستقل، زمان t نیز اضافه می‌شود. در این حالت، با تابعی ازچهار(متغیرمستقل، سروکارداریم.

خواننده، خود می‌تواند، از این‌گونه مثال‌ها، تا آن‌جا که بخواهد، پیدا کند.

دقیق‌ترکردن مفهوم تابع را، درحالت چند متغیر مستقل، با حالت ساده‌ای که تنها دو متغیر مستقل داشته باشد، آغاز می‌کنیم.

۱۶۰. تابع‌های با دو متغیر وحوزهٔ تعریف آن‌ها. وقتی کـه دربـارهٔ تغییر دو متغیر مستقل x و y صحبت می‌کنیم، هربار باید مشخص کنیم که، کدام زوج مقدارهای (x, y) را می‌توانند با هم اختیار کنند مجموعهٔ $\mathcal{M}$ این زوج‌ها، حـوزهٔ تغییر متغیرهای x و y را تشکیل می‌دهد.

خود تعریف مفهوم تابع را، می‌توان، با همان عبارت‌هایی‌که برای حالت یك متغیر مستقل توضیح داده‌ایم، روشن کرد:

متغیر z (با حوزهٔ تغییر $\mathcal{Z}$) را، تابع متغیرهای مستقل x و y در مجموعهٔ $\mathcal{M}$ گویند، وقتی کـه، هر زوج (x, y) از $\mathcal{M}$ ــ بنابر قاعده یا قانونی ــ متناظر با مقدار معینی از z (از $\mathcal{Z}$) باشد.

در این‌جا، توجه ما به تابع یك ارزشی است، ولی به‌سادگی می‌تـوان، این تعریف را، برای حالت تابع چندارزشی هم، تعمیم داد.

مجموعهٔ $\mathcal{M}$ را ــ که ازآن صحبت‌کردیم ــ حوزهٔ تعریف تابع و متغیرهای x و y را، نسبت به‌تابع آن‌ها z، آوند (آرگومان) گویند. بستگی تابعی z از x و y را، شبیه حالت یك متغیر مستقل، این طور نشان می‌دهند:

$$z=f(x,y),\qquad z=\varphi(x,y),\qquad z=z(x,y),\ \dots$$

اگر زوج (x_0, y_0) از $\mathcal{M}$ اختیار شود، آن‌گاه $f(x_0, y_0)$ به معنای مقدار (عددی) تابع، به‌ازای $x=x_0$ و $y=y_0$ است.

چند مثال از تابع‌هایی که به صورت تحلیلی ـ یعنی به‌صورت رابطه ـ داده شده‌اند، می‌آوریم و حوزهٔ تعریف آن را معین می‌کنیم. رابطه‌های

۱) $z=xy$ و ۲) $z=x^2+y^2$

تابع‌هایی را تعریف می‌کنند، که برای همهٔ زوج‌های (x, y)، بدون استثنا، معین هستند. رابطه‌های

۳) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و ۴) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(اگر بخواهیم، بامقدارهای حقیقی ومتناهی z، سروکار داشته باشیم)، تنها به‌ازای زوج‌هایی از (x, y) معین هستند که، به ترتیب، در نابرابری‌های زیر صدق کنند:

$$x^2+y^2\leqslant 1 \quad \text{یا} \quad x^2+y^2<1$$

رابطهٔ

۵) $$z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$$

برای آن مقدارهای x و y، معین است که، به‌طور جداگانه، درنابرابری‌های زیر صدق کنند:

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b$$

درهمهٔ این حالت‌ها، فراخ‌ترین حوزهٔ طبیعی [۴۶، ۲°] کاربرد رابطه‌ها را، مشخص کردیم.

حالا، به‌این مثال می‌پردازیم:

۶) فرض کنیم، ضلع‌های یك مثلث، به دلخواه و تنها با این شرط که محیط آن برابر است با مقدار ثابت $2p$، تغییر کنند. اگر دو ضلع مثلث را، x و y بگیریم، ضلع سوم برابر $2p-x-y$ می‌شود، به نحوی که مثلث، باضلع‌های x و y، کاملاً مشخص است. بستگی مساحت z این مثلث، به ضلع‌های آن، به‌چه ترتیب است؟

بنابر دستور هرون، این مساحت، چنین بیان می‌شود:

$$z=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

در این‌جا، حوزهٔ تعریف $\mathcal{M}$ این تابع، به‌پرسش‌های مشخصی که‌در بارهٔ تابع مطرح می‌شود، بستگی دارد. چون، هرضلع مثلث مثبت وکوچکتر از نصف محیط‌است، باید این‌نابرابری‌ها، برقرار باشد:

$$0<x<p,\ 0<y<p,\ x+y>p$$

و این‌ها، حوزهٔ $\mathcal{M}$ را مشخص می‌کنند*.

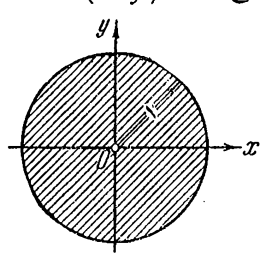
درمورد تابع‌های بایك متغیر، حوزهٔ استاندارد برای تغییر متغیر، عبارت بود از یك بازه (متناهی یا نامتناهی). ولی، در مورد تابع بادومتغیر، با گوناگونی وپیچیدگی بیشتری در بازهٔ حوزهٔ ممکن (و طبیعی) تغییر آوندها، روبه‌رو هستیم.

تعبیر هندسی این حوزه‌ها، می‌تواند بررسی آن‌ها را خیلی ساده کند. اگر دو محور عمود برهم را، درصفحه، اختیار کنیم و، طبق معمول، مقدارهای x و y را روی آن‌ها منتقل کنیم، آن‌وقت، همان‌طورکه می‌دانیم، هر زوج (x, y)، به‌صورتی یك ارزشی، نقطه‌ای از این صفحه را معین می‌کند و برعکس.

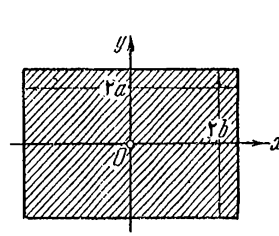
بنابراین، برای مشخص کردن خصلت زوج‌های (x, y) ــ که به‌ازای آن‌ها، تابع مفروض معین است ــ ساده‌تر از هر کار، این‌است که ببینیم، چه شکلی از صفحه، با این نقطه‌ها پر می‌شود!

به‌این ترتیب، می‌توان گفت‌که تابع‌های ۱) و ۲)؛ درتمامی صفحه، معین هستند؛ تابع ۳) در دایره‌ای بسته (یعنی شامل محیط) و تابع ۴) در دایره‌ای باز (بدون محیط) (شکل ۸۹)، تابع ۵) در یك مستطیل (شکل ۹۰) و بالاخره تابع ۶) در مثلثی باز (شکل ۹۱)، معین هستند.

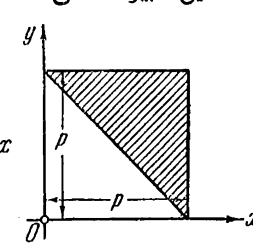
این تعبیر هندسی آن‌قدر ساده است که، معمولا، زوج عدد (x, y) را «نقطه» و



شکل ۹۱



شکل ۹۰



شکل ۸۹

*) همان‌طورکه می‌بینید، به‌این مطلب توجه نکردیم‌که خود رابطه، در حوزهٔ گسترده‌تری هم، مثلاً برای $x>p$ و $y>p$، معنا دارد.

مجموعهٔ این «نقطه‌ها» را، به‌نام شکل هندسی معرف آن‌ها (در دستگاه محورهای مختصات) می‌نامند. مثلاً، مجموعهٔ «نقطه‌ها»، یا زوج عددهای (x, y)، که در نابرابری‌های

$$a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant x \leqslant d$$

صدق می‌کنند، «مستطیلی» را تشکیل می‌دهند که بُعدهای آن برابر است با $b-a$ و $d-c$. آن‌را با نماد $[a, b; c, d]$ نشان می‌دهند، که با نماد بازه شباهت دارد. مجموعهٔ «نقطه‌ها» یا زوج‌های (x, y)، که در نابرابری

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2$$

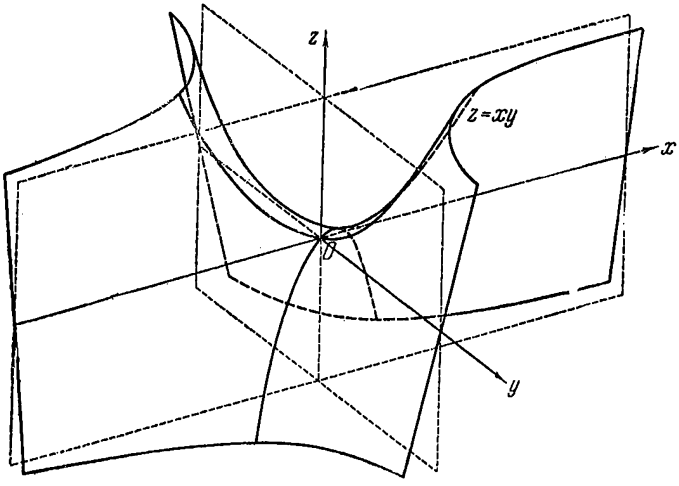
صدق می‌کنند، عبارت است از «دایرهٔ» به مرکز «نقطهٔ» (α, β) و شعاع r و غیره.

همان‌طور که تابع $y=f(x)$ را، از لحاظ هندسی، با نمودار آن [۴۷] نشان می‌دادیم، معادلهٔ $z=f(x, y)$ را هم می‌توان به‌طور هندسی، تعبیر کرد. دستگاه محورهای مختصات قائم x، y، z را، در فضا، در نظر می‌گیریم، و در صفحهٔ xy، حوزهٔ $\mathcal{M}$ تغییر متغیرهای x و y را رسم می‌کنیم، سپس، در هر نقطهٔ $M(x, y)$ این حوزه، عمودی بر صفحهٔ xy اخراج، و روی آن، مقدار $z=f(x, y)$ را جدا می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌هایی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، نمودار فضائی تابع مفروض را تشکیل می‌دهد. این نمودار، در حالت کلی یك سطح است و برابری $z=f(x, y)$، به‌نوبهٔ خود، معادلهٔ سطح نامیده می‌شود.

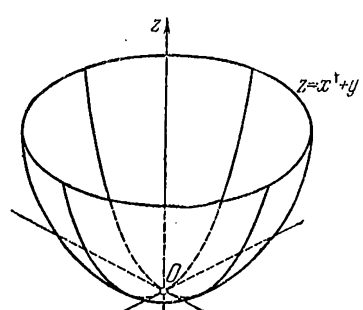
به‌عنوان مثال، شکل‌های ۹۲، ۹۳، ۹۴، معرف شکل‌های هندسی تابع‌های زیرهستند:

$$z=xy,\ z=x^2+y^2,$$

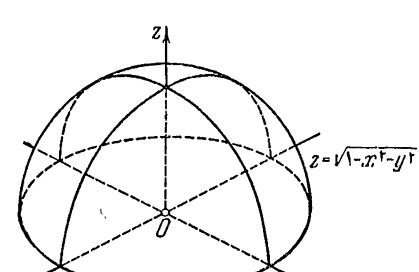
$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$



شکل ۹۲



شکل ۹۳



شکل ۹۴

اولی، یك سهموی هذلولی‌وار، دومی سهموی دوار و سومی نیم کره است.

در خاتمه، یادآوری می‌کنیم که، گاهی، با بررسی متغیر $x_{m,n}$ سروکار پیدا می‌کنیم، مقداری که با دو اندیس طبیعی m و n، علامت‌گذاری شده‌است (هرکدام از آن‌ها، مستقل از دیگری، ردیف طبیعی عددها را می‌پیماید). چنین متغیری را، به‌معنایی، می‌توان تعمیم مفهوم واریانت x_n دانست.

مثلاً، می‌توان فرض کرد:

$$x_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!n!},\ x_{m,n}=\frac{1}{m^2+n^2},\ x_{m,n}+\frac{(m+1)\cdot n}{m\cdot(n+1)},\ \ldots$$

در واقع، باید m و n را همچون متغیرهای مستقل، و متغیر $x_{m,n}$ را به عنوان تابعی از آن‌ها، در نظر گرفت. حوزهٔ تغییر متغیرهای مستقل، در حالت مفروض، از لحاظ هندسی معرف شبکه‌ای از نقطه‌ها، در ربع اول محورهای مختصات است.

۱۶۱. فضای حسابی n بعدی. برای طرح تابع‌هایی که به n متغیر مستقل بستگی دارند ($n\geqslant 3$)، ابتدا به دستگاهی می‌پردازیم که شامل n مقدار متغیر باشد.

درحالت $n=3$، این دستگاه، از سه عدد (x, y, z) تشکیل شده است و، همان‌طور که برای خواننده روشن است، می‌توان آن را متناظر با نقطه‌ای از فضا دانست، به‌نحوی که مجموعهٔ این سه‌تائی‌ها، بخشی از فضا، یا یك جسم فضائی را به‌وجود می‌آورند. ولی در حالت $n>3$، به دلیل این که احساسی برای چنین فضاهائی نداریم، امکانی برای تعبیر هندسی وجود ندارد.

با وجود این، برای تعمیم روش‌های هندسی در آنالیز ریاضی (که درمورد تابع‌های با دو یا سه متغیر، فوق‌العاده مفید بودند)، نظریهٔ فضاهای n بعدی را (برای $n>3$) به‌وجود آورده‌اند.

دستگاهی از n عدد حقیقی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را به‌عنوان یك نقطهٔ (n بعدی) در M

نظر می‌گیریم و خود عددهای x_1، x_2، ...، x_n را، مختصات نقطهٔ M را به حساب می‌آوریم*. مجموعهٔ همهٔ «نقطه‌های» n بعدی، فضای n بعدی را به وجود می‌آورند (که گاهی، آن را فضای حسابی یا فضای عددی هم می‌گویند).

به راحتی، می‌توان مفهوم «فاصلهٔ» MM'، بین دو «نقطهٔ» (n بعدی)

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n),\ M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

را، با تعمیم دستور معلوم هندسهٔ تحلیلی، تعریف کرد:

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2} \qquad (1)$$

که به ازای $n = 2$ و $n = 3$، به همان فاصلهٔ معمولی بین دو نقطه، منجر می‌شود.

حالا، «نقطهٔ» سومی را وارد می‌کنیم:

$$M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$$

چگونه می‌توان نابرابری زیر را، در مورد «فاصله‌های» $\overline{MM'}$، $\overline{M'M''}$ و $\overline{MM''}$ (که یادآور این قضیهٔ معلوم هندسه است: «ضلع مثلث، ازمجموع دو ضلع دیگر آن، تجاوز نمی‌کند»)، می‌توان ثابت کرد؟

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''} \qquad (2)$$

درواقع، برای عددهای حقیقی و دلخواه a_1، a_2، ...، a_n، و b_1، b_2، ...، b_n، این نابرابری برقرار است**:

---

*) وقتی با تعداد نامعینی متغیر سروکار داریم، بهتر است که آن‌ها را، به‌جای انتخاب حرف‌های مختلف، با یک حرف و اندیس‌های متفاوت، نشان دهیم. به این ترتیب، x_i (بر خلاف بعضی موردهای قبلی)، به‌معنای مقدار iام یک متغیر نیست، بلکه خود متغیر iام را معرفی می‌کند، که، به نوبهٔ خود، می‌تواند، مقدارهای مختلفی را اختیار کند.

**) این نابرابری حالت خاصی از نابرابری مینکووسکی است که قبلاً [۱۳۳، (۷)] دیده‌ایم (به‌ازای $k = 2$). اگردوطرف این نابرابری را مجذور کنیم وجمله‌های برابر را از دوطرف حذف کنیم، به نابرابری معلوم کوشی [۱۳۳، (5a)] می‌رسیم. اثبات مقدماتی نابرابری اخیر، وهمراه با آن، اثبات نابرابری متن را می‌آوریم.

روشن است که سه‌جمله‌ای مربع کامل

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

مقدارهای منفی را قبول نمی‌کند و، درچنین حالتی، نمی‌تواند دو ریشهٔ حقیقی مختلف داشته

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

اگر فرض کنیم:

$$a_i = x_i' - x_i,\ b_i = x_i'' - x_i',\ (a_i+b_i = x_i'' - x_i)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

به دست می‌آید:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i')^2}$$

که با (۲) هم‌ارز است. بنابراین، این ویژگی «فاصله»، در فضای n بعدی هم وجود دارد.

در «فضای» n بعدی، می‌توان «منحنی‌های» پیوسته را هم مورد بررسی قرار داد.

می‌دانیم [۱۰۶] که معادله‌های

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

که در آن‌ها، $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ تابع‌های پیوسته‌ای از پارامتر t در یك بازهٔ $[t', t'']$ هستند، منحنی پیوسته‌ای را، درصفحه، مشخص می‌کنند. به‌همین ترتیب و به‌کمك سه تابع پیوستهٔ

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$$

منحنی پیوسته‌ای در فضا (معمولی) مشخص می‌شود. این مطلب را تعمیم می‌دهیم و n تابع پیوسته، نسبت به t، را درنظر می‌گیریم:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t)\ \ (t' \leqslant t \leqslant t'')$$

آن وقت، مجموعهٔ نقطه‌های

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

که به‌ازای مقدارهای مختلف پارامتر t به‌دست می‌آیند، «منحنی» پیوسته در «فضای» n بعدی را تشکیل می‌دهند. با فرض

باشد و عبارت

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}b_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right]^2$$

باید منفی باشد و این، هم‌ارز نابرابری کوشی است.

$$x_1' = \varphi_1(t'), \ldots, x_n' = \varphi_n(t'); \; x_1'' = \varphi_1(t''), \ldots, x_n'' = \varphi_n(t'')$$

می‌توان گفت که این «منحنی»، «نقطه‌های» زیر را به هم می‌پیوندد:

$$M'(x_1', \ldots, x_n'), \; M''(x_1'', \ldots, x_n'')$$

درحالتی که، همهٔ تابع‌های φ_1، ...، φ_n خطی باشند، «منحنی» به «خط»

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \ldots, x_n = \alpha_n t + \beta_n$$

تبدیل می‌شود. در این‌جا، فرض می‌شود که ضریب‌های α_1، ...، α_n، باهم برابر ۰ نیستند و پارامتر t هم، از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. فرض بر این است که «نقطه‌ها» پشت‌سرهم و یکی‌بعد ازدیگری، به‌ترتیب صعود پارامتر می‌آیند؛ اگرداشته باشیم $t' < t < t''$، آن‌گاه از نقطه‌های نظیر M'، M، M''، نقطهٔ M بین دو نقطهٔ دیگر قرار می‌گیرد، چرا که پس‌از M' و قبل از M'' قراردارد. باقبول این شرط‌ها، به سادگی ثابت می‌شود که، فاصله‌های بین‌آن‌ها، در رابطهٔ زیر، صدق می‌کنند:

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''}$$

که از خصلت‌های خط، در فضای معمولی است.

معادلهٔ خطی را، که از دو «نقطهٔ»

$$M'(x_1', \ldots, x_n'), \; M''(x_1'', \ldots, x_n'')$$

می‌گذرد، می‌توان به سادگی، به‌صورت زیر نوشت:

$$x_1 = x_1' + t(x_1'' - x_1'), \ldots, x_n = x_n' + t(x_n'' - x_n') \qquad (-\infty < i < +\infty)$$

ضمناً، خود نقطه‌های M' و M''، دراین‌جا، به‌ازای $t = 0$، ۱، به‌دست می‌آیند. اگر t را، تنها از ۰ تا ۱ تغییر دهیم، درآن صورت، «پاره خطی» به دست می‌آیدکه این دو «نقطه» را به‌هم وصل می‌کند.

اگر «منحنی»، ازتعداد محدودی «پاره خط» تشکیل شده باشد، «خط شکسته» نامیده می‌شود.

۱۶۲. مثال‌های حوزه، در فضای n بعدی. حالا، به بررسی چند مثال از «جسم‌ها» یا «حوزه‌ها» در «فضای» n بعدی، می‌پردازیم.

۱) مجموعهٔ نقطه‌های $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، که مختصات آن‌ها، مستقل از یکدیگر، در نابرابری‌های

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2,\ \ldots,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

صدق کنند، «مکعب مستطیل» (nبعدی) نامیده می‌شود و این‌طور نشان داده می‌شود:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n]$$

به ازای $n=2$، همان «مستطیلی» که از آن در شمارهٔ ۱۶۰ صحبت شد، بـه دست می‌آید. «مکعب مستطیل» سه بعدی در فضا، هم همان مکعب مستطیل عادی نظیر خواهد بود.

اگر در رابطه‌های مفروض، نشانه‌های برابری را کنار بگذاریم:

$$a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2,\ \ldots,\ a_n < x_n < b_n$$

یك «مکعب مستطیل» باز به‌دست می‌آید:

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n)$$

طبعاً، در برابر این حالت، حـالت قبلی را «مکعب مستطیل» بسته می‌نـامیم*. تفاضل‌هـای $b_1 - a_1$، $b_2 - a_2$، ...، $b_n - a_n$، بعدهای «مکعب مستطیل» (در هردوحالت) و نقطهٔ

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$$

را، مرکز آن (باز هم در هردوحالت) گویند.

همسایگی نقطهٔ $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، عبارت است از «مکعب مستطیل» غیرمشخص

$$(x_1^0-\delta_1, x_1^0+\delta_1; x_2^0-\delta_2, x_2^0+\delta_2; \ldots; x_n^0-\delta_n, x_n^0+\delta_n) \qquad (3)$$
$$(\delta_1, \delta_2, \ldots, >0)$$

به مرکز M_0. اغلب، به‌جای آن، «مکعب»

$$(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta; x_2^0-\delta, x_2^0+\delta; \ldots; x_n^0-\delta, x_n^0+\delta) \qquad (\delta>0)$$

را درنظرمی‌گیرند، که همهٔ بعدهای آن، برابر است با 2δ.

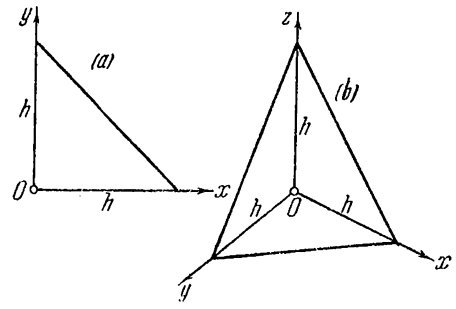
۲) مجموعهٔ «نقطه‌های» $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را درنظرمی‌گیریم، که مختصات آن‌ها در نابرابرهای زیر، صدق کنند:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant h \qquad (h>0)$$

---

*) همچنین، می‌توان «مکعب مستطیل» نامتناهی را در نظر گرفت که، درآن، همهٔ بازه‌ها (یا بعضی از آن‌ها)، نامتناهی هستند.

هروقت، از «مکعب مستطیل» n بعدی صحبت می‌کنیم، اگر قید مخالفی نشده باشد، منظورمان، یك «مکعب مستطیل» متناهی است.



شکل ۹۵

این مجموعه، در حالت $n=2$، متناظر با یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و، در حالت $n=3$، متناظر با یك چهاروجهی است (شکل ۹۵). در حالت کلی، آن را سیمپلکس* می‌نامند (و به‌خصوص، سیمپلکس بسته؛ البته، اگر در نابرابری‌های فوق، نشانه‌های برابری را حذف کنیم، با سیمپلکس باز سروکار خواهیم داشت).

۳) سرانجام، مجموعه «نقطه‌های» $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نظر می‌گیریم، که با نابرابری زیر، مشخص شده باشد:

$$(x_1-x_1^\circ)^2+(x_2-x_2^\circ)^2+\dots+(x_n-x_n^\circ)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{یا} <r^2)$$

اگر $M_\circ(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$، «نقطه‌ای» ثابت و r عدد مثبت و ثابتی باشد، این مجموعه، «کرهٔ» n بعدی بسته (یا باز) به‌مرکز $M_\circ$ و شعاع r را تشکیل می‌دهد. به‌زبان دیگر: «کره» عبارت است از مجموعهٔ «نقطه‌های» M، که «فاصلهٔ» آن‌ها، از «نقطهٔ» ثابت $M_\circ$، از r تجاوز نکند (یا از آن کوچکتر باشد). به خودی خود روشن است که این «کره»، به‌ازای $n=2$، دایره [با ۱۵۰ مقایسه کنید]، و به‌ازای $n=3$، کرهٔ معمولی است.

«کرهٔ» باز به‌شعاع نامشخص $r>0$ به مرکز $M_\circ(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ را هم می‌توان به عنوان همسایگی این نقطه در نظر گرفت، که در برابر اصطلاح قبلی همسایگی «مکعب مستطیلی»، آن را همسایگی «کروی» می‌نامیم.

بهتر است که، یك‌بار برای همیشه، روشن کنیم که، اگر نقطهٔ $M_\circ$، به‌وسیلهٔ یکی از این دونوع همسایگی، محصور شده باشد، آیا می‌توان آن را به‌وسیلهٔ همسایگی نوع دیگر، چنان محصور کرد، به‌نحوی که در درون همسایگی اول قرار گرفته باشد؟

فرض می‌کنیم، ابتدا «مکعب مستطیل» (۳)، به مرکز «نقطهٔ» $M_\circ$ داده شده باشد. کافی است «کرهٔ» باز، باهمان مرکز و شعاع r کوچکتر از همهٔ δ_iها $(i=1, 2, \dots, n)$ انتخاب شود، تا این «کره» در درون «مکعب مستطیل» قرار گیرد. در واقع، برای هر «نقطهٔ» $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ این «کره» خواهیم داشت (برای هر $i=1, 2, \dots, n$):

$$|x_i-x_i^\circ| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^\circ)^2} = \overline{MM_\circ} < r < \delta_i$$

*) از واژهٔ لاتینی «simplex» به معنای «ساده». سیمپلکس، عملاً عبارت است از ساده‌ترین «جسم» چند وجهی، که در فضای مفروض، کمترین تعداد وجه را داشته باشد.

یا

$$x_i^\circ - \delta_i < x_i < x_i^\circ + \delta_i$$

به‌نحوی که، این «نقطه»، به «مکعب مستطیل» مفروض، تعلق دارد.

برعکس، اگر «کره‌ای» به‌شعاع r و به‌مرکز $M_\circ$ مفروض باشد، آن گاه، «مکعب مستطیل» (۳)، مثلاً به‌ازای $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \frac{r}{\sqrt{n}}$، در درون آن، قرار دارد. ایـن، از آن جا ناشی می‌شود که «نقطهٔ» نامشخص $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از این «مکعب‌مستطیل» از نقطهٔ $M_\circ$، به «فاصلهٔ»

$$\overline{MM}_\circ = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^\circ)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2} = r$$

قراردارد و، بنابراین، به «کرهٔ» مفروض، تعلق دارد.

۱۶۳. تعریف کلی حوزهٔ باز و بسته. نقطهٔ $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ را، «نقطهٔ» درونی مجموعهٔ $\mathcal{M}$ (از «فضای» n بعدی) مـی‌نامیم، اگر این نقطه، با یك همسایگی به‌قدر کافی کوچك خود، به‌مجموعهٔ $\mathcal{M}$ تعلق داشته باشد.

ازحکمی که درپایان شمارهٔ قبل ثابت کـردیم، به‌روشنی نتیجه می‌شود کـه، هر نوع همسایگی که در این‌جا مورد نظر باشد ــ «مکعب مستطیلی» یا «کروی» ــ بی‌تفاوت است.

برای «مکعب مستطیل» باز

$$(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n) \qquad (۴)$$

هر نقطهٔ آن، یك نقطهٔ درونی است. در واقع، اگرداشته باشیم:

$$a_1 < x_1' < b_1, \ldots, a_n < x_n' < b_n$$

آن گاه، می‌توان به‌سادگی، چنان $\delta > 0$ را پیدا کرد، که برای آن داشته باشیم:

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b, \ldots, a_n < x_n' - \delta < x_n' + \delta < b_n$$

به‌همین ترتیب، درحالت «کرهٔ» باز به‌شعاع r و مرکز $M_\circ$، هر نقطهٔ M' متعلق به‌آن، برای آن، درونی است. اگر ρ را طوری انتخاب کنیم که

$$0 < \rho < r - \overline{M'M}_\circ$$

و دور M'، «کره‌ای» با این شعاع ρ رسم کنیم، در «کرهٔ» اولی قرارخواهد گرفت، تنها به شرطی که داشته باشیم $\overline{MM'} < \rho$ وهمزمان با آن [۱۶۰، (۲)]:

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r$$

به‌نحوی که «نقطهٔ» M، به «کرهٔ» اصلی تعلق داشته باشد.

همین نتیجه را، درمورد سیمپلکس بازهم، می‌توان گرفت:

$$x_1 > 0, \ldots, x_n > 0; \; x_1 + x_2 + \cdots + x_n < h (h > 0)$$

مجموعه‌ای راکه، به‌طور کلی، ازنقطه‌های درونی تشکیل شده باشد، «حوزهٔ» باز می‌نامیم.

به این ترتیب، «مکعب مستطیل» باز، «کرهٔ» باز و سیمپلکس باز، نمونه‌هایی از «حوزهٔ» باز هستند.

حالا، مفهوم نقطهٔ تجمع [۵۲] را، برای حالت مجموعهٔ $\mathcal{M}$ در «فضای» n بعدی، تعمیم می‌دهیم. «نقطهٔ» M_0 را «نقطهٔ تجمع» مجموعهٔ $\mathcal{M}$ گویند، اگر در هرهمسایگی آن (ازهرگونه همسایگی‌که باشد، بی تفاوت است)، دست‌کم یك «نقطه» ازمجموعهٔ $\mathcal{M}$، متمایز از M_0 وجود داشته باشد.

«نقطهٔ تجمع»، برای هر «حوزهٔ» باز، وقتی که متعلق به آن نباشد، «نقطهٔ» مرزی این «حوزه» نامیده می‌شود «نقطه‌های» مرزی، درمجموع، «مرزحوزه» را تشکیل می‌دهند. «حوزهٔ» باز با مرزآن، روی هم، «حوزهٔ» بسته نامیده می‌شود.

به‌سادگی دیده‌می‌شود که‌برای «مکعب مستطیل» باز (۴)، نقطه‌های $M(x_1, \ldots, x_n)$، که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

وضمناً، دست‌کم دریك مورد، برابری برقرار باشد، «نقطه‌های» مرزی خواهند بود.

به‌همین ترتیب، درمورد «کرهٔ» باز، «نقطه‌های» M مرزی خواهند بود، وقتی که، برای آن‌ها، دقیقاً، داشته باشیم: $\overline{MM_0} = r$.

بالاخره، درحالت، سیمپلکس باز (۵). «نقطه‌های» $M(x_1, \ldots, x_n)$ که در رابطه‌های

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \; x_1 + x_2 \cdots + x_n \leqslant h$$

صدق کنند، مرزی هستند، به‌شرطی که، ضمناً، ولو برای یك‌بار، علامت تساوی برقرار باشد.

به‌این ترتیب، «مکعب مستطیل» بسته، «کرهٔ» بسته وسیمپلکس بسته، نمونه‌هایی از «حوزهٔ» بسته را، به‌دست می‌دهند.

ازاین به‌بعد، هر جا که از «حوزه» ـ بسته یا باز ـ صحبت کنیم، همواره، آن را به‌مفهوم خاصی که دراین‌جا مورد بحث قراردادیم، درنظرداریم.

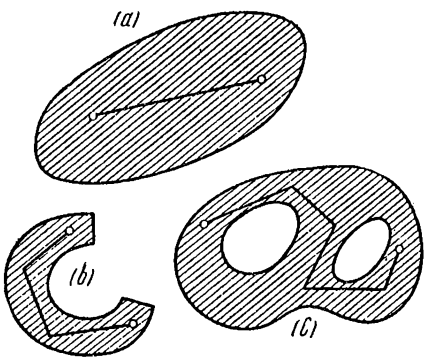
حالا، ثابت می‌کنیم که، همهٔ «نقطه‌های تجمع» یك «حوزهٔ» بسته، به‌خود آن تعلق دارند. «حوزهٔ» بستهٔ $\overline{\mathcal{D}}$ و نقطهٔ M_0 درخارج آن را، در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که M_0، نمی‌تواند «نقطهٔ» تجمع برای $\overline{\mathcal{D}}$ باشد.

«حوزهٔ» بستهٔ $\overline{\mathcal{D}}$، از یك «حوزهٔ» باز $\mathcal{D}$ و از راه الحاق «مرز» آن $\mathcal{E}$ به‌آن، به‌دست آمده است. روشن است که M_0، «نقطهٔ» تجمع برای $\mathcal{D}$ نیست. درنتیجه، M_0 را با چنان «کرهٔ»بازی می‌توان محصور کرد، که در آن، اصلاً نقطه‌ای از $\mathcal{D}$ وجود نداشته باشد. ولی در آن‌صورت، «نقطه‌ای» از $\mathcal{E}$ هم در آن نمی‌تواند باشد، زیرا اگر یك «نقطهٔ» M' از $\mathcal{E}$ در آن پیدا می‌شد، آن وقت، یك همسایگی «نقطهٔ» M نیز، به تمامی، در آن واقع می‌شد، و دراین همسایگی، حتی یك «نقطه» از $\mathcal{D}$ هم پیدا نمی‌شود، که متناقض «نقطهٔ تجمع» و مجموعهٔ $\mathcal{E}$ به‌عنوان «مرز» است. بنابراین، در «کرهٔ» نامبرده، «نقطه‌ای» از $\overline{\mathcal{D}}$ وجود ندارد و حکم ثابت است.

به‌طور کلی، وقتی که مجموعهٔ «نقطه‌ای» $\mathcal{M}$، شامل همهٔ «نقطه‌های» تجمع خود باشد، مجموعهٔ بسته نامیده می‌شود. به‌این‌ترتیب، «حوزهٔ» بسته، حالت خاصی ازمجموعهٔ بسته است.

به‌چند اصطلاح دیگر هم، توجه کنیم. مجموعهٔ «نقطه‌های» M را کران‌دار گویند، وقتی که به‌تمامی دریك «مکعب مستطیل» واقع شود.

«حوزه» را یك‌پارچه (یا مرتبط) گویند، وقتی که‌هردو «نقطهٔ» آن را بتوان به‌وسیلهٔ «خط‌شکسته‌ای» به‌هم وصل کرد که همهٔ «نقطه‌های» آن، متعلق به «حوزه» باشند. برای روشن‌شدن مطلب، درشکل ۹۶، چند حوزهٔ یك‌پارچه درصفحه، نشان داده شده است.



شکل ۹۶

«فضای» n بعدی کران‌دار و یك‌پارچه (باز و یا بسته)، به معنایی، شبیه بازهٔ متناهی (به‌ترتیب، باز یا بسته) است. باوجود این، خواننده می‌بیند، طرحی که برای رسیدن به‌حالت n بعدی ($n \geqslant 2$) دنبال کردیم، تا چه‌حد دشوار است. بازهٔ ساده و یك‌گونه‌ای، که تنها دونقطه در مرزهای آن قرار داشت، دراین‌جا، به «حوزهٔ» فوق‌العاده گوناگونی تبدیل می‌شود، که «مرزهای» بی‌اندازه بغرنجی دارد.

همهٔ آن‌چه را که درشمارهٔ اخیر شرح دادیم، می‌توان به‌عنوان تلاشی درجهت

پیدا کردن یك زبان هندسی به‌حساب آورد؛ با وجود این، برای $n>3$، هیچ گونه تصور هندسی واقعی، نمی‌توان داشت، ولی تاکید بر این موضوع مفید است که، فضای n بعدی (حسابی) را، تنها باید نخستین گام در جهت تعمیم مفهوم فضا، به‌صورتی که در آنالیز ریاضی معاصر معمول است، دانست*.

۱۶۴. تابع با n متغیر. n متغیر x_1، x_2، ...، x_n را در نظر می‌گیریم، به نحوی که، مقدارهای توام آن‌ها را بتوان، از یك مجموعهٔ نقطه‌های $\mathcal{M}$ فضای n بعدی، انتخاب کرد؛ این متغیرها را متغیرهای مستقل می‌نامیم. تعریف تابع وهمهٔ آن‌چه را که درمورد آن، برای حالت دو متغیر مستقل، گفته‌ایم [۱۶۰]، می‌توان در این‌جا هم تکرار کرد، به‌نحوی که لزومی ندارد، با تفصیل، دراین‌باره صحبت کنیم.

اگر نقطهٔ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را با M نشان دهیم، آن‌گاه، تابع $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ازاین متغیرها را، گاهی، تابع نقطهٔ M هم‌می‌نامند و با نماد $u=f(M)$ نشان می‌دهند.

حالا، فرض می‌کنیم که درمجموعه‌ای مثل $\mathcal{P}$ از نقطه‌های m بعدی (که در آن، m ربطی به n ندارد)، n تابع از m متغیر t_1، t_2، ...، t_m داده شده باشد:

$$x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots \quad x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \qquad (5)$$

و یا کوتاه‌تر

$$x_1=\varphi_1(P), \dots \quad x_n=\varphi_n(P) \qquad (5a)$$

که در آن‌ها، P عبارت‌است از نقطهٔ $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ از فضای m بعدی. علاوه بر آن، فرض می‌کنیم که، وقتی نقطهٔ $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$، درمحدودهٔ مجموعهٔ $\mathcal{P}$ تغییر می‌کند، متناظر با آن، نقطهٔ n بعدی M با مختصات (۵) [یا (۵a)]، از محدودهٔ مجموعهٔ n بعدی $\mathcal{M}$ ــ که تابع $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(M)$ را تعریف می‌کند ــ خارج نشود.

دراین‌صورت، متغیر u را می‌توان، همچون تابع هرکبی از متغیرهای مستقل t_1، t_2، ...، t_n (در مجموعهٔ $\mathcal{P}$)، با واسطهٔ متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n، درنظر گرفت.

$$u=f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n))$$

u، تابعی از تابع‌های φ_1، ...، φ_n است. [با **۵۱** مقایسه کنید].

این روند تعریف تابع مرکب، ازروی φ_1، ...، φ_n و f (مثل حالت سادهٔ تابع با

---

*) تا این‌جا، برای این‌که بین اصطلاح‌های هندسی مورد استفاده، مثل «نقطه»، «فاصله»، «حوزه» و غیره، با اصطلاح‌های معمولی، تفاوتی گذاشته شود، آن‌ها را در گیومه قرار دادیم، ولی از این به‌بعد، ازاین‌کار، صرف‌نظر می‌کنیم.

یك متغیر) را، انطباق می‌نامند.

گروه تابع‌های چند متغیره‌ای که، مستقیماً و در اوایل کار، با آن‌ها سروکار داریم، خیلی وسیع نیست. درواقع، این گروه به‌کمك انطباق، روی تابع‌های مقدماتی با یك‌متغیر [۵۰،۴۸] و روی تابع‌های با دومتغیر بعدی، ساخته می‌شود:

$$z=x\pm y,\quad z=x\cdot y,\quad z=\frac{x}{y},\quad z=x^{y}$$

یعنی، بر چهارعمل حسابی و، به‌اصطلاح، تابع نمائی ـ توانی، تکیه دارد.

تکرار عمل‌های حسابی، با آغـاز از متغیرهای مستقل x_1، x_2، ...، x_n و مقدارهای ثابت، قبل‌ازهمه، ما را به‌چند جمله‌ای‌های صحیح می‌رساند*.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n} C_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}$$

(تابع‌گویای صحیح) ویا به‌خارج قسمت دوتا از این‌نوع چندجمله‌ای‌ها

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\sum C_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}\cdots x_n^{\mu_n}}$$

(تابع گویای کسری)

استفاده از تابع‌های مقدماتی با یك متغیر، مثلاً، به‌چنین تابع‌هایی منجر می‌شود:

$$f(x,y,z)=\frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi(x,y,z,t)=\sin xy+\sin yz+\sin zt+\sin tx,\dots$$

ملاحظه‌هایی که در **۴۶**، به بهانهٔ تابع تحلیلی با یك متغیر آوردیم، در این‌جا نیز، می‌تواند تکرار شود.

۱۶۵. حد تابع با چند متغیر. تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ را، دریك‌مجموعهٔ‌نقطه‌ای $\mathcal{M}$، با نقطهٔ تجمع مفروض $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$، معین می‌گیریم.

شبیه تعریفی که برای حد تابع با یـك متغیر داشتیم، دراین‌جا هم می‌گوییم: تابع $f(x_1, \dots, x_n)$، وقتی‌که x_1، ...، x_n به‌ترتیب به‌سمت a_1، ...، a_n میل کنند، حدی برابر A دارد، اگر به‌ازای هرعدد $\varepsilon>0$، چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود، به‌نحوی‌که شرط

---

*) می‌دانیم که علامت Σ به‌معنای مجموع‌جمله‌هائی ازیك‌نوع را نشان می‌دهد. دراین‌جا، حالت بسیار بغرنج‌تری است، که جمله‌ها، بستگی به‌چند اندیس دارند.

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$$

تنها وقتی برقرار باشدکه داشته باشیم

$$|x_1 - a_1| < \delta, \dots \quad |x_n - a_n| < \delta$$

ضمناً، فرض‌می‌کنیم که‌نقطهٔ $(x_1, \dots, x_n)$ متعلق به$\mathcal{M}$ ومتمایزاز$(a_1, \dots, a_n)$ باشد. به‌این ترتیب، برای تابع، باید درهر نقطهٔ مجموعهٔ $\mathcal{M}$، واقع درهمسایگی به‌قدرکافی کوچك

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \dots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

نقطهٔ M_0 ــ به‌جز خود این نقطه (اگر به $\mathcal{M}$ متعلق باشد) ــ برقرار باشد.

حد تابع را، به‌این‌ترتیب، نشان می‌دهند:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) \qquad (۶)$$

با اصطلاح‌های‌هندسی، و بامعرفی نقطه‌های$(x_1, \dots, x_n)$ و$(a_1, \dots, a_n)$ به‌وسیلهٔ M وM_0، می‌توانیم تعریف بالا را، این‌طور تنظیم کنیم: A را حد تابع $f(M)$، ضمن میل نقطهٔM به‌سمت M_0 (یا حد $f(M)$ درنقطهٔ M_0) گوییم، وقتی‌که بـه‌ازای هرعدد $\varepsilon > 0$، عددی مانند $r > 0$ وجود داشته باشدکه شرط

$$|f(M) - A| < \varepsilon$$

تنها وقتی برقرار باشد که $\overline{MM_0} < r$ باشد.

مانند قبل، نقطهٔ M متعلق بـه $\mathcal{M}$ ومتمایـز از M_0 فرض می‌شود. بنابـراین، باید نابرابری برای تابع، درهمهٔ نقطه‌های $\mathcal{M}$، واقـع در همسایگی کروی به‌قدرکافی کوچك نقطهٔ M_0 ــ به‌استثنای خود این نقطه ــ برقرار باشد.

طبق این تعریف، حد تابع را، می‌توان به‌این‌صورت نشان داد:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M) \qquad (۶^*)$$

از یادداشت شمارهٔ **۱۶۱** دربارهٔ نـوع‌های مختلف همسایگی، می‌تـوان مستقیماً، هم‌ارزبودن این دو تعریف را نتیجه گرفت.

مفهوم حد نامتناهی تابع هم، بـه‌ترتیب مشابهی، روشن می‌شود. وقتی‌که A برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، نابرابری

$$|f(x_1, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$$

به‌ترتیب، با یکی از نابرابری‌های زیر، عوض می‌شود:

$$f(x_1, \ldots, x_n) > E$$

یا

$$f(x_1, \ldots, x_n) < -E$$

که در آن‌ها، E عددی است مثبت و دلخواه، که از قبل انتخاب شده است.

در پایان، حالتی را یادآوری می‌کنیم که بعضی از متغیرهای مستقل x_1، ...، x_n، به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کنند.

می‌شد مفهوم نقطهٔ تجمع $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ حوزهٔ $\mathcal{M}$ را تعمیم داد و برای حالتی هم که همهٔ مختصات نقطهٔ M_0 (یا بعضی از آن‌ها) بی‌نهایت می‌شود، درنظر گرفت*.

مثلاً، نقطهٔ $(+\infty, \ldots, +\infty)$ برای $\mathcal{M}$، وقتی نقطهٔ تجمع است که، دراین حوزه نقطه‌های با مختصات به قدر کافی بزرگ (مثبت) پیدا شود.

دراین فرض می‌گویند، تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$، وقتی همهٔ متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n به‌سمت $+\infty$ میل می‌کنند، دارای حدی برابر A است، اگر به‌ازای هر عدد $r > 0$، چنان عدد $\Delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < r$$

تنها وقتی که

$$x_1 > \Delta, x_2 > \Delta, \ldots, x_n > \Delta$$

و به این ترتیب، نشان می‌دهند:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1, \ldots, x_n)$$

در حالت خاص، اگر به متغیر $x_{m,n}$، که در پایان شمارهٔ ۱۶۰ دربارهٔ آن صحبت کردیم، برگردیم، گویند: این متغیر، باافزایش نامحدود شماره‌های m و n، دارای حد A است، اگر برای هر عدد $\varepsilon > 0$، چنان شمارهٔ N پیدا شود که به‌ازای $m > N$ و $n > N$ داشته باشیم:

$$|x_{m,n} - A| < \varepsilon$$

---

*) درچنین حالتی، نقطهٔ M_0 را، غیر خاص می‌نامند.

و آن‌را، به این صورت می‌نویسند:

$$A = \text{حد}_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} x_{m,n} \quad \text{یا} \quad A = \text{حد}\, x_{m,n}$$

بحث حالتی که A برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، به‌سادگی، قابل درك است.

۱۶۶. حالت واریانت‌ها. دنبالهٔ نقطه‌های زیررا، درفضای nبعدی، درنظر می‌گیریم:

$$\{M_k(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\} (k = 1, 2, \ldots)$$

گوییم، این دنباله به‌سمت نقطهٔ حدی $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ میل می‌کند، اگر به‌ازای $k \to +\infty$، فاصلهٔ

$$\overline{M_0 M_k} \to 0 \qquad (۷)$$

به‌جای آن، می‌توانستیم بخواهیم که مختصات نقطهٔ M_k، جداجدا، به‌سمت مختصات نظیر نقطهٔ M_0 میل کنند. یعنی داشته باشیم:

$$x_1^{(k)} \to a_1^{(k)}, x_2^{(k)} \to a_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \to a_n^{(k)} \qquad (۸)$$

هم‌ارز بودن این‌دو تعریف را، می‌توان ازحکمی که دربارهٔ دونوع همسایگی مختلف، در **۱۶۱**، داشتیم، نتیجه گرفت. در واقع، شرط (۷) به‌این معناست که، هرچه باشد $r > 0$، نقطهٔ M_k، برای k به اندازهٔ کافی بزرگ، در نابرابری

$$\overline{M_0 M_k} < r$$

صدق می‌کند، یعنی در درون کرهٔ (باز) به‌شعاع r و مرکز M_0، واقع می‌شود. رابطهٔ (۸) نیز، به همین معناست: هر چه باشد عدد $\delta > 0$، نقطهٔ مفروض ــ بازهم برای k به‌قدرکافی بزرگ ــ در نابرابری‌ها زیر، صدق می‌کند:

$$|x_1^{(k)} - a_1| < \delta, \ldots, |x_n^{(k)} - a_n| < \delta$$

یعنی در درون مکعب مستطیل (باز)

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \ldots; a_n - \delta, a_n + \delta)$$

به مرکز همان نقطه، قرار می‌گیرد.

حالا، فرض می‌کنیم نقطهٔ $M_0(a_1, \ldots, a_n)$، نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $\mathcal{M}$ از فضای nبعدی باشد. آن‌وقت، همواره می‌توان، چنان دنباله‌ای متمایز از M_0، مثل $\{M_k\}$، از $\mathcal{M}$ بیرون آورد، که به‌سمت M_0 ــ به‌عنوان نقطهٔ حدی ــ میل کند.

برای اثبات، فرض می‌کنیم، واریانت مثبت r_k به‌سمت صفرمیل کند. از روی‌تعریف

نقطهٔ تجمع [۱۶۲]، در همسایگی کروی نقطهٔ M_0، به شعاع r_k، نقطهٔ M_k از مجموعهٔ $\mathcal{M}$ (متمایز از M_0) پیدا می‌شود. دنبالهٔ $\{M_k\}$، به‌روشنی، همان دنبالهٔ مطلوب است.

حالا، می‌توان، شرط لازم و کافی (۱، برای وجودتساوی حدی (۶) [یا (۶*)]،تنظیم کرد: اگر از $\mathcal{M}$، دنبالهٔ نقطه‌های $\{M_k\}$ (۱، متمایز از M_0، چنان درآوریم که به‌سمت M_0 میل‌کند، درآن‌صورت، دنبالهٔ عددی $\{f(M_k)\}$ ــمقدارهای نظیر تابع ــ همواره به‌سمت A میل می‌کند.

شرط لازم است. فرض کنیم (۶*) برقرار باشد، و از روی $\varepsilon>0$ مفروض، $r>0$ نظیر آن ــطبق‌تعریف شمارهٔ قبلــ پیدا شود. اگر دنبالهٔ نقطه‌های $\{M_k\}$ به‌سمت M_0میل کند،آن‌گاه ــ وقتی k به‌اندازهٔکافی بزرگ باشد ــ خواهیم داشت:

$$\overline{M_0M_k}<r$$

و این هم، نابرابری

$$|f(M_k)-A|<\varepsilon$$

را نتیجه می‌دهد که، به نوبهٔ خود، به‌معنای آن است که: $f(M_k)\to A$.

شرط کافی است. فرض می‌کنیم‌که شرط بالابرقرار باشد. برای این‌که وجودبرابری (۶*) را، طبق تعریف شمارهٔ قبل، ثابت‌کنیم، به‌برهان خُلف‌متوسل می‌شویم وفرض‌می‌کنیم که خلاف این تعریف، برقرار باشد. در این صورت، برای یك عدد $\varepsilon>0$، r نظیر وجود ندارد؛ یعنی هـر چه باشد $r>0$، همواره در $\mathcal{M}$، چنان نقطهٔ M' (متمایز از M_0) پیدا می‌شود که به‌طور هم‌زمان داشته باشیم:

$$\overline{M_0M'}<r \text{ ولی } |f(M')-A|\geqslant\varepsilon$$

واریانت مثبت $r_k\to 0$ را انتخاب می‌کنیم. به‌جای rبه‌نوبت عدد r_k رامی‌گیریم؛ برای هر r_k، نقطهٔ متناظرآن M_k (متمایز از M_0) پیدا می‌شود،که برای‌آن، داشته باشیم:

$$\overline{M_0M_k}<r_k \text{ ولی } |f(M_k)-A|\geqslant\varepsilon$$

دنبالهٔ نقطه‌های $\{M_k\}$،که به این ترتیب ساخته شده است، به‌سمت M_0 میل می‌کند و،در عین حال، رشتهٔ عددی $\{f(M_k)\}$ نمی‌تواند حد A را داشته باشد. این تناقض، درستی حکم را ثابت می‌کند.

برای خواننده روشن است که این‌شرط، درواقع، تعریف‌دیگری (به‌زبان«دنباله‌ها») از حد تابع را به دست می‌دهد.

به این ترتیب، در تابع‌های با چند متغیر هم، می‌توانیم مسالهٔ حد تابع را، به مساله

حد واریانت [با **۵۳** مقایسه کنید]، بکشانیم. این نتیجه را می‌توان، به‌سادگی، برای حالتی هم، که A، a_1،...، a_n، یا بعضی از آن‌ها، بی‌نهایت باشند، تعمیم داد.

آن‌چه که گفتیم، به ما امکان می‌دهد تا همهٔ مفهوم‌های اساسی مربوط به نظریهٔ حد را ــ که در فصل اول دیده‌ایم ــ به‌صورت تازه‌ای گسترش دهیم، شبیه آن‌چه در شمارهٔ **۵۵**، دربارهٔ حد تابع با یك متغیر مستقل، انجام دادیم.

۱۶۷. مثال‌ها. ۱) با استفاده از قضیهٔ مربوط به حد حاصل‌ضرب، قبل از همه، به‌سادگی ثابت می‌شود که

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} Cx_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} = Ca_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n}$$

که در آن، C، a_1،...، a_n، عددهای حقیقی دلخواه و ν_1، ...، ν_n، عددهای درست نامنفی هستند. از این‌جا، اگر تابع گویای صحیح [**۱۶۳**] را با $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نشان دهیم:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} C_{\nu_1, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

از روی قضیهٔ مربوط به جمع، همچنین، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} P(x_1, \ldots, x_n) = P(a_1, \ldots, a_n)$$

به‌همین ترتیب، برای تابع‌های کسری گویا [**۱۶۳**]:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1, \ldots, \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}}$$

و از روی قضیهٔ مربوط به حد خارج قسمت، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(a_1, \ldots, a_n)$$

روشن است که باید این شرط برقرار باشد که مخرج در نقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n)$ برابر صفر نشود.

۲) تابع توان‌ــنمائی x^y را، به‌ازای $x > 0$ و y دلخواه، در نظر می‌گیریم. اگر $a > 0$ و b عدد حقیقی دلخواهی باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b$$

در واقع، اگر واریانت‌های دلخواه $x_n \to a$ و $y_n \to b$ را اختیار کنیم [با **۷۸** مقایسه کنید]، آن‌گاه

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \cdot \ln x_n} \to e^{b \cdot \ln a} = a^b$$

و این ــ به«به‌زبان دنباله‌ها» ــ نتیجه لازم را ثابت می‌کند.

۳) می‌دانیم که‌واریانت‌های x_n و y_n، به‌ترتیب، دارای‌حد a و b هستند. می‌خواهیم، حد این عبارت‌ها را پیدا کنیم:

$$x_n \pm y_n,\quad x_n \cdot y_n,\quad \frac{x_n}{y_n},\quad x_n^{y_n}$$

برای حالت‌های، به‌اصطلاح، مبهم، از همان نمادهای قبلی استفاده می‌کنیم:

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

همان‌طور که می‌دانیم [**۳۱**، **۷۸**]، ممکن است در این حالت‌ها، اصلا، حدی وجود نداشته باشد و یا، در صورت وجود، به‌ازای همان مقدارهای a و b هم، ممکن است، به حدهای مختلفی‌ــبسته به قانون خاص تغییر واریانت‌های x_n و y_n ــ برسیم.

اگر تعریف حد تابع با دو متغیر مستقل را، به زبان دنباله‌ها، به‌یاد بیاوریم، روشن می‌شود که‌گونه‌های «ابهام» نامبرده، با واقعیت عدم وجود حدهای زیر مربوط می‌شود:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x-y),\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\pm\infty}} xy,\quad \lim_{\substack{x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty}} \frac{x}{y},$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to\pm\infty}} x_y,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y,\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}} x^y$$

۴) مسألهٔ حد این تابع را مطرح می‌کنیم:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

(این تابع، در تمامی صفحه، به استثنای نقطهٔ $x = 0$ و $y = 0$، معین است).

دو رشتهٔ جداگانهٔ نقطه‌های

$$\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\},\ \left\{M'_k\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$$

را انتخاب می‌کنیم که، به‌روشنی، به‌سمت (۰،۰) میل می‌کنند. معلوم می‌شود که برای همهٔ مقدارهای k:

$$f(M_k)=f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2},\quad f(M'_k)=f\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{5}$$

و از این‌جا، نتیجه می‌شود که حد مزبور، وجود ندارد.

به‌ترتیب مشابهی، ثابت کنید که حد زیرهم وجود ندارد:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

۵) برعکس مثال قبل، این حد وجود دارد:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2.y}{x^2+y^2}=0$$

که به‌سادگی و از نابرابری زیر نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

۱۶۸. حدهای تکراری. تا این‌جا، به‌حد تابع $f(x_1,\ldots,x_n)$، درحالتی، پرداختیم که آوندها، به‌طورهم‌زمان، به‌سمت‌حدهای خودشان میل کنند. ولی، ممکن است باحدهایی از نوع‌های دیگرهم سروکارداشته باشیم؛ به‌این ترتیب که عبورهای حدی متوالی برای‌هر آوند به‌طورجداگانه، و به تعداد متفاوت، داشته باشیم. حد نوع اول را nگانه (دوگانه، سه‌گانه وغیره به‌ازای: $n=2,3,\ldots$) و حد نوع دوم را، تکراری می‌نامیم.

برای‌سادگی، تنها به‌حالت تابع دومتغیره $f(x,y)$ اکتفامی‌کنیم. ضمناً، فرض می‌کنیم که‌حوزهٔ $\mathcal{M}$ تغییر x و y چنان باشدکه x (مستقل از y) بتواند هرمقداری ازمجموعهٔ $\mathcal{X}$ را اختیارکند و a نقطـه تجمع مجموعهٔ $\mathcal{X}$ باشد، بدون این که متعلق به‌آن باشد؛ به همین ترتیب، y هم (مستقل از x) درمجموعهٔ $\mathcal{Y}$، با نقطهٔ تجمع b، که به مجموعهٔ $\mathcal{Y}$ تعلق ندارد، تغییر کند. چنین حوزهٔ $\mathcal{M}$ را، به طورنمادی، به صورت $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ نشان می‌دهیم. مثلاً

$$(a,a+H;\ b,b+K)=(a,a+H)\times(b,b+K)$$

اگر به‌ازای y دلخواه و تثبیت شده از $\mathcal{Y}$، برای تابع $f(x,y)$ (که دیگر، تنها تابعی از x است) حدی به‌ازای $x\to a$ وجود داشته باشد، درحالت کلی، این حد، بستگی به y، که ازقبل تثبیت شده است، دارد:

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$$

سپس، می‌توان، مسألهٔ مربوط به‌حد تابع $\varphi(y)$ را، وقتی $y\to b$، مطرح کرد:

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

این، یکی از دوحد تکراری بود. حد دیگر را، می‌توان، به‌ترتیب عکس به‌دست آورد:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$$

نباید گمان کرد که این دوحد تکراری، حتماً وهمیشه، برابرند. مثلاً اگردرحوزهٔ $\mathcal{M}(\circ,+\infty;\circ,+\infty)$ فرض کنیم:

$$۱)\quad f(x,y)=\frac{x-y+x^{۲}+y^{۲}}{x+y}$$

و $a=b=\circ$ اختیار کنیم، داریم:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to\circ} f(x,y)=y-۱;$$

$$\lim_{y\to\circ}\varphi(y)=\lim_{y\to\circ}\lim_{x\to\circ} f(x,y)=-۱$$

درحالی که

$$\psi(x)=\lim_{y\to\circ} f(x,y)=x+۱;$$

$$\lim_{x\to\circ}\psi(x)=\lim_{x\to\circ}\lim_{y\to\circ} f(x,y)=۱$$

ممکن است پیش‌آید که یکی از حدهای تکراری وجود داشته باشد، ولی دیگری وجود نداشته باشد. مثلاً درمورد تابع‌های زیر، وضع چنین است:

$$۲)\quad f(x,y)=\frac{x.\sin\frac{۱}{x}+y}{x+y};\quad ۳)\quad f(x,y)=x.\sin\frac{۱}{y}$$

که درهردوحالت، حد تکراری f حد $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}$ وجود دارد، ولی حد تکراری f حد $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}$ وجودندارد. (درمورد تابع (۳)، حتی‌حد سادهٔ f حد $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ وجود ندارد).

این مثال‌های ساده نشان می‌دهدکه، ضمن عبوربه‌حد، درجابه‌جاکردن متغیرهای مختلف، چقدر بایداحتیاط نمود: اغلب، باجابه‌جاکردن نادرست دوعبورحدی، نتیجه‌گیری‌های اشتباهی به‌دست می‌آید. ازطرف دیگر، بسیاری ازمساله‌های مهم آنالیز ریاضی، درست به‌همین جابه‌جاکردن عبورهای حدی مربوط می‌شود؛ ولی معلوم است که هر بار، برای جابه‌جایی، باید براساس مجاز وقانع‌کننده‌ای متکی باشد.

قضیهٔ زیر، ازاین بابت، می‌تواند مفید باشد، چرا که رابطهٔ بین حد دوگانه و حد تکراری را نشان می‌دهد.

قضیه. اگر ۱) حد دوگانهٔ (متناهی یا نامتناهی) زیر وجود داشته باشد:

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

و ۲) به‌ازای y دلخواه از $\mathcal{Y}$، حد سادهٔ (متناهی)، نسبت به x، وجود داشته باشد:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x,y)$$

آن‌گاه، حد تکراری زیر وجود دارد

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

وبرابرهمان حددوگانه است.

این حکم را، برای حالت A، a و b متناهی، ثابت می‌کنیم. بنابه تعریف شمارهٔ ۱۶۳، از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان $\delta>0$ را چنان پیدا کرد که

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \qquad (۹)$$

تنها وقتی برقرار باشدکه داشته باشیم: $|x-a|<\delta$ و $|y-b|<\delta$ (وضمناً x از $\mathcal{X}$ و y از $\mathcal{Y}$ انتخاب شود). حالا، y را طوری تثبیت می‌کنیم که نابرابری $|y-b|<\delta$ برقرار باشد و، سپس، در (۹)، با میل x به‌طرف a، به‌حد می‌رویم. چون بنابر ۲)، $f(x,y)$، دراین گذربه‌حد، به‌سمت $\varphi(y)$ میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم:

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$

باتوجه به‌این‌که، دراین‌جا، y عدد دلخواهی از $\mathcal{Y}$، تنها با شرط $|y-b|<\delta$

است، به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)$$

اگر درکنارشرط‌های ۱) و ۲)، به‌ازای x دلخواه از $\mathfrak{X}$، حد سادهٔ (متناهی)، نسبت به‌y، وجود داشته باشد:

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

با توجه به‌آن چه ثابت کردیم (اگر نقش x و y را با هم عوض کنیم)، حد تکراری دوم هم وجود خواهد داشت:

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)$$

که برابر با همان مقدار A خواهد بود. دراین حالت، دوحد تکراری باهم برابرند.

ازاین قضیه، می‌توان فوراً نتیجه گرفت که درمثال‌های ۱) و ۲)، حد دوگانه وجود ندارد (چرا؟). خودتان می‌توانید، مستقیماً وبه‌سادگی، اثبات را به‌دست آورید.

درمثال ۳)، برعکس، حد دوگانه وجود دارد: ازنابرابری

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$$

دیده می‌شود که این حدبرابرصفراست. همین مثال نشان می‌دهدکه شرط ۱) قضیه، موجب شرط ۲) آن نمی‌شود.

نباید گمان کردکه‌وجود حد دوگانه، برای برابری حدهای تکراری، الزامی است. درمثال ۴) شمارهٔ پیش، هردوحد تکراری وجود دارند و برابر ۰ هستند، درحالی که حد دوگانه وجود ندارد.

§۲. تابع‌های پیوسته

۱۶۹. پیوستگی و ناپیوستگی تابع‌های باچند متغیر. فرض کنیم، تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ دریك مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ نقطه‌های فضای n بعدی، معین و $M'(x'_1,\dots,x'_n)$، نقطهٔ تجمع این مجموعه، متعلق به‌همین مجموعه، باشد.

گویند: تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ درنقطهٔ $M'(x'_1,\dots,x'_n)$ پیوسته است، اگربرابری زیر برقرارباشد:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots \\ x_n \to x_n'}} f(x_{1_k}, \ldots, x_{n_k}) = f(x_1', \ldots, x_n') \qquad (۱)$$

درحالت عکس، تابع درنقطهٔ M' ناپیوسته است.

به «زبان ε و δ»، پیوستگی تابع در نقطهٔ M'، مانند [۱۶۵] بیان می‌شود: از روی $\varepsilon > 0$ دلخواه مفروض، باید چنان $\delta > 0$ پیدا شودکه

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1', \ldots, x_n')| < \varepsilon \qquad (۲)$$

تنها اگر

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \ldots, |x_n - x_n'| < \delta \qquad (۳)$$

یا به‌نحو دیگر: از روی $\varepsilon > 0$ باید چنان $r > 0$ پیدا شودکه

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon$$

تنها اگر فاصلهٔ

$$\overline{MM'} < r$$

ضمناً، فرض می‌شودکه نقطهٔ $M(x_1, \ldots, x_n)$ به‌مجموعهٔ $\mathcal{M}$ تعلق دارد و، درحالت خاص، می‌تواند برنقطهٔ M' هم منطبق باشد. باتوجه به‌این‌که، حد تابع درنقطهٔ M'، برابرمقدار تابع دراین نقطه است، لزومی ندارد که M متمایزاز M' فرض شود.

با در نظرگرفتن تفاضل‌های $x_1 - x_1'$، ...، $x_n - x_n'$، به‌عنوان نموهای $\Delta x_1'$، ...، $\Delta x_n'$ متغیرهای مستقل، وتفاضل

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1', \ldots, x_n')$$

به‌عنوان نموتابع، می‌توان گفت (مثل حالت تابع یک متغیره) که، تابع پیوسته است، اگرنموهای بی‌نهایت کوچک متغیرهای مستقل، با نموبی‌نهایت‌کوچکی از تابع، متناظر باشند.

پیوستگی تابع درنقطهٔ M'، طبق تعریف بالا، به‌اصطلاح، پیوستگی در جملگی متغیرهای x_1، ...، x_n می‌باشد. اگراین وضع وجود داشته باشد، آن‌وقت، به‌طورهم‌زمان، خواهیم داشت:

$$\lim_{x_1 \to x_1'} f(x_1, x_2', \ldots, x_n') = f(x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x' \\ x_2 \to x'_2}} f(x_1, x_2, x'_3, \dots, x'_n) = f(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)$$

الی آخر، زیرا، در این موردها، تنها از حالت‌های خاص قانون نزدیک شدن M به M' استفاده می‌کنیم. به‌زبان دیگر، تابع نسبت به‌هرمتغیر x_i، یا نسبت به‌هردومتغیر x_i و x_j و غیره، به‌طورجداگانه، پیوسته می‌شود.

تا این‌جا هم، با نمونه‌هایی از تابع‌های پیوسته، برخورد داشته‌ایم. مثلاً، در ۱۶۶، ۱)، پیوستگی تابع‌های صحیح و کسری گویا از n آوند، در همهٔ نقطه‌های فضای n بعدی (برای تابع کسری، به‌جز نقطه‌هایی در آن‌ها، مخرج برابر صفر می‌شود)، مشخص شده بود. درهمان جا، در ۲)، پیوستگی تابع توان ـ نمائی x^y، به ازای همهٔ نقطه‌های نیم صفحهٔ راست $(x>0)$، ثابت شد.

اگر دوباره تابع

$$f(x,y)=\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0)$$

را، که در همهٔ نقطه‌های صفحه ـ به‌جز مبداء ـ معین است، درنظر بگیریم و، علاوه بر آن، فرض کنیم $f(0,0)=0$، در آن صورت، مثال، ناپیوستگی را به دست می‌آوریم. این ناپیوستگی، درست در نقطهٔ مبداء پیش می‌آید، زیرا [۱۶۷، ۴)]، به‌ازای $x\to 0$ و $y\to 0$، برای تابع، حدی وجود ندارد.

در این‌جا، با کیفیت بسیار جالبی روبه‌روهستیم. تابع $f(x,y)$، هرچند در نقطهٔ $(0,0)$، نسبت به دومتغیر، پیوسته نیست، با وجود این، در این نقطه، هم نسبت به x و هم نسبت به y، به‌طورجداگانه، پیوسته است؛ زیرا، به‌سادگی، معلوم است که $f(x,0)=f(0,y)=0$. ولی، این شگفتی برطرف خواهد شد، اگر به این نکته توجه کنیم که: وقتی از پیوستگی نسبت به x یا نسبت به y، به طورجداگانه، صحبت می‌کنیم، به‌معنای این است که تنها درطول محور x و یا تنها در طول محور y به‌نقطهٔ $(0,0)$ نزدیک می‌شویم، بدون این‌که به‌سایر قانون‌های نزدیک شدن به‌این نقطه، توجه داشته باشیم.

اگر برای تابع $f(M)$، وقتی M به‌سمت M' میل می‌کند، حدمعین ومتناهی

$$\lim_{M \to M'} f(M)$$

وجود نداشته باشد، درآن صورت، گویند، تابع در نقطه M' ناپیوستگی دارد، ولواین‌که تابع، در نقطهٔ M'، نامعین هم باشد [با یادداشت شمارهٔ ۶۶ مقایسه کنید].

نقطه‌های ناپیوستگی تابع، نه‌تنها می‌توانند جدا از هم باشند (مثل مثال قبل)، بلکه می‌توانند، یك منحنی، یك سطح وغیره را پر کنند. مثلاً، تابع‌های دومتغیرهٔ

$$\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}, \quad \frac{۱}{x^۲+y^۲-۱}$$

دارای ناپیوستگی هستند: اولی در طول خطهای $y=\pm x$ و دومی در طول دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$.

برای تابع‌های باسه متغیر

$$\frac{x+y+z}{xy-z}, \quad \frac{۱}{x^۲+y^۲-z^۲}$$

ناپیوستگی، درحالت اول، روی سهموی هذلولی گون $z=xy$ و درحالت دوم، روی مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$، قراردارد.

۱۷۰. عمل روی تابع‌های پیوسته. قضیهٔ مربوط به پیوستگی مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دو تابع پیوسته را ـ که به سادگی تنظیم و اثبات می‌شود [با **۶۷** مقایسه کنید] ـ به‌خواننده وامی گذاریم.

ما تنها به قضیهٔ مربوط به انطباق (روی هم گذاری) تابع‌های پیوسته می‌پردازیم. مثل شمارهٔ **۱۶۴**، فرض می‌کنیم، علاوه برتابع $u=f(x_۱, \dots, x_n)$، که درمجموعهٔ $\mathcal{M}$ نقطه‌های n بعدی $M(x_۱, \dots, x_n)$ داده شده است، n تابع

$$x_۱=\varphi_۱(t_۱, \dots, t_m), \dots, x_n=\varphi_n(t_۱, \dots, t_m) \qquad (۴)$$

هم، درمجموعهٔ $\mathcal{P}$ نقطه‌های m بعدی $P(t_۱, \dots, t_m)$ مفروض باشند. ضمناً، نقطهٔ M با مختصات (۴)، ازمحدودهٔ مجموعهٔ $\mathcal{M}$ خارج نشود.

قضیه. اگر تابع $\varphi_i(P)$ $(i=۱, \dots, n)$، همگی در نقطهٔ $P'(t'_۱, \dots, t'_m)$ از $\mathcal{P}$ پیوسته باشند وتابع $f(M)$ هم، درنقطهٔ نظیر $M'(x'_۱, \dots, x'_n)$ به‌مختصات

$$x'_۱=\varphi_۱(t'_۱, \dots, t'_m), \dots, x'_n=\varphi_n(t'_۱, \dots, t'_m)$$

پیوسته باشد، آن‌گاه تابع مرکب

$$u=f(\varphi_۱(t_۱, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_۱, \dots, t_m))=$$
$$=f(\varphi_۱(P), \dots, \varphi_n(P)).$$

هم، درنقطهٔ P'، پیوسته خواهد بود.

در واقع، ابتدا از روی $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ را طوری تعیین می‌کنیم که از (۳)، بتوان (۲) را نتیجه گرفت (که با توجه به‌پیوستگی تابع f، ممکن است). سپس، از روی عدد δ (با توجه به‌پیوستگی تابع‌های φ_1، ...، φ_n)، عدد $\eta>0$ چنان پیدا می‌شود که نابرابری‌های

$$|t_1-t_1'|<\eta, \ldots, |t_n-t_n'|<\eta \qquad (۵)$$

موجب نابرابری‌های زیر باشند:

$$|x_1-x_1'|=|\varphi_1(t_1, \ldots, t_m)-\varphi_1(t_1', \ldots, t_m')|<\delta, \ldots$$
$$|x_n-x_n'|=|\varphi_n(t_1, \ldots, t_m)-\varphi_n(t_1', \ldots, t_m')|<\delta$$

ولی، دراین صورت، باتوجه به‌وجود (۵)، همچنین خواهیم داشت:

$$|f(x_1, \ldots, x_n)-f(x_1', \ldots, x_n')|=$$
$$=|f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, \ldots, t_m))-$$
$$-f(\varphi_1(t_1', \ldots, t_m'), \ldots, \varphi_n(t_1', \ldots, t_m')|<\varepsilon$$

که به‌معنای اثبات حکم موردنظر است.

۱۷۱. تابع پیوسته درحوزه. قضیهٔ بولزانو-کوشی. گوییم، تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$، دریك مجموعهٔ $\mathcal{M}$ نقطه‌های فضای n بعدی، پیوسته است، اگراین تابع، درهرنقطهٔ این مجموعه-که برای‌آن، نقطهٔ‌تجمع است- پیوسته باشد. به‌حالتی اکتفا می‌کنیم که مجموعهٔ $\mathcal{M}$، حوزه‌ای بازیا بسته باشد [۱۶۳]، شبیه مورد تابع پیوستهٔ یك متغیره، که دریك بازه درنظرمی‌گرفتیم.

به‌بررسی ویژگی‌های تابع چندمتغیره‌ای‌که دریك‌حوزهٔ فضای n بعدی پیوسته‌است، می‌پردازیم. این ویژگی‌ها، کاملاً شبیه ویژگی‌های تابع‌های یك متغیره، که دریك بازه پیوسته‌اند، می‌باشند [فصل دوم، §۵].

برای‌کوتاه‌شدن بحث، تنها به حالت دو متغیر مستقل اکتفا می‌کنیم. انتقال به‌حالت کلی، مستقیماًو بدون هیچ زحمتی، میسراست. با وجود این، بعضی ملاحظه‌های لازم را، ضمن بحث، خواهیم آورد.

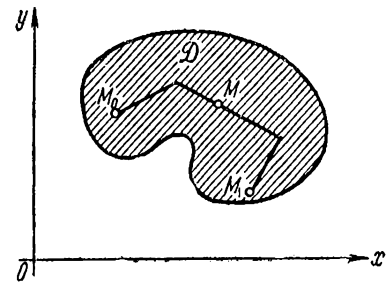
قضیه‌ای را تنظیم می‌کنیم، که به‌قضیهٔ اول بولزانو-کوشی‌برای تابع با یك متغیر [۱۸۰] شباهت دارد.

قضیه. تابع $f(x)$را، درحوزهٔ یك پارچه (مرتبط) $\mathcal{D}$، پیوسته‌ومعین می‌گیریم. تابع، در دو نقطهٔ $M_0(x_0, y_0)$و$M_1(x_1, y_1)$ این حوزه، مقدارهایی با علامت‌های مختلف اختیارکند:

$$f(x_0,y_0)<0,\quad f(x_1,y_1)>0$$

آن‌گاه، در این حوزه، نقطهٔ $M'(x',y')$ هم پیدا می‌شود که در آن‌جا، تابع برابر صفر می‌شود: $f(x',y')=0$.

اثبات را، با توجه به اثبات حالت تابع با یك متغیر، می‌دهیم.



شکل ۹۷

با توجه به یك پارچگی حوزهٔ $\mathcal{D}$، نقطه‌های M_0 و M_1 را، می‌توان با یك خط شکسته، به همهٔ نقطه‌های واقع در $\mathcal{D}$ وصل کرد (شکل ۹۷). اگر پشت سر هم، رأس‌های خط شکسته را در نظر بگیریم، یا در یکی از آن‌ها، تابع برابر صفر می‌شود ــ که در نتیجه، قضیه ثابت شده است ــ ویا چنین وضعی پیش نمی‌آید. در حالت اخیر، چنان ضلعی از خط شکسته پیدا می‌شود که تابع در دوانتهای آن مقدارهایی با علامت‌های مختلف، اختیار کند. با عوض کردن علامت گذاری نقطه‌ها، فرض می‌کنیم، M_0 و M_1، دوانتهای این ضلع باشند. معادله‌های این ضلع، چنین است [۱۶۱]:

$$x=x_0+t(x_1-x_0),\quad y=y_0+t(y_1-y_0)\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

اگر نقطهٔ $M(x,y)$، در طول این ضلع حرکت کند، تابع اولیهٔ $f(x,y)$، به تابعی مرکب از یك متغیر t، تبدیل می‌شود:

$$F(t)=f(x_0+t(x_1-x_0),\ y_0+t(y_1-y_0))\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

روشن است که این تابع پیوسته است (بنا به قضیهٔ شمارهٔ پیش)، چرا که هم تابع $f(x,y)$ وهم تابع خطی نسبت به t، که به‌جای آوندهای آن گذاشته شده است، پیوسته‌اند. ولی برای تابع $F(t)$ داریم:

$$F(0)=f(x_0,y_0)<0,\quad F(1)=f(x_1,y_1)>0$$

با استفاده از قضیهٔ شمارهٔ ۸۰، درمورد تابع با یك متغیر $F(t)$، نتیجه می‌گیریم که برای مقداری مثل t'، واقع بین ۰ و ۱، داریم: $F(t')=0$؛ که با به خاطر آوردن تعریف تابع

$F(t)$، خواهیم داشت:

$$f(x_0+t'(x_1-x_0),\ y_0+t'(y_1-y_0))\circ$$

نقطهٔ $M'(x',y')$، که در آن، $x'=x_0+t'(x_1-x_0)$ و $y'=y_0+t'(y_1-y_0)$، همان نقطهٔ مطلوب است.

ازاین جا، شبیه **۸۲**، قضیهٔ دوم بولزانو ـ کوشی نتیجه می‌شود که، البته، مستقیماً هم، می‌توانستیم به‌آن برسیم.

خواننده می‌بیند که درفضای n بعدی (برای $n>۲$) هیچ دشواری پیش نمی‌آید، زیرا در ناحیهٔ یك پارچهٔ فضای nبعدی، می‌توان نقطه‌ها را با «خط شکسته» به هم وصل کرد وجواب، با بررسی ضلعی در نظرگرفته می‌شود که، در طول آن، تابع بستگی به یك پارامتر دارد و...

۱۷۲. پیش‌قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس. برای بررسی‌های بعدی، لازم داریم که پیش‌قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس [۴۱] را، ازحالت دنبالهٔ نقطه‌ها، به‌حالت فضایی که به تعداد دلخواه دارای بعد باشد، تعمیم دهیم. مثل همیشه، به‌حالت صفحه، اکتفا می‌کنیم.

پیش قضیه. ازدنبالهٔ دلخواه وکران‌دار نقطه‌های

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ \dots,\ M_n(x_n,y_n),\ \dots$$

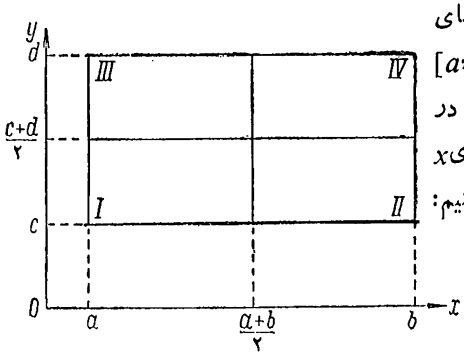
همیشه می‌توان چنان دنبالهٔ جزئی

$$M_{n_1}(x_{n_1},y_{n_1}),\ M_{n_2}(x_{n_2},y_{n_2}),\dots,\ M_{n_k}(x_{n_k},y_{n_k}),\dots$$
$$(n_1<n_2<\dots<n_k<\dots,\ n_k\to+\infty)$$

را درآوردکه به‌سمت یك نقطهٔ حدی متقارب باشد.

اثبات I. دراین اثبات، کاراستدلال را، به‌حالت «خطی» می‌کشانیم [۴۱].

با توجه به‌کران‌داربودن دنبالهٔ نقطه‌های مفروض، چنان مستطیل (متناهی) $[a,b;c,d]$ پیدا می‌شود که، این دنباله، به‌طورکامل، در درون آن قرار گیرد. هم بازهٔ $[a,b]$ مقدارهای x و هم بازهٔ $[c,d]$ مقدارهای y را، نصف می‌کنیم:



شکل ۹۸

$$\left[a,\frac{a+b}{۲}\right],\left[\frac{a+b}{۲},b\right]\quad\text{و}$$
$$\left[c,\frac{c+d}{۲}\right],\left[\frac{c+d}{۲},d\right]$$

با ترکیب هر نیمه از بازهٔ اول با هر نیمه از بازهٔ دوم، به‌چهار مستطیل می‌رسیم:

$$\text{(I)}\ \left[a, \frac{a+b}{2}; c, \frac{c+d}{2}\right], \quad \text{(II)}\ \left[\frac{a+b}{2}, b; c, \frac{c+d}{2}\right],$$

$$\text{(III)}\ \left[a, \frac{a+b}{2}; \frac{c+d}{2}, d\right], \quad \text{(IV)}\ \left[\frac{a+b}{2}, b; \frac{c+d}{2}, d\right]$$

که مستطیل اصلی $[a, b; c, d]$، به‌آن‌ها تجزیه می‌شود (شکل ۹۸).

دست‌کم در یکی از این بخش‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های دنبالهٔ مفروض، قرار دارد، زیرا در غیر این صورت، در همهٔ مستطیل‌ها، روی هم، تعدادی متناهی از نقطه‌ها قرار می‌گیرد، که ممکن نیست. فرض می‌کنیم $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ همان مستطیل ــ از بین مستطیل‌های ــ (I)، (II)، (III) و (IV)ــ باشد که شامل مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های دنبالهٔ مفروض است (در حالتی که، بیش از یک مستطیل، دارای این خاصیت باشد، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم).

این مستطیل را، دوباره، به‌چهار مستطیل کوچکتر، تقسیم و آن را انتخاب می‌کنیم که شامل مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های دنباله باشد و آن را با $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ نمایش می‌دهیم.

این روند تقسیم متوالی مستطیل‌ها را، تا بی‌نهایت ادامه می‌دهیم، در مرحلهٔ kام، به مستطیل $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ می‌رسیم که مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های M_n در آن واقع است. بعدهای این مستطیل

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{k}, \quad d_k - c_k = \frac{d-c}{k}$$

به‌ازای $k \to +\infty$، به‌سمت ۰ میل می‌کنند.

حالا، پیش قضیهٔ مربوط به بازه‌های تودرتو [۳۸] را، به‌طور جداگانه برای دنبالهٔ بازهٔ $\{[a_k, b_k]\}$ مقدارهای x، و دنبالهٔ بازهٔ $\{[c_k, d_k]\}$ مقدارهای y، به‌کار می‌بریم. از آن جا، نتیجه می‌شود که انتهاهای a_k و b_k، و همچنین، c_k و d_k از بازه‌ها، به‌ترتیب، به‌سمت حد مشترکی میل می‌کنند:

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x}, \quad \lim c_k = \lim d_k = \bar{y} \qquad (۶)$$

می‌توان گفت که دنبالهٔ مستطیل‌های $\{[a_k, b_k; c_k, d_k]\}$، در نقطهٔ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$، «متمرکز» می‌شوند. حالا، نقطهٔ دلخواه M_{n_1} از دنبالهٔ مفروض را، که در مستطیل $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ واقع است، انتخاب می‌کنیم. سپس، به‌نوبت، نقطه‌های M_{n_2}، M_{n_3} و... و، به‌طور کلی، نقطهٔ دلخواهی

از دنباله، به‌عنوان $M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k})$ واقع در مستطیل $[a_k b_k; c_k d_k]$ را انتخاب می‌کنیم. این کار عملی است، زیرا هر کدام ازمستطیل‌ها، شامل مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های M_n است.

چون داریم:

$$a_n \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \quad c_n \leqslant y_{n_k} \leqslant d_n$$

با توجه به (۶)

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}, \quad \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = \bar{y}$$

به‌نحوی که، مجموعهٔ جزئی جدا شدهٔ $\{M_{n_k}\}$، به‌سمت نقطهٔ $\bar{M}(\bar{x}\bar{y})$، به‌عنوان نقطهٔ حدی، متقارب است [۱۶۶].

اثبات II. می‌توان، به‌صورت دیگری، وبا استفاده ازقضیهٔ شمارهٔ **۴۱** برای حالت دنبالهٔ خطی، استدلال کرد (که احتمالاً، ساده‌تر هم هست). اگر نقطه‌های دنبالهٔ ما، در مستطیل متناهی $[a;b; c;d]$ واقع باشند، داریم:

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \; c \leqslant y_n \leqslant d \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

با استفاده ازقضیهٔ شمارهٔ **۴۱**، ابتدا درمورد دنبالهٔ $\{x_n\}$، دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$ را، که به‌سمت حدی مثل $\bar{x}$ متقارب است، می‌سازیم. بنابراین، در دنبالهٔ جزئی نقطه‌های

$$(x_{n_۱}, y_{n_۱}), (x_{n_۲}, y_{n_۲}), \ldots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots$$

مختص‌های اول (یعنی x_{n_k}ها)، دارای حد هستند. حالا، به دنبالهٔ مختص‌های دوم $\{y_{n_k}\}$ می‌پردازیم وهمان‌قضیه‌را،درمورد آن‌ها، به‌کارمی‌بریم. چنان‌دنبالهٔ‌جزئی $\{y_{n_k}\}$ را می‌سازیم که، آن هم، به‌سمت یك حد $\bar{y}$ میل کند. آن‌وقت، معلوم است که دنبالهٔ جزئی نقطه‌های

$$(x_{n_۱}, y_{n_۱}), (x_{n_۲}, y_{n_۲}), \ldots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots$$

به‌سمت نقطهٔ حدی $(\bar{x}\bar{y})$ میل می‌کند.

هردونوع استدلال را می‌توان، درمورد فضای $n > ۲$ بعدی هم به کاربرد. مثلاً، دراثبات اول، تنها تعداد بخش‌هایی که در تقسیم حوزهٔ مستطیلی مفروض، ضمن نصف کردن هریك از بازه‌های آن، به‌دست می‌آید، تغییرمی‌کند؛ درحالت کلی، تعداد این بازه‌ها برابر n و، درنتیجه، تعداد بخش‌های مستطیل، برابر ۲^n می‌شود.

۱۷۳. قضیهٔ ویرشتراس. به‌کمك قضیهٔ بالا، قبل ازهرچیزدیگری، می‌توان قضیهٔ ۱

ویرشتراس را، برای تابع با دومتغیر، ثابت کرد.

قضیه. اگرتابع $f(x,y)$، درحوزهٔ‌کران‌دار وبستهٔ $\mathcal{D}$*، معین وپیوسته باشد،آن‌گاه، تابع‌کران‌دار است، یعنی همهٔ مقدارهای آن، بین دومرز متناهی واقع‌اند:

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M$$

اثبات. با برهان خُلف، وکاملاً شبیه استدلال شمارهٔ **۸۴**، حکم قضیه ثابت می‌شود. فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$، با تغییر (x,y) در $\mathcal{D}$، بی‌کران باشد؛ دراین صورت، برای هرn، می‌توان نقطه $M_n(x_n,y_n)$ را در $\mathcal{D}$ پیداکرد که

$$|f(x_n,y_n)| > n \qquad (۷)$$

باتوجه به قضیهٔ شمارهٔ **۱۷۲**، می‌تـوان از دنبالهٔ کران‌دار $\{M_n\}$، دنبالهٔ جزئی $\{M_{n_k}\}$ را درآورد که به‌سمت نقطهٔ حدی $\bar{M}(\bar{x},\bar{y})$، میل کند.

یادآوری می‌کنیم که این نقطهٔ $\bar{M}$، الزاماً متعلق به‌حوزهٔ $\mathcal{D}$ است. در واقع، درغیر این صورت، همهٔ نقطه‌های M_{n_k}، متمایزازآن می‌شوند و نقطهٔ M، نقطهٔ تجمعی از حوزهٔ $\mathcal{D}$ می‌شود، که به‌آن تعلق نداردکه، با توجه به بسته بودن حوزهٔ $\mathcal{D}$، ممکن نیست [**۱۶۳** را ببینید].

به‌علت پیوستگی تابع درنقطهٔ $\bar{M}$، باید داشته باشیم:

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k},y_{n_k}) \to f(\bar{M}) = f(\bar{x},\bar{y})$$

و این متناقض با (۷) است.

قضیهٔ **دوم ویرشتراس** هم (بـا استناد به‌قضیهٔ قبل)، کاملاً شبیه **۸۵**، تنظیم و ثابت می‌شود.

بدون هیچ تغییراساسی دراستدلال‌ها، می‌تـوان هردوقضیهٔ ویـرشتراس را درمورد تابعی هم که دریك مجموعه بسته وکران‌دار $\mathcal{M}$، پیوسته باشد، ثابت‌کرد (ولواین‌که این مجموعه، یك حوزه را تشکیل ندهد).

مثل تابع بایك‌متغیر، برای تابع $f(x,y)$، که درمجموعهٔ $\mathcal{M}$ معین وکران‌داراست، تفاضل بین مرزهای بالا و پایین تابع در $\mathcal{M}$ را، نوسان آن در این مجموعه گویند. اگر $\mathcal{M}$، مجموعه‌ای‌کران دار و بسته (و در حالت خاص، اگر $\mathcal{M}$ یك حوزهٔ کران‌دار وبسته باشد) و f درآن، پیوسته باشد،آن‌گاه نوسان، به‌طورساده، تفاضل بین بیشترین وکمترین مقدار آن است.

---

*) که این‌بار، می‌تواند غیرمرتبط باشد.

۱۷۴. پیوستگی یکنوا (مونوتون). می‌دانیم که پیوستگی تابع $f(x, y)$، در نقطهٔ معین (x_0, y_0) از مجموعهٔ $\mathcal{M}$، که تابع در آن داده شده است، به «زبان ε و δ» این‌طور بیان می‌شود: از روی $\varepsilon > 0$ دلخواه، باید چنان $\delta > 0$ پیداشود، که نابرابری

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

برای هر نقطهٔ (x, y) از $\mathcal{M}$، تنها وقتی برقرار باشد که داشته باشیم:

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

حالا فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، در تمامی مجموعهٔ $\mathcal{M}$، پیوسته باشد، این پرسش پیش می‌آید: آیا از روی $\varepsilon > 0$، می‌توان چنان $\delta > 0$ را پیدا کرد که، به‌معنای بالا، برای همهٔ نقطه‌های (x_0, y_0) از $\mathcal{M}$، به‌طور هم‌زمان، مناسب باشد؟ اگر چنین وضعی (برای $\varepsilon > 0$ دلخواه) وجود داشته باشد، گویند، تابع در $\mathcal{M}$، به‌طور یکنوا، پیوسته است.

قضیهٔ کانتور. اگر تابع $f(x, y)$، در حوزهٔ کران‌دار و بستهٔ $\mathcal{D}$، پیوسته باشد، آن‌گاه تابع در $\mathcal{D}$، به‌طور یکنوا پیوسته خواهد بود.

اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض کنیم، برای یك عدد $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجودنداشته باشد، که به‌طور هم‌زمان، برای همهٔ نقطه‌های (x_0, y_0) حوزهٔ $\mathcal{D}$ مناسب باشد. دنبالهٔ عددهای مثبت

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > \dots > 0, \quad \delta_n \to 0$$

را، که به‌سمت ۰ میل می‌کند، انتخاب می‌کنیم. چون هیچ‌کدام از عددهای δ_n نمی‌توانند ــ به‌معنای موردنظر ــ به‌طور هم‌زمان برای همهٔ نقطه‌های (x_0, y_0) حوزهٔ $\mathcal{D}$ مناسب باشد، بنابراین، برای هر δ_n، می‌توان نقطهٔ مشخصی مثل (x_n, y_n) در $\mathcal{D}$ پیدا کرد که به‌ازای آن δ_n به دردنخور باشد، و این به معنای آن است که در $\mathcal{D}$، نقطهٔ (x_n', y_n') وجود دارد که برای آن

$$|x_n' - x_n| < \delta_n, \quad |y_n' - y_n| < \delta_n$$

و با وجود این

$$|f(x_n', y_n') - f(x_n, y_n)| \geqslant \varepsilon \qquad (۸)$$

از دنبالهٔ کران‌دار نقطه‌های $\{(x_n, y_n)\}$، بنابر قضیهٔ بولزانو ــ ویرشتراس، چنان دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}, y_{n_k}\}$ درمی‌آوریم که $x_{n_k} \to \bar{x}$ و $y_{n_k} \to \bar{y}$، ضمناً، نقطهٔ حدی $(\bar{x}, \bar{y})$، الزاماً به حوزهٔ $\mathcal{D}$ تعلق دارد (با توجه به بسته بودن آن).

سپس چون

$$|x'_{n_k}-x_{n_k}|<\delta_{n_k},\ |y'_{n_k}-y_{n_k}|<\delta_{n_k}$$

و با بزرگ‌شدن k : $n_k\to\infty$ و $\delta_{n_k}\to 0$، بنابراین

$$x'_{n_k}-x_{n_k}\to 0,\ y'_{n_k}-y_{n_k}\to 0$$

به‌نحوی که

$$x'_{n_k}\to\bar{x},\ y'_{n_k}\to\bar{y}$$

باتوجه به پیوستگی تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$، متعلق بـه حوزهٔ $\mathcal{D}$، باید هم

$$f(x_{n_k}, y_{n_k})\to f(\bar{x}, \bar{y})$$

وهم

$$f'(x'_{n_k}, y'_{n_k})\to f(\bar{x}, \bar{y})$$

و از آن‌جا

$$f(x_{n_k}, y_{n_k})-f(x'_{n_k}, y'_{n_k})\to 0$$

که متناقض نابرابری (۸) است. قضیه، ثابت شد.

برای تنظیم نتیجهٔ حاصل از این قضیه، بـه مفهوم قطر مجموعهٔ نقطه‌ای نیاز داریم. مرز بالا (یعنی حداکثر) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه مجموعه را، قطر آن نامند.

نتیجه. اگر تابع $f(x, y)$، در حـوزهٔ کران‌دار و بستهٔ $\mathcal{D}$، پیوسته باشد، آن گـاه، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، چنان $\delta>0$ پیدا می‌شود که، هرچقدرحوزهٔ مفروض را به‌حوزه‌های جزئی بستهٔ $\mathcal{D}_1$، ...، $\mathcal{D}_n$ بـا قطرهای کمتر از δ تقسیم کنیم*، نوسان تابع در هـر بخش، به‌طور جداگانه، کوچکتر از ε باشد.

کافی است برای δ، همان عددی اختیار شود کـه دربارهٔ آن، در تعریف پیوستگی یکنوا، صحبت‌شد. اگر قطر حوزهٔ جزئی $\mathcal{D}_i$ کمتر از δ باشد، آن گاه، فاصلهٔ دونقطهٔ دلخواه (x, y) و (x_0, y_0) کمتر از δ مـی‌شود: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. از این‌جا، طبعاً $|x-x_0|<\delta$ و $|y-y_0|<\delta$، به‌نحوی که $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$. اگر این‌نقطه‌ها، طوری انتخاب شوندکه $f(x, y)$ و $f(x_0, y_0)$، به‌ترتیب، بزرگترو کوچکتر از مقدارهای تابع در حوزهٔ $\mathcal{D}_i$ باشند، حکم مطلوب به‌دست می‌آید.

به سادگی می‌توان، همین قضیه را، بـدون تغییر (شبیه قضیهٔ ویرشتراس)، در مورد

---

*) این حوزه‌های جزئی، تنها می‌توانند نقطه‌های مرزی مشترک داشته باشند.

تابع پیوسته، در مجموعهٔ کران دار بستهٔ $\mathcal{M}$، هم ثابت کرد.

۱۷۵. پیش قضیهٔ بورل. گزارهٔ مفیدی را که در **۸۸** ثابت کردیم، می‌توان برای حالت چند بعدی نیز، تعمیم داد.

دستگاه Σ ازحوزه‌های باز σ را، درصفحه، درنظرمی گیریم؛ اگرهرنقطه ازمجموعهٔ $\mathcal{M}$، دست‌کم متعلق به یکی از این حوزه‌های σ باشد، گویند، دستگاه Σ، مجموعهٔ $\mathcal{M}$ را می‌پوشاند.

پیش‌قضیهٔ بورل. اگر مجموعهٔ‌کران‌دار بستهٔ $\mathcal{M}$ ازنقطه‌های صفحه، به وسیلهٔ‌دستگاه نامتناهی $\Sigma = \{\sigma\}$ از حوزه‌های باز، پوشانده شود، آن‌گاه، همواره می‌توان، از آن دستگاه متناهی

$$\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

را جدا کرد که، آن‌هم، مجموعهٔ $\mathcal{M}$ را بپوشاند.

اثبات (از طریق برهان خُلف). فرض کنیم که مجموعهٔ $\mathcal{M}$، نتواند با تعدادی‌متناهی از حوزه‌های σ از Σ پوشانده شود.

باتوجه به کران‌دار بودن مجموعهٔ $\mathcal{M}$، این مجموعه در یك مستطیل $[a, b; c, d]$ واقع می‌شود. بانصف کردن هریك از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$، این مستطیل راشبیه موردپیش‌قضیهٔ بولزانو-ویرشتراس- به‌چهارمستطیل، تقسیم می کنیم. همراه با آن،مجموعهٔ $\mathcal{M}$ هم، به بخش‌هایی تقسیم می‌شود، که به‌ترتیب، در این مستطیل‌های جزئی واقع‌اند. در ضمن، تعداد این بخش‌ها، ممکن است‌کمتر از چهار باشد، زیرا، چه‌بسا که در مستطیلی، اصلاً نقطه‌ای ازمجموعهٔ $\mathcal{M}$ وجود نداشته‌باشد. دست‌کم یکی ازاین بخش‌ها (مثلاً $\mathcal{M}_1$)، نمی‌تواند با تعدادی متناهی ازحوزه‌های σ، پوشانده شود (زیرا، درغیراین‌صورت، تمامی مجموعهٔ $\mathcal{M}$، برخلاف فرض، با تعدادی متناهی از حوزه‌های σ، پوشانده می‌شود). از مستطیل‌های جزئی، آن را که شامل بخش $\mathcal{M}_1$ از مجموعهٔ $\mathcal{M}$ است، $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ می‌نامیم.

این مستطیل را، دوباره، به چهار مستطیل، تقسیم می‌کنیم. دست‌کم یکی از آن‌ها، شامل بخش $\mathcal{M}_2$ از مجموعهٔ $\mathcal{M}$ است، که نمی‌تواند با تعدادی متناهی از حوزه‌های σ پوشانده شود. این مستطیل را $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ می‌نامیم.

اگراین‌روند را تابی‌نهایت ادامه دهیم، درمرحلهٔ kام، به مستطیل $[a_k, b_k; c_k, d_k]$ می‌رسیم که شامل چنان‌بخش $\mathcal{M}_k$ از مجموعهٔ $\mathcal{M}$ است، که نمی‌تواند با تعدادی متناهی‌از حوزه‌های σ پوشانده شود.

شبیه **۱۷۲**، در این‌جا هم نتیجه می‌گیریم که مستطیل‌های $[a_k, b_k; c_k, d_k]$، در نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$ «تمرکز» می‌یابند. به‌طوری که

$$\lim a_k = \lim b_k = \bar{x}, \lim c_k = \lim d_k = \bar{y}$$

این نقطهٔ $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$، به مجموعهٔ $\mathcal{M}$ تعلق دارد. در واقع، همسایگی $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta; \bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ از نقطهٔ $\overline{M}$، به هر نحوی انتخاب شود، برای kهای به قدر کافی بزرگ، خواهیم داشت:

$$\bar{x}-\delta < a_k < b_k < \bar{x}+\delta, \ \bar{y}-\delta < c_k < d_k < \bar{y}+\delta$$

به‌نحوی که، بخش $\mathcal{M}_k$ از مجموعهٔ $\mathcal{M}$، درهمسایگی نامبرده قرار می‌گیرد (و با توجه به‌نوع انتخاب آن، شامل مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌هاست). در نتیجه، نقطهٔ $\overline{M}$، نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $\mathcal{M}$ است که، با توجه به‌بسته‌بودن آن، باید متعلق به آن باشد.

در چنین حالتی، نقطهٔ $\overline{M}$، در یکی از حوزه‌های σ، و مثلاً σ_0، واقع است.

چون σ_0، حوزه‌ای باز است، بنابراین، در آن، یك همسایگی این‌نقطه، وجود دارد:

$$(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta; \bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$$

که برای kهای به‌قدر کافی بزرگ، مستطیل $[a_k, b_k; c_k, d_k]$، به تمامی در این همسایگی می‌افتد و همراه با آن، بخش $\mathcal{M}_k$ از مجموعهٔ $\mathcal{M}$ هم، در آن قرار می‌گیرد. به‌این ترتیب تمامی مجموعهٔ $\mathcal{M}_k$ با یك حوزهٔ σ_0 پوشانده می‌شود. تناقض حاصل، پیش قضیه را، ثابت می‌کند.

در کاربردهایی که از پیش‌قضیهٔ بورل، در شمارهٔ بعد و جاهای دیگر، خواهیم دید، منظور از مجموعهٔ $\mathcal{M}$، حوزهٔ بستهٔ عادی خواهد بود، با وجود این، گاهی پیش می‌آید که آن را در مورد سایر مجموعه‌های بسته ــ و مثلاً منحنی‌های پیوسته ــ هم، به کار می‌بریم.

۱۷۶. اثباتی تازه از قضیه‌های اساسی. ۱°. قضیهٔ اول ویرشتراس. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، در حوزهٔ کران‌دار و بستهٔ $\mathcal{D}$، پیوسته باشد. در نتیجه، هر نقطهٔ (x', y') این حوزه را، می‌توان با چنان همسایگی σ' محصور کرد که در محدودهٔ آن (اگر عدد εرا از قبل انتخاب کرده باشیم):

$$|f(x, y)-f(x', y')| < \varepsilon$$

یا

$$f(x', y')-\varepsilon < f(x, y) < f(x', y')+\varepsilon$$

به این ترتیب، تابع، در حوزه σ'، کران‌دار می‌شود.

با به کار بـردن قضیهٔ بورل در مورد دستگاه $\Sigma=\{\sigma'\}$ این همسایگی‌ها، می‌توان از Σ، تعدادی متناهی ازهمسایگی‌های σ_1، σ_2، ...، σ_n را درآورد که، در مجموع، تمامی حوزه $\mathcal{D}$ را بپوشانند. اگر در σ_i

$$m_i\leqslant f(x,y)\leqslant M_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

آن‌گاه اگر کوچکترین m_iها را m و بزرگترین M_iها را M بنامیم، در $\mathcal{D}$ خواهیم‌داشت:

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$$

۲°. قضیهٔ کانتور. با مفروض‌بودن عدد دلخواه $\varepsilon>0$، هرنقطهٔ (x',y') را، باچنان همسایگی

$$\sigma'=(x'-\delta',x'+\delta';y'-\delta',y'+\delta')$$

محصور می‌کنیم که برای هرنقطهٔ دلخواه (x,y) متعلق به‌آن (از $\mathcal{D}$)، داشته باشیم:

$$|f'(x',y')-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

اگر (x_0,y_0) هم، نقطهٔ مشابه دیگری باشد، به نحوی که

$$|f(x',y')-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \qquad (9)$$

هرمستطیل σ' را، با مستطیل چهار بارکوچکتر، ولی به همان مرکز، عوض‌می‌کنیم:

$$\overline{\sigma}'=\left(x'-\frac{\delta'}{2},x'+\frac{\delta'}{2};y'-\frac{\delta'}{2},y'+\frac{\delta'}{2}\right)$$

دستگاه $\overline{\Sigma}=\{\overline{\sigma}'\}$ این مستطیل‌های بـاز، حوزهٔ $\mathcal{D}$ را می‌پوشاند. باتوجه بـه پیش‌قضیهٔ بورل، از آن، دستگاه متناهی مستطیل‌های

$$\overline{\sigma}_i=\left(x_i-\frac{\delta_i}{2},x_i+\frac{\delta_i}{2};y_i-\frac{\delta_i}{2},y_j+\frac{\delta_i}{2}\right)$$

را، با همان ویژگی‌ها، درمی‌آوریم. بالاخره، کوچکترین δ_iها را، δ می‌نامیم.

فرض کنیم (x,y) و (x_0,y_0)، دونقطهٔ دلخواه حوزهٔ $\mathcal{D}$ هستند که برای آن‌ها

$$|x-x_0|<\delta, \qquad |y-y_0|<\delta \qquad (10)$$

نقطهٔ (x_0,y_0)، به‌یکی ازهمسایگی‌های $\overline{\sigma}_i$ تعلق دارد، مثلا به‌همسایگی

$$\overline{\sigma}_{i_0}=\left(x_{i_0}-\frac{\delta_{i_0}}{۲},\quad x_{i_0}+\frac{\delta_{i_0}}{۲};\quad y_{i_0}-\frac{\delta_{i_0}}{۲},\quad y_{i_0}+\frac{\delta_{i_0}}{۲}\right)$$

به‌نحوی که

$$|x_0-x_{i_0}|<\frac{\delta_{i_0}}{۲},\ |y_0-y_{i_0}|<\frac{\delta_{i_0}}{۲}$$

از (۱۰)، چون $\frac{\delta_{i_0}}{۲}\leqslant\delta$، نتیجه می‌شود: $|x-x_0|<\frac{\delta_{i_0}}{۲}$ و $|y-y_0|<\frac{\delta_{i_0}}{۲}$. از آن‌جا

$$|x-x_{i_0}|<\delta_{i_0},\ |y-y_{i_0}|<\delta_{i_0}$$

و نقطه‌های (x, y) و (x_0, y_0)، هر دو، در یکی از همسایگی‌های اولیه، قرار می‌گیرند:

$$(x_{i_0}-\delta_{i_0}, x_{i_0}+\delta_{i_0}; y_{i_0}-\delta_{i_0}, y_{i_0}+\delta_{i_0})$$

و در این‌صورت، طبق آن‌چه ثابت کردیم، برای آن‌ها، (۹) برقرار خواهد بود.

به این ترتیب، توانستیم، برای $\varepsilon>0$، $\delta>0$ را، مستقل از وضع نقطهٔ (x_0, y_0)، انتخاب کنیم، و در نتیجه، ثابت می‌شود که تابع $f(x, y)$، به‌طور یکنوا پیوسته است.

§۳. مشتق و دیفرانسیل تابع‌های چند متغیره

۱۷۷. مشتق جزئی و دیفرانسیل جزئی. برای سهولت‌کار، تنها به حالت تابع‌های شامل سه متغیر می‌پردازیم، ولی همهٔ آن‌چه خواهیم گفت، برای تابع‌های با تعداد نامشخص متغیرها هم، درست است.

تابع $u=f(x, y, z)$ را، در حوزهٔ (باز) $\mathcal{D}$ در نظر می‌گیریم و نقطهٔ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ را، در این حوزه، انتخاب می‌کنیم. اگر، به y و z، مقدارهای ثابت y_0، z_0، نسبت دهیم و x را متغیر بگیریم، u تابعی از یک متغیر x، در همسایگی x_0، خواهد شد، و می‌توان، محاسبهٔ مشتق آن‌را در نقطهٔ x_0 مطرح کرد. اگر به x نمو Δx را بدهیم برای تابع، نمو زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta_x u=\Delta_x f(x_0, y_0, z_0)=f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)$$

که می‌توانیم آن‌را، نمو جزئی یا نمو نسبی (نسبت به x) بنامیم، چرا که تنها متغیر x است که تغییر می‌کند. مشتق، با توجه به تعریف آن، عبارت است از

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

این مشتق را، مشتق جزئی (یا مشتق نسبی) تابع $f(x, y, z)$، نسبت به x، در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) نامند.

همان‌طور که می‌بینید، در این تعریف، همهٔ مختص‌ها حقوقی برابر ندارند، y_0 و z_0 تثبیت شده‌اند و x، با میل به‌سمت x_0، تغییر می‌کند.

مشتق نسبی را، با یکی از نمادهای زیر، نشان می‌دهند*:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x};\ u'_x,\ f'_x(x_0, y_0, z_0);\ D_x u,\ D_x f(x_0, y_0, z_0)$$

توجه کنیم که، حرف x ــ که به‌صورت اندیس در زیر علامت‌ها آمده است ــ تنها این مطلب را مشخص می‌کند که نسبت به کدام متغیر، مشتق گرفته‌ایم و هیچ ارتباطی با نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) ــ که مشتق را در آن‌جا محاسبه می‌کنیم، ندارد**.

به‌همین ترتیب، با ثابت گرفتن x و z و متغیر بودن y، این حد به‌دست می‌آید:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

که مشتق جزئی (یا نسبی) تابع $f(x, y, z)$ نسبت به y، در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) نامیده می‌شود، و شبیه حالت قبل، با این نمادها، معرفی می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y},\ u'_y;\ f'_y(x_0, y_0, z_0),\ D_y u,\ D_y f(x_0, y_0, z_0)$$

مشتق جزئی تابع $f(x, y, z)$، نسبت به z در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) هم، به‌همین ترتیب، تعریف می‌شود.

خود محاسبهٔ مشتق نسبی، اساساً، چیز تازه‌ای، در مقایسه با محاسبهٔ مشتق عادی، ندارد

مثال‌ها. ۱) فرض می‌کنیم $u = x^y$ $(x > 0)$. مشتق‌های نسبی این تابع، چنین‌اند:

---

*) ژاکوبی (C.G.J. Jacobi) بود که ∂ را (به‌جای d)، برای مشتق نسبی (یا مشتق جزئی)، پیشنهاد کرد.

**) در این‌جا نیز، نمادهای یک پارچهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x,\ D_x f$$

را باید همچون علامت‌های تابعی، برای مشتق نسبی، نسبت به x، در نظر گرفت. از این به‌بعد، دیگر این نکته را، تکرار نخواهیم کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y.x^{y-1},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y}.\ln x$$

اولی، همچون مشتق تابع نسبت به متغیر x ($y=\text{const.}$) و دومی، همچون مشتق تابع نمائی نسبت به متغیر y ($x=\text{const.}$)، محاسبه می‌شود.

۲) اگر داشته باشیم: $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^{2}+y^{2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^{2}+y^{2}}$$

۳) برای $u=\frac{x}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^{2}+z^{2}-x^{2}}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{2}},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-2xz}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{2}}$$

۴) فرض کنیم $z=y.f(x^{2}-y^{2})$، که در آن، $f(u)$، تابعی غیرمشخص (و دارای مشتق) است. ثابت کنید که، هرچه باشد f برای z، این رابطه، همواره برقرار است:

$$\frac{1}{x}.\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^{2}}$$

با توجه به قانون مشتق‌گیری تابع مرکب [$f'(u)$، به‌معنای مشتق نسبت به u است]:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y.f'(x^{2}-y^{2}).2x=2xy.f'(x^{2}-y^{2})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x^{2}-y^{2})-2y^{2}.f'(x^{2}-y^{2})$$

و از آن‌جا

$$\frac{1}{x}.\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}.\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=2y.f'(x^{2}-y^{2})+\frac{1}{y}.f(x^{2}-y^{2})-2y.f'(x^{2}-y^{2})=\frac{z}{y^{2}}$$

۵) ضلع a از مثلث، برحسب دو ضلع دیگر b و c و زاویهٔ بین آن‌ها α، به‌این ترتیب، بیان می‌شود:

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial a}{\partial b}=\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}}=\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{a},\frac{\partial a}{\partial\alpha}=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{a}$$

۶) دستورمعلوم کلاپیرون درفیزیك، $pV=RT$ (که درآن $R=\text{const}$.)، رابطهٔ حجم V، فشار p و درجه حرارت مطلق T، مربوط به‌یك مولکول گرم گاز ایده‌آل یکی‌از کمیت‌های p، V و T را، مثل تابعی ازدوتـای دیگر، معین می‌کند. اگر p و V متغیرهای مستقل و T، تابعی ازآن‌ها باشد، داریم $T=\frac{pV}{R}$ و دراین صورت

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R},\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}$$

حالا، اگر p و T را متغیرمستقل و V را تابعی ازآن‌ها بگیریم $V=\frac{RT}{p}$، آن‌گاه

$$\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$$

بالاخره، فرض‌کنیم V و T متغیرهای مستقل و p تابعی ازآن‌ها باشد: $p=\frac{RT}{V}$، آن‌وقت

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$$

ازاین‌جا، رابطهٔ مهم ترمودینامیك، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1$$

توجه‌کنیم که علامت ژاکوبی درمورد مشتق‌های نسبی (با ∂) را، تنها باید همچون نماد یك پارچه ــ ونه خارج قسمت یا کسر ــ درنظر گرفت. رابطه‌ای‌که همین حالا به‌دست آوردیم، با روشنی خاصی، تفاوت اساسی را در خصلت علامت‌گذاری مشتق‌های عادی و مشتق‌های نسبی نشان می‌دهد: اگر درسمت چپ برابری با مشتق‌های عادی‌سروکار داشتیم، می‌توانستیم‌هرکدام از آن‌هارا، همچون یك کسردرنظر بگیریم (خارج‌قسمت‌دیفرانسیل‌ها) و، با ساده‌کردن آن‌ها به‌جای ۱ ــ، به عدد ۱ برسیم. ولی، همان‌طور که‌گفتیم، این عمل ممکن نیست.

حاصل‌ضرب مشتق نسبی $\frac{\partial u}{\partial x}$، درنمودلخواه$\Delta x$، را دیفرانسیل نسبی (یا دیفرانسیل جزئی) تابع، نسبت به x، می‌گویند و با نماد

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x$$

نشان می‌دهند. اگردراین جا هم، نمو Δx را برابر دیفرانسیل dx متغیرمستقل x بگیریم، رابطهٔ قبلی این‌طورمی‌شود:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$

و به‌همین ترتیب

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \ , \ d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz$$

به‌این ترتیب می بینیم که مشتق‌های نسبی را هم، می‌توان، به‌صورت کسر نوشت:

$$\frac{d_x u}{dx}, \frac{d_y u}{dy}, \frac{d_z u}{dz}$$

ولی، این شرط حتمی وجود داردکه باید ذکرشود، نسبت به‌کدام متغیر، دیفرانسیل گرفته شده است.

۱۷۸. نموکامل تابع. اگربا آغاز ازمقدارهای$x = x_0$، $y = y_0$ و $z = z_0$متغیرهای مستقل، به‌هرسه، نموهای Δx، Δy و Δz را بدهیم، برای تابع $u = f(x,y,z)$، نمو

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

حاصل می‌شود، که‌آن را نموکامل تابع گویند.

در حالت تابع $y = f(x)$ ازیك متغیر، بافرض وجود مشتق (متناهی) $f'(x_0)$ در نقطهٔ x_0، برای نموتابع، این دستور را داریم [۹۶، (۲)]:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

که در آن، α بستگی به Δx دارد و $\alpha \to 0$، وقتی $\Delta x \to 0$.

می‌خواهیم، دستورمشابهی را، برای نموتابع $u = f(x,y,z)$ بدهیم:

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z \qquad (۱)$$

که در آن، α، β، γ، بستگی به Δx، Δy و Δz دارند و همراه با آن‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کنند. ولی، این بار، محدودیت‌های تابع، سنگین‌تر است.

قضیه. اگر مشتق‌های نسبی $f'_x(x,y,z)$، $f'_y(x,y,z)$ و $f'_z(x,y,z)$، نه‌تنها در نقطهٔ (x_0,y_0,z_0)، بلکه در یک همسایگی آن هم، وجود داشته باشند و، علاوه بر آن، در این نقطه (به‌عنوان تابع‌هائی از x و y و z) پیوسته باشند، آن‌گاه، رابطهٔ (۱) برقرار است.

برای اثبات، نمو Δu را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\Delta u=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0+\Delta y,z+\Delta z]+$$
$$+[f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)]+$$
$$+[f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)]$$

هریک از این تفاضل‌ها، معرف نمو جزئی تابع، تنها نسبت به یک متغیر است. چون وجود مشتق‌های جزئی را، در همسایگی نقطهٔ (x_0,y_0,z_0)، مفروض گرفتیم، به‌ازای Δx و Δy و Δz به‌قدر کافی کوچک ــ در مورد این تفاضل‌ها، می‌توان، به‌طور جداگانه، دستور نموهای محدود [۱۱۲] را به‌کار برد*. داریم:

$$\Delta u=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y,z_0+\Delta z)\cdot\Delta y+f'_z(x_0,y_0,z_0+\theta_2\Delta z)\cdot\Delta z$$

اگر در این جا فرض کنیم:

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)=f'_x(x_0,y_0,z_0)+\alpha$$
$$f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y,z_0+\Delta z)=f'_y(x_0,y_0,z_0)+\beta$$
$$f'_z(x_0,y_0,z_0+\theta_2\Delta z)=f'_z(x_0,y_0,z_0)+\gamma$$

---

*) اگر، مثلاً، تفاضل اول را در نظر بگیریم، می‌توان آن را، مثل نمو تابع $f(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ از یک متغیر x، در نظر گرفت، که متناظر با عبور از $x=x_0$ به $x=x_0+\Delta x$ است. مشتق این تابع نسبت به x، یعنی $f'_x(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$، بنا به فرض، برای همهٔ مقدارهای x، در بازهٔ $[x_0,x_0+\Delta x]$، وجود دارد، به‌نحوی که، می‌توان، دستور نموهای محدود را، در مورد آن، به‌کار برد.

در آن صورت، به‌عبارت (۱) برای Δu می‌رسیم. وقتی $\Delta x \to 0$، $\Delta y \to 0$ و $\Delta z \to 0$، آوندهای مشتق‌ها، در سمت چپ این برابری‌ها، به‌سمت x_0 و y_0 و z_0 میل می‌کنند (زیرا، کسرهای θ، θ_1 و θ_2، کسرهای صحیحی هستند). در نتیجه، خود مشتق‌ها، با توجه به پیوستگی آن‌ها نسبت به متغیرها، به سمت مشتق‌های سمت راست، و مقدارهای α و β و γ، به‌سمت صفر میل می‌کنند؛ و به‌این ترتیب، قضیه ثابت می‌شود.

این قضیه، ضمناً، این مطلب را هم روشن می‌کند که، از وجود و پیوستگی مشتق‌های نسبی، در نقطهٔ مفروض، می‌توان پیوستگی خود تابع را در این نقطه، نتیجه گرفت. درواقع، اگر داشته باشیم: $\Delta x \to 0$، $\Delta y \to 0$ و $\Delta z \to 0$، در آن صورت، روشن است که $\Delta u \to 0$.

برای این که دستور (۱) را، بتوان به‌صورت بهتری نوشت، عبارت

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

یعنی، فاصلهٔ بین نقطه‌های زیر را، درنظر می‌گیریم:

$$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \text{ و } (x_0, y_0, z_0)$$

با استفادهٔ از ρ، می‌توان نوشت:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\rho}\right) \cdot \rho$$

که اگر، عبارت داخل پرانتز را با ε نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \varepsilon \cdot \rho$$

که در آن، ε بستگی به Δx، Δy و Δz دارد و، وقتی $\Delta x \to 0$، $\Delta y \to 0$، $\Delta z \to 0$، و یا کوتاه‌تر، $\rho \to 0$، ε هم به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌این ترتیب، دستور (۱) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \rho \qquad (۲)$$

که در آن، $\varepsilon \to 0$، وقتی $\rho \to 0$. روشن است که، $\varepsilon \cdot \rho$ را، می‌توان به‌صورت $o(\rho)$ نوشت (به‌شرطی که، علامت گذاری o را، درمورد تابع با چند متغیر هم، گسترش دهیم).

یادآوری می‌کنیم که در استدلال، حالتی که نمو‌های Δx، Δy و Δz، جدا ازهم و یا حتی یکباره، برابر صفر شوند، استثنا نشده است. بنابراین، وقتی دربارهٔ رابطه‌های حدی

$$\alpha \to 0, \ \beta \to 0, \ \gamma \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

به‌ازای $\Delta x\to 0$، $\Delta y\to 0$، $\Delta z\to 0$، صحبت می‌کنیم، آن‌ها را به‌مفهوم وسیع خود در نظر می‌گیریم و برای این نموها، امکان صفرشدن را، درجریان تغییر آن‌ها، نفی نمی‌کنیم (با یادداشت مشابه در ۹۶ مقایسه کنید).

برای اثبات قضیهٔ فوق، بیشترازحالت تابع با یك متغیر، به‌تابع چند متغیره، تحمیل کرده‌ایم. برای این‌که نشان دهیم که، بدون این شرطها، نمی‌توان از رابطه‌های (۱) یا (۲)، استفاده کنیم، مثالی می‌آوریم (که برای سادگی، تابع را با دومتغیر درنظر گرفته‌ایم).

تابع $f(x,y)$ را، به‌این ترتیب، مشخص می‌کنیم:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ (x^2+y^2>0)\quad\text{و}\quad f(0,0)=0$$

این تابع، درتمامی صفحه پیوسته است. پیوستگی درنقطهٔ $(0,0)$ هم از ۱۶۷،(۵) نتیجه می‌شود. همچنین، مشتق‌های جزئی، نسبت به x و نسبت به y، در تمامی صفحه وجود دارد. برای $x^2+y^2>0$ داریم:

$$f'_x(x,y)=\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2},\quad f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

درنقطهٔ مبداء هم داریم $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$، که مستقیماً از تعریف مشتق و ازاین‌که $f(x,0)=f(0,y)=0$، نتیجه می‌شود. به‌سادگی، می‌توان روشن کرد که، پیوستگی مشتق‌ها، درنقطهٔ $(0,0)$، به‌هم می‌ریزد (برای نخستین مشتق، کافی است، مثلاً فرض کنیم $x=y=\frac{1}{n}\to 0$).

دستور (۱) یا (۲) را، برای این تابع، درنقطهٔ $(0,0)$، نمی‌توان به‌کار برد. درواقع، اگرغیرازاین، فرض کنیم، خواهیم‌داشت:

$$\Delta f(0,0)=\frac{\Delta x^2.\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon.\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

که در آن $\varepsilon\to 0$، وقتی که $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$. درحالت خاص، فرض می‌کنیم $\Delta y=\Delta x>0$، داریم:

$$\frac{1}{2}\Delta x=\varepsilon.\sqrt{2}.\Delta x$$

وازآن جا

$$\varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

یعنی ε، وقتی $\Delta x\to 0$، به‌سمت صفرمیل نمی‌کند واین، خلاف‌فرض است. همین ویژگی،

در مورد تابع

$$f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$$

هم، در نقطهٔ $(0,0)$ وجود دارد. از خواننده می‌خواهیم، خود به‌این مطلب بپردازد.

۱۷۹. دیفرانسیل کامل. در حالت تابع با یک متغیر $y=f(x)$، در ۱۰۳، مسألهٔ مربوط به نشان دادن نمو $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ را، به صورت زیر، مورد بررسی قراردادیم:

$$\Delta f(x_0)=A.\Delta x+o(\Delta x) \qquad (A=\text{const.}) \qquad (۳)$$

معلوم شد [۱۰۴]، که برای امکان چنین نمایشی، لازم وکافی است که مشتق متناهی $f'(x_0)$، در نقطهٔ $x=x_0$، وجود داشته باشد. ضمناً برابری مزبور، درست برای $A=f'(x_0)$، تحقق یافت. بخش خطی

$$A.\Delta x=f'(x_0).\Delta x=y'_x.\Delta x$$

نمو تابع را، دیفرانسیل آن، dy، نام دادیم.

طبیعی است که مسألهٔ مشابهی دربارهٔ تابع با چند متغیر، و مثلاً تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)$، که در حوزهٔ $\mathcal{D}$ (مثلاً، باز) معین است، مطرح شود، مسأله، به‌این صورت در می‌آید که بتوانیم نمو

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0+\Delta x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)$$

را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0)=A.\Delta x+B.\Delta y+C.\Delta z+o(\rho) \qquad (۴)$$

که در آن، A، B و C، مقدارهایی ثابت و $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

شبیه ۱۰۳، به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر بسط (۴) وجود داشته باشد، مشتق‌های جزئی نسبت به هرکدام از متغیرها، درنقطهٔ (x_0,y_0,z_0)، وجود دارند؛ ضمناً

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=A,\quad f'_y(x_0,y_0,z_0)=B,\quad f'_z(x_0,y_0,z_0)=C$$

درواقع، مثلاً با فرض $\Delta y=\Delta z=0$ و $\Delta x\neq 0$ در (۴)، داریم:

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

ازآن جا، نتیجه می‌شود که

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=A$$

وجود دارد. بنابراین، رابطهٔ (۴)، همواره، به‌صورت

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + \\ + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z + o(\rho) \qquad (۵)$$

ویا به‌صورت کوتاه‌تر زیر، نوشته می‌شود:

$$\Delta u = u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z + o(\rho) \qquad (۵^*)$$

با وجود این، اگر درحالت تابع یك متغیره، وجود مشتق $y'_x = f'(x_0)$ درنقطهٔ مورد بررسی، برای وجود رابطهٔ (۳) کافی بود، دراین حالت، مشتق‌های جزئی

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0),\quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0),\quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

برای وجود بسط (۴)، کافی نیستند. درمثال شمارهٔ قبل، این مطلب را، درمورد تابع بادو متغیر، دیدیم. درهمان‌شماره، درمتن قضیه، شرط‌هائی‌را، برای تحقق رابطهٔ (۴)، برشمردیم. این شرط‌ها، عبارت بودند از وجود مشتق‌های جزئی، درهمسایگی نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) و پیوستگی آن‌ها، دراین نقطه. با همهٔ این‌ها، می‌توان ثابت کرد که، این‌شرط‌ها، به‌هیچ‌وجه، برای رابطهٔ (۵) یا (۵*) لازم نیستند. این مطلب، ازاین‌جا نتیجه می‌شود که برای تابع با یك متغیر (که اگر بخواهیم، می‌توان آن را، تابعی ازچند متغیر گرفت)، چنین شرط‌هایی لازم نبود.

برای وجود رابطهٔ (۵)، تابع $f(x, y, z)$ را، مشتق‌پذیر در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) گویند و (تنها دراین حالت)، عبارت

$$u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z = \\ = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z$$

یعنی، قسمت خطی نمو تابع را، دیفرانسیل (کامل) آن گویند و با نماد du یا $df(x_0, y_0, z_0)$ نشان می‌دهند.

درحالت تابع با چند متغیر، عبارت «تابع مشتق‌پذیر» درنقطهٔ مفروض، همان‌معنای عبارت «تابع دارای مشتق‌های جزئی نسبت به همهٔ متغیرها» در نقطهٔ مفروض را، نمی‌دهد، بلکه معنای بیشتری دارد. با وجود این، معمولاً وجود و پیوستگی مشتق‌های جزئی را در نظرمی‌گیریم، که دراین صورت، مفهوم مشتق‌پذیری را می‌پوشانند.

طبق قرارداد، نموهای غیرمشخص Δx، Δy و Δz را، به‌عنوان دیفرانسیل متغیرهای

مستقل* dx، dy و dz درنظرمی گیریم؛ درنتیجه، می‌توان نوشت:

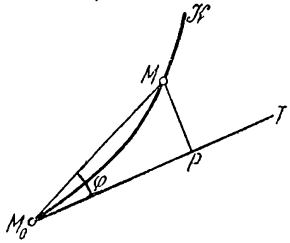
$$df(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot dz$$

یا

$$du = u'_x\cdot dx + u'_y\cdot dy + u'_z\cdot dz$$

یعنی، دیفرانسیل کامل، برابراست بامجموع دیفرانسیل‌های جزئی [۱۷۷].

۱۸۰. تعبیرهندسی، برای حالت تابع با دومتغیر. اگر بخواهیم، برای این مطلب، تعبیری هندسی پیدا کنیم ــ شبیه تعبیرهندسی مشتق و دیفرانسیل، درتابع با یك متغیر [۹۱، ۱۰۴]، باید به‌مفهوم مماس برمنحنی $\mathcal{K}$، دریك نقطهٔ M_0 مفروض آن، برگردیم.



شکل ۹۹

مماس $\overline{M_0T}$ را، به عنوان حد قاطع M_0M، وقتی که M_0M به‌سمت صفر میل می کند، تعریف کردیم [۹۱] (شکل ۹۹).

روشن‌است که، می‌توان تعریف زیررا هم، که هم‌ارز تعریف بالاست، برای مماس آورد:

خط $\overline{M_0T}$ را، مماس بر منحنی $\mathcal{K}$، در نقطهٔ M_0 واقع برآن، می‌نامند، وقتی‌که فاصلهٔ MP نقطهٔ متغیر M منحنی $\mathcal{K}$، ازخط M_0T، وقتی که فاصلهٔ $\overline{M_0M}$ به‌سمت صفرمیل‌می‌کند، بی‌نهایت کوچکی ازمرتبهٔ بالاتر از $\overline{M_0M}$ شود (یعنی، نسبت $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{M_0M}}$، به‌سمت صفر میل‌کند)**.

حالا، سطح $\mathcal{Y}$ ونقطهٔ M_0، واقع برآن را، درنظرمی گیریم (شکل ۱۰۰).

شبیه تعریف خط مماس، تعریفی برای صفحهٔ مماس می‌دهیم:

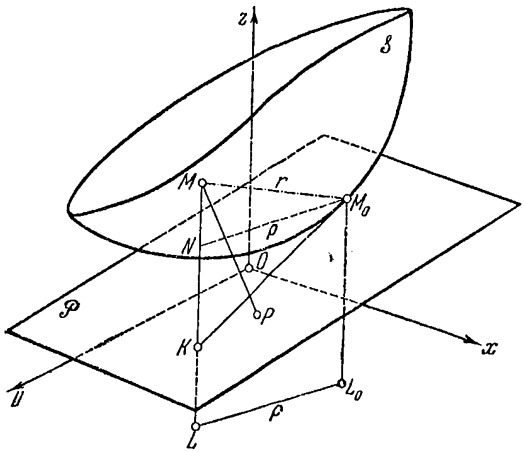
---

*) اگردیفرانسیل متغیرمستقل x را، متحد بادیفرانسیل x، به‌عنوان تابعی ازمتغیرهای‌مستقل x و y و z بگیریم، آن‌گاه، باتوجه به رابطهٔ کلی، می‌توان نوشت:

$$dx = x'_x\cdot\Delta x + x'_y\cdot\Delta y + x'_z\cdot\Delta z = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + 0\cdot\Delta z = \Delta x$$

و دراین صورت، برابری $dx=\Delta x$، به‌صورتی ثابت شده، درمی‌آید.

**) و این، به‌معنای آن است که $\sin\varphi$، وهمراه باآن خود زاویهٔ φ بین قاطع M_0M و خط M_0T، به‌سمت صفرمیل کند (شکل را ببینید).



شکل ۱۰۰

صفحهٔ M_0K را، صفحهٔ مماس برسطح $\mathcal{S}$، درنقطهٔ M_0 واقع برآن، نامند، وقتی‌که فاصلهٔ $\overline{MP}$ نقطهٔ متغیرM سطح $\mathcal{S}$ ازاین صفحه، با میل فاصلهٔ $\overline{M_0M}$ به‌صفر،بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ بـالاتراز $\overline{M_0M}$ شود (یعنی نسبت $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{M_0M}}$، به‌سمت صفرمیل کند).

$z=f(x,y)$ را، معادلهٔسطح، دردستگاه مختصات قائم، فرض‌می کنیم [۱۵۹]. نقطهٔ $M_0(x_0,y_0,z_0)$[که درآن، $z_0=f(x_0,y_0)$] را، روی‌آن، انتخاب وتحقیق می کنیم که صفحهٔ $\mathcal{P}$، گذرنده از نقطهٔ M_0، به‌معادلهٔ

$$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0) \qquad (۶)$$

با چه شرط‌هایی در این تعریف صدق می کند؟

ML را، موازی محور oz، رسم مـی کنیم (شکل ۱۰۰ را ببینید) و ازM_0، عمود M_0N را، بر ML فرود می‌آوریم. چون اختلاف پاره‌خط $\overline{MK}$ از $\overline{MP}$، دریك ضریب ثابت (مخالف صفر) است، به‌جای نسبت $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{MM_0}}$، می‌توان نسبت $\dfrac{\overline{MK}}{\overline{MM_0}}$ را درنظر گرفت. روشن می کنیم که مـی‌توان ـ بدون این که تعریف صفحـهٔ مماس، اساساً، تغییر کند ـ فاصلهٔ $r=\overline{MM_0}$ را، با پاره‌خط $\rho=\overline{M_0N}$ عوض کرد.

اگر به ازای $M\to M_0$، نسبت $\dfrac{\overline{MK}}{\rho}$ به سمت صفرمیل کند، درآن صورت نسبت $\dfrac{\overline{MK}}{r}$، مسلماً به‌سمت صفرمیل خواهد کرد، زیرا $\rho<r$. حال فرض می‌کنیم، $\dfrac{\overline{MK}}{r}$ به سمت

صفرمیل‌کند، ثابت می‌کنیم، دراین صورت، $\frac{\overline{MK}}{\rho}$ هم به‌سمت صفرمیل خواهدکرد. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که، وقتی $M \to M_0$ ، نسبت $\frac{r}{\rho}$ کران‌دار می‌ماند.

پاره‌خط $\overline{MK}$، با تقریب علامت، برابراست با عبارت

$$z-z=z-z_0-A(x-x_0)-B(y-y_0)$$

ویا، اگر فرض کنیم:

$$x-x_0=\Delta x,\ y-y_0=\Delta y,\ z-z_0=\Delta z=\Delta f(x_0, y_0)$$

به‌صورت عبارت زیر در می‌آید:

$$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)$$

و باتوجه به‌فرض، دست‌کم برای نقطهٔ M به‌قدرکافی نزدیك به M_0، خواهیم داشت:

$$|\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)|<\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

به‌نحوی که

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<|A|\cdot\frac{|\Delta x|}{\rho}+|B|\cdot\frac{|\Delta y|}{\rho}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2}$$

یا (با تقویت نابرابری)

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<|A|+|B|+\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)$$

ازآن‌جا

$$\frac{|\Delta z|}{\rho}<2(|A|+|B|)+1$$

وبنابراین

$$\frac{r}{\rho}=\sqrt{1+\left(\frac{|\Delta z|}{\rho}\right)^2}<2(|A|+|B|+1)$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به‌این ترتیب، صفحهٔ (۶)، وقتی، وتنها وقتی، مماس برسطح خواهد بود، که‌نسبت

$$\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$$

همراه با ρ، به‌سمت صفرمیل کند، یعنی‌وقتی که‌بسط زیر برقرار باشد [با (۴) مقایسه کنید]:

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$$

سرانجام، به‌این نتیجه می‌رسیم که: برای آن که سطح $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $M_0(x_0, y_0, z_0)$، که‌درآن‌جا $z_0=f(x_0, y_0)$، دارای صفحهٔ مماس باشد*، لازم وکافی است‌که تابع $f(x, y)$، به‌ازای $x=x_0$ و $y=y_0$، دیفرانسیل‌پذیر باشد.

ازآن جاکه، با برقراری این شرط، ضریب‌های A و B، الزاماً، با مشتق‌های نسبی $f'_x(x_0, y_0)$ و $f'_y(x_0, y_0)$ برابرمی‌شوند، صفحهٔ مماس با این معادله مشخص می‌شود:

$$Z-z=f'_x(x_0,y_0)\cdot(X-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(Y-y_0)$$

معمولاً، برای x، y و z علامتی نمی گذارند و معادلهٔ صفحهٔ مماس را به این صورت می‌نویسند:

$$Z-z=f'_x(x, y)\cdot(X-x)+f'_y(x, y)(Y-y) \qquad (۷)$$

به‌سادگی معلوم‌می‌شودکه اگرسطح وصفحهٔ مماس برآن را، باصفحهٔ دلخواه‌موازی محور oz که از M_0می گذرد، قطع کنیم، درمقطع با سطح، یك منحنی و درمقطع باصفحهٔ مماس، خط راستی مماس براین منحنی، به‌دست می‌آید**.

درحالت‌های خاصی، درمقطع سطح با صفحه‌های $Y=y_0$ و $X=x_0$، منحنی‌هایی به‌دست می‌آیدکه ضریب زاویه‌های آن‌ها***، برابرند با

$$f'_x(x_0, y_0),\quad f'_y(x_0, y_0)$$

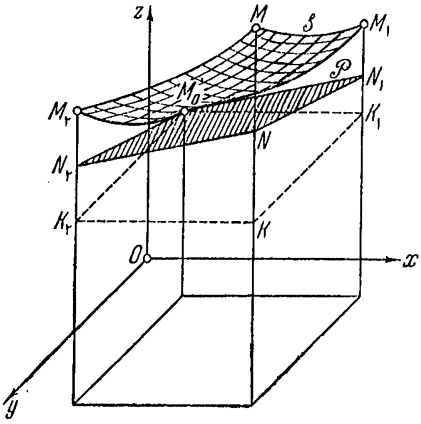
در شکل ۱۰۱، پاره‌خط‌های K_1M_1، K_2M_2 و KM، معرف نمو‌های جزئی و و نمو‌کامل تابع، و پاره‌خط‌های K_1N_1، K_2N_2 و KN نمایندهٔ دیفرانسیل‌های جزئی و

---

*) به‌صفحه‌ای توجه داریم‌که موازی محور z نباشد.

**) بعداً [۲۳۴]، مسالهٔ کلی‌ترمربوط به‌مماس بر منحنی دلخواهی ازسطح، درنقطهٔ مفروض، مورد بررسی قرارخواهدگرفت.

***) به سادگی می‌توان فهمید که، این ضریب زاویه‌ها، نسبت به‌کدام دستگاه مختصات، محاسبه می‌شوند.



شکل ۱۰۱

دیفرانسیل کامل آن هستند [با شمارهٔ ۱۰۴ و شکل ۴۴ مقایسه کنید].

۱۸۱. مشتق تابع مرکب. فرض کنیم،

تابع

$$u=f(x, y, z)$$

درحوزهٔ (باز) $\mathcal{D}$، معین باشد و، ضمناً، هر کدام از متغیرهای x، y و z، به‌نوبهٔ خود، تابعی ازمتغیر t دریك بازه، باشند:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

علاوه بر آن، فرض می‌کنیم که، با تغییر t، نقطهٔ (x, y, z)، ازمحدودهٔ حوزهٔ $\mathcal{D}$ خارج نشود.

اگر، مقدارهای x، y و z را، برحسب t، قراردهیم، به‌این تابع مرکب می‌رسیم:

$$u=f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

اگر u، نسبت به x و y و z، دارای مشتق‌های نسبی u'_x، u'_y و u'_z* باشد وضمناً، x'_t، y'_t و z'_t وجود داشته باشند، آن وقت، می‌توان وجود مشتق تابع مرکب را اثبات و، همراه با آن، آن را محاسبه کرد.

در واقع، اگر به‌متغیر t، نمو Δt را بدهیم، برای x و y و z، نموهای نظیر Δx و Δy و Δz، و برای تابع u، نمو Δu به‌دست می‌آید.

نمو تابع u را به صورت (۱) می‌نویسیم (این کار عملی است، زیرا وجود مشتق‌های نسبی پیوستهٔ u'_x، u'_y و u'_z را مفروض گرفته‌ایم)، به‌دست می‌آید:

$$\Delta u=u'_x\cdot\Delta x+u'_y\cdot\Delta y+u'_z\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z$$

که در آن α، β و γ، به ازای Δx، Δy، $\Delta z \to 0$، به سمت صفر میل می‌کنند. با تقسیم دوطرف تساوی بر Δt، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'_x\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+u'_y\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+u'_z\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\gamma\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

نمو Δt را به‌سمت صفرمیل می‌دهیم؛ آن‌وقت Δx، Δy و Δz هم به‌سمت صفرمیل می‌کنند،

---

*) در واقع، کافی است، مشتق‌پذیر بودن تابع $u=f(x, y, z)$ را، مفروض بگیریم.

وچون تابع‌های x، y و z نسبت بـه t، پیوسته هستند (وجود مشتق‌هـای x'_t، y'_t و z'_t را مفروض گرفتیم)، α و β و γ هم به‌سمت صفرمیل می‌کنند. در حد داریم:

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t \qquad (۸)$$

می‌بینیم که، باشرط‌های مفروض، مشتق تابع مرکب وجود دارد. اگر از علامت‌های دیفرانسیلی استفاده کنیم، می‌توان دستور (۸) را به این‌صورت نوشت:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad (۹)$$

حالا، به حالتی می‌پردازیم که x و y و z، نـه تابع یك متغیر t، بلکه تابعی از چند متغیر باشد. مثلاً

$$x = \varphi(t, v),\ y = \psi(t, v),\ z = \chi(t, v)$$

علاوه بر وجود و پیوستگی مشتق‌هـای نسبی تابع $f(x, y, z)$، در این‌جا، وجود مشتق تابع‌های x، y و z نسبت به t و v را هم، مفروض می‌گیریم.

وقتی که تابع‌های φ، ψ و χ را، در تابع f قرار دهیم، به تابعی از دو متغیر t و v می‌رسیم؛ و درنتیجه، مسألهٔ وجـود و محاسبهٔ مشتق‌های نسبی u'_t و u'_v مطرح می‌شود. ولی، این‌حالت، با آن‌چه تااین‌جا دیده‌ایم، تفاوت اساسی ندارد، زیرا، برای محاسبهٔ مشتق‌نسبی تابع از دو متغیر، یکـی از متغیرها را تثبیت می‌کنیم که، در نتیجه، با تابعی از یك متغیر سروکار خواهیم داشت. بنابراین، دستور (۸) دراین حالت، بی‌تغییر می‌ماند و دستور(۹) را، باید به‌این صورت نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} \qquad (۹^*)$$

۱۸۲. مثال‌ها. ۱) تابع توان ـ نمائی را درنظر می‌گیریم:

$$u = x^y$$

اگرفرض کنیم $x = \varphi(t)$، $y = \psi(t)$ و، باتوجه به‌قاعده‌ای که‌برای دیفرانسیل گیری تـابع مرکب بـه دست آوردیـم، مشتق x نسبت بـه t را محاسبه کنیم، بـه‌دستور معلوم لایب نیتس ـ برنولی، می‌رسیم:

$$u'_t = y \cdot x^{y-1} \cdot x'_t + x^y \cdot \ln x \cdot y'_t$$

که قبلاً هم، آن را (با نشانه‌گذاری‌های دیگری)، به کمك روشی خاص، پیداکرده بودیم

[(۲۳، ۹۹)].

۲) فرض کنیم $u=f(x, y, z)$، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته باشد و به جای x، y و z، در نظر گرفته باشیم:

$$x=\eta-\zeta,\ y=\zeta-\xi,\ z=\xi-\eta$$

در این صورت

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial \zeta}=-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

۳) اگر (باهمان فرض‌ها، نسبت به‌تابع f)، x را متغیر مستقل بگیریم و فرض کنیم:

$$y=y(x),\ z=z(x)$$

که در آن، تابع‌های $y(x)$ و $z(x)$، نسبت به x، مشتق‌پذیرند، آن‌گاه، u، به عنوان تابع مرکب از x، این مشتق را خواهد داشت:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

یا

$$\frac{du}{dx}=f'_x(x, y(x), z(x))+f'_y(x, y(x), z(x))\cdot y'_x+$$

$$+f'_z(x, y(x), z(x))\cdot z'_x$$

در این جا، خود x، نقش t را در رابطهٔ (۸)، به‌عهده دارد.

۴) اگر هم، دومتغیر x و y را مستقل و z را به‌صورت

$$z=z(x, y)$$

بگیریم (z، دارای مشتق‌های جزئی نسبت به x و نسبت به y است)، در آن صورت، برای تابع مرکب $u=f(x, y, z(x, y))$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x, y, z(x, y))+f'_z(x, y, z(x, y))\cdot z'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_y(x, y, z(x, y))+f'_z(x, y, z(x, y))\cdot z'_y(x, y)$$

۵) به‌عنوان مثال بعدی کاربرد رابطهٔ (۹)، به‌مسالهٔ مربوط به مشتق‌گیری، ازدترمینان زیر می‌پردازیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

به‌فرض آن‌که، عنصرهای a_{ik} $(i,k=1,2,\ldots)$، تابع‌هایی ازیك پارامتر t هستند و، برای آن‌ها، مشتق نسبت به t، $\frac{da_{ik}}{dt}$، وجود دارد.

بسط دترمینان را، نسبت به‌عنصرهای ستون kام، به‌یاد می‌آوریم:

$$\Delta=A_{1k}\cdot a_{1k}+A_{2k}\cdot a_{2k}+\cdots+A_{ik}\cdot a_{ik}+\cdots+A_{nk}\cdot a_{nk}$$

که در آن، متمم‌های $A_{1k},\ldots,A_{nk}$، شامل عنصر a_{ik} نیستند. به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}=A_{ik}$$

درچنان حالتی، بنا به دستور (۹) داریم:

$$\frac{d\Delta}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموع $\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}$، همان بسط دترمینان است، با این تفاوت که، به‌جای عنصرهای ستون kام، مشتق‌آن‌ها نسبت به t، قرار گرفته است. ازآن‌جا، این قاعده پیدا می‌شود: مشتق دترمینان Δ برابر است با مجموع n دترمینان، که با عوض‌کردن عنصرهای ستون‌های اول، دوم، ...، nام آن، با مشتق‌های متناظر آن‌ها، به‌نوبت به‌دست می‌آید.

دستور (۸)، شبیه دستور $u'_t=u'_x\cdot x'_t$، برای حالت تابع u ازیك متغیر x است؛ولی بازهم، براختلاف شرط‌ها تأکید می‌کنیم، که با رعایت آن‌ها، این دستورها پیداشده‌اند. اگر u، بستگی به‌یك متغیرداشته باشد، کافی است، وجود مشتق u'_x را شرط‌کنیم؛ درحالت

چند متغیر، بـاید ضمناً، پیوستگی مشتق‌های u'_x، u'_y،... را مفروض بگیریم. مثال‌های زیر نشان می‌دهندکه تنها وجود این مشتق‌ها، برای تحقق دستور (۸)، در حالت کلی، کافی نیستند.

۶) تابع $u=f(x,y)$ را، به‌این ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0),\ f(0,0)=0$$

روشن‌است‌که این‌تابع، درهمهٔ نقطه‌ها، حتی درنقطهٔ $(0,0)$، دارای مشتق نسبی است.ضمناً

$$f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0$$

توجه‌کنیم‌که مشتق‌ها، درست درهمین نقطه، پیوستگی خود را ازدست می‌دهند.

اگرمتغیرجدید t را، با فرض $x=t$ و $y=t$، واردکنیم، به‌تابع مرکبی نسبت به t می‌رسیم. از روی دستور (۸)، مشتق این تابع، به‌ازای $t=0$، برابراست با

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t=0$$

ازطرف دیگر، اگرمقدارهای x و y را، درتابع مفروض قراردهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$u=\frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}t$$

اگر حالا، مستقیماً نسبت به t مشتق بگیریم، بـه‌ازای هر t دلخواه، ومنجمله به‌ازای $t=0$، خواهیم داشت: $u'_t=\frac{1}{2}$.

معلوم می‌شودکه رابطهٔ (۸) را، دراین مورد، نمی‌توان به‌کاربرد.

۷) تابع $u=f(x,y)$ را، با رابطه‌های زیر، تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y)=\frac{x^{\frac{5}{3}}\cdot y}{x^2+y^2}(x^2+y^2>0),\ f(0,0)=0$$

که درنقطهٔ $(0,0)$، وضعی کاملاً مشابه مسالهٔ قبل دارد. دراین جا، با فرض $x=y=t$، به تابع مرکب $y=\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}}$ می‌رسیم‌که، به‌ازای $t=0$، دارای مشتق نامتناهی یك طرفه است. حالا اگر فرض‌کنیم:

$$x=t,\ y=t^{\frac{4}{3}}\sin\frac{1}{t}(t\neq0);\ x=t,\ y=0(t=0)$$

آن وقت، تابع مرکب، با این برابری، معین می‌شود:

$$u=\frac{t\cdot\sin\frac{1}{t}}{1+t^{\frac{2}{3}}\sin^2\frac{1}{t}}\ (t\neq 0);\ u=0\ (t=0)$$

که به‌ازای $t=0$، دارای مشتق نیست.

۱۸۳. دستور نموهای محدود. فرض کنیم، تابع $f(x, y, z)$، معین و پیوسته در حوزهٔ بسته $\mathcal{D}$ و دارای مشتق‌های نسبی پیوستهٔ f'_x، f'_y و f'_z در درون این حوزه (یعنی در هر نقطهٔ درون آن) باشد. دو نقطه از $\mathcal{D}$ را درنظر می‌گیریم:

$$M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z),\ M_0(x_0, y_0, z_0)$$

به‌نحوی که بتوان آن‌ها را، با پاره‌خط M_0M_1، به‌تمامی واقع در حوزهٔ $\mathcal{D}$، به‌هم پیوست.

در این صورت، رابطهٔ زیر را داریم:

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)=$$
$$=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y, z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(\ldots)\cdot\Delta y+f'_z(\ldots)\cdot\Delta z \qquad (10)$$
$$(0<\theta<1)$$

که کاملاً شبیه دستور نموهای محدود، درمورد تابع با یك متغیر است [۱۱۲، (۲)].

برای اثبات این رابطه، در تابع $f(x, y, z)$، فرض می‌کنیم:

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\ y=y_0+t\cdot\Delta y,\ z=z_0+t\cdot\Delta z \qquad (11)$$

(به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 1$)، یعنی تابع را، درست در نقطه‌های پاره‌خط M_0M_1 درنظر بگیریم. تابع مرکب نسبت به t

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y, z_0+t\cdot\Delta z)$$

در سراسر بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است [۱۷۰] و، در درون آن، دارای مشتقی است که، با توجه به‌دستور (۸)، برابر است با

$$F'(t)=f'_x(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y, z_0+t\cdot\Delta z)\cdot\Delta x+$$
$$+f'_y(\ldots)\cdot\Delta y+f'_z(\ldots)\cdot\Delta z$$

زیرا، از (۱۱)

$$\frac{dx}{dt}=\Delta x,\quad \frac{dy}{dt}=\Delta y,\quad \frac{dz}{dt}=\Delta z$$

برای تابع $F(t)$، در بازهٔ $[0,1]$، دستور (۲) شمارهٔ **۱۱۲** را به‌کار می‌بریم:

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)\quad (0<\theta<1)$$

اگر توجه کنیم که، بنا به تعریف تابع $F(t)$

$$F(1)-F(0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0, y_0, z_0)$$

که اگر به جای $F'(\theta)$، همین عبارت را (به ازای $t=0$) قرار دهیم، به دستور (۱۰) می‌رسیم.

به‌عنوان نمونه‌ای برای استفاده از دستوری که ثابت کردیم، این گزاره را یادآوری می‌کنیم:

اگر تابع $f(x,y,z)$، که در حوزهٔ بسته و مرتبط $\mathcal{D}$، پیوسته است، در درون این حوزه، مشتق‌های نسبی برابر صفر داشته باشد:

$$f'_x=f'_y=f'_z=0$$

آن‌گاه، این تابع، در تمامی حوزهٔ $\mathcal{D}$، برابر با مقدار ثابتی می‌شود:

$$f=\text{const.}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ و $M(x, y, z)$ را، در نقطهٔ دلخواه، از حوزهٔ $\mathcal{D}$ می‌گیریم. با توجه به مرتبط بودن $\mathcal{D}$، این نقطه‌ها را، می‌توان با خط شکسته‌ای که از مرزهای $\mathcal{D}$ تجاوز نمی‌کند، به‌هم پیوست. اگر $M_1(x_1, y_1, z_1)$، رأسی از خط شکسته و بلافاصله بعد از M_0 باشد، آن‌گاه، با قرار دادن، $x_0+\Delta x=x_1$، $y_0+\Delta y=y_1$، $z_0+\Delta z=z_1$، در (۱۱)، خواهیم داشت:

$$f(x_1, y_1, z_1)=f(x_0, y_0, z_0)$$

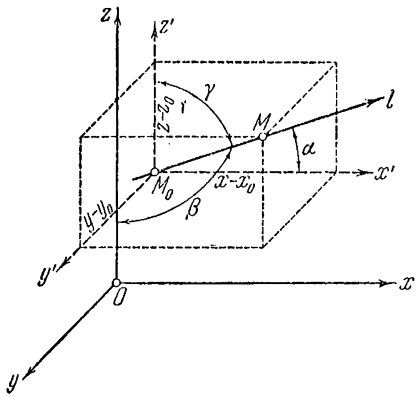
و اگر، به‌همین ترتیب، از رأسی، به‌رأس دیگر عبور کنیم، بالاخره خواهیم داشت:

$$f(x, y, z)=f(x_0, y_0, z_0)$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۸۴. مشتق در جهت مفروض. مشتق‌های نسبی تابع $f(M)=f(x, y, z)$، نسبت

به x، نسبت به y و نسبت به z، در واقع «سرعت تغییر» تابع را، در امتداد محورهای مختصات، نشان می‌دهد. مثلاً، f'_x «سرعت تغییر» تابع نسبت به x است: مثل این است که نقطه تنها به موازی محور x جابه‌جا می‌شود. دراغلب مساله‌های فیزیکی، ممکن است، همچنین، «سرعت تغییر» تابع $f(M)$، درامتدادهای‌دیگری هم، مورد توجه باشد. مثلاً: اگر میدان درجهٔ حرارت داده شده باشد، یعنی درجهٔ حرارت $f(M)$، در هر نقطهٔ جسم مورد بررسی، معلوم باشد، قانون توزیع وانتقال گرما، اساساً، بستگی به‌افت (یا افزایش) درجهٔ حرارت، درهمهٔ جهت‌ها، دارد. مفهوم «سرعت تغییر» یا مشتق تابع درامتدادمفروض را، دقیق‌تر می کنیم. دراین جا هم، باکاربرد دستور (۹)، سر وکار داریم.



شکل ۱۰۲

فرض می کنیم، تابع $f(M)$، در یك حوزهٔ (باز)، معین باشد. نقطهٔ دلخواه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ را، از این حوزه، و خط جهت‌دار (محور) نامشخص l را، که ازاین نقطه می گذرد، درنظرمی گیریم (شکل ۱۰۲).

$M(x, y, z)$ را، نقطهٔ دیگری ازاین محورمی گیریم. M_0M، عبارت است از طول پاره خط بین M_0 و M و، اگر در همان جهت محور l باشد، با علامت مثبت و، درغیراین صورت، با علامت منفی است.

M را، بی‌نهایت، به M_0 نزدیك می کنیم، دراین صورت، حد

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$$

را، مشتق تابع $f(M)$ درجهت l (یا در طول محور l) می‌نامند و به این شکل، نشان می‌دهند:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}$$

این مشتق، «سرعت تغییر» تابع را، درنقطهٔ M_0، درجهت l، نشان می‌دهد.

درحالت خاص، می توان، مشتق‌های نسبی عادی $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ را هم، همچون مشتق «درجهت»، درنظر گرفت.

فرض‌می‌کنیم، تابع $f(x, y, z)$، درحوزهٔ موردنظر، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته باشد*؛ ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، مشتق درجهت l وجود دارد و با دستور زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma \qquad (۱۲)$$

اگر $M_0M = t$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$x - x_0 = t\cdot\cos\alpha, \quad y - y_0 = t\cdot\cos\beta, \quad z - z_0 = t\cdot\cos\gamma$$

به‌این‌ترتیب، درطول محور l، مختص‌های x، y و z، مثل تابع‌هایی از t می‌شوند:

$$x = x_0 + t\cdot\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cdot\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cdot\cos\gamma \qquad (۱۳)$$

وتابع $f(M) = f(x, y, z)$ را هم، می‌توان، مانند تابع مرکب $\varphi(t)$ از t، درنظر گرفت. ضمناً، نقطهٔ M_0، متناظر با $t = 0$ است.

به‌این ترتیب، داریم:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

به‌شرطی که $\varphi'(0)$ وجود داشته باشد. ولی، مشتق $\varphi'(t)$، باتوجه به‌شرط‌های مفروض، وجود دارد و، بنابردستور (۹)، به‌این‌ترتیب بیان می‌شود:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

وبا استفاده ازدستور (۱۳):

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

و ازآن، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

این پرسش، پیش می‌آید: در کدام جهت، درنقطهٔ مفروض، تابع سریع‌تر، صعود می‌کند؟ البته، این پرسش، تنها وقتی دارای معناست که، مشتق‌های

---

*) در واقع، کافی است، تابع $u = f(x, y, z)$ را، مشتق‌پذیر بگیریم.

$$a=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x},\ b=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y},\ c=\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \qquad (۱۴)$$

به‌طورهم‌زمان، برابر صفر نباشند (به زبان دیگر، مشتق، درهرجهت دلخواه، برابر صفر نشود).

با توجه به‌این فرض، عبارت (۱۲) را تبدیل می‌کنیم:

$$a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{a}{\sqrt{\dots}}\cdot\cos\alpha+\frac{b}{\sqrt{\dots}}\cdot\cos\beta+\frac{c}{\sqrt{\dots}}\cdot\cos\gamma\right)$$

کسرهای داخل پرانتز را، می‌توان همچون کسینوس‌های هادی یك امتداد g، درنظر گرفت.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\lambda,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\mu,\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\nu$$

دراین صورت، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}(\cos\lambda\cdot\cos\alpha+\cos\mu\cdot\cos\beta+\cos\nu\cdot\cos\gamma)$$

سرانجام، اگرزاویهٔ بین امتدادهای g و l را بـا (g,l) نشان دهیم، از روی دستورمعلوم هندسهٔ تحلیلی، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos(g, l) \qquad (۱۵)$$

روشن است که ایـن مشتق، وقتی به بزرگترین مقدار خود می‌رسد که l و g برهم منطبق باشند:

$$\frac{\partial f}{\partial g}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)^2}$$

بردار $\overrightarrow{g}$، که تصویـرهای (۱۴) را بـرمحورهای مختصات دارد، امتداد بیشترین سرعت صعودی تابع را نشان می‌دهد وطول $|\overrightarrow{g}|$، مقدارمشتق نظیر را به‌دست می‌دهد. این بردار، گرادیان (شیب) تابع $f(M)=f(x, y, z)$، نامیده می‌شود.

اگررابطهٔ (۱۵) را، به‌صورت

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\overrightarrow{g}|\cdot\cos(\overrightarrow{g}, l)$$

بنویسیم، به‌سادگی دیده می‌شود، برداری که، با کنار گذاشتن پاره‌خط $\frac{\partial f}{\partial l}$، روی l به‌دست می‌آید، عبارت است از تصویر گرادیان بر این امتداد.

۱۸۵. بی‌تغییری شکل دیفرانسیل (اول). فرض کنیم تابع $u=f(x, y, z)$، دارای مشتق‌های نسبی پیوستهٔ u'_x، u'_y و u'_z باشد و، ضمناً، x و y و z، تابع‌هایی از متغیرهای جدید t و v باشند:

$$x=\varphi(t,v),\quad y=\psi(t,v),\quad z=\chi(t,v)$$

که آن‌ها هم، به‌نوبهٔ خود، دارای مشتق‌های نسبی پیوستهٔ x'_t و x'_v، y'_t و y'_v، z'_t و z'_v باشند آن‌وقت [۱۸۱]، نه‌تنها مشتق‌های تابع مرکب u، نسبت به t و v وجود دارند، بلکه این مشتق‌ها نیز، نسبت به t و v پیوسته‌اند ــ این حکم، به‌سادگی و از روی (۸)، روشن می‌شود.

درحالتی که x و y و z، متغیرهای مستقل باشند، همان طور که می‌دانیم، دیفرانسیل (کامل) تابع u، برابر است با

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz$$

درحالت مفروض هم، u، با واسطهٔ x و y و z، به متغیرهای t و v بستگی دارد، در نتیجه، دیفرانسیل آن نسبت به‌این متغیرها، این‌طور نوشته می‌شود:

$$du=u'_t\cdot dt+u'_v\cdot dv$$

ولی به‌اعتبار (۸)

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t$$

وشبیه آن

$$u'_v=u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v+u'_z\cdot z'_v$$

که اگر، این مقدارها را درعبارت du قراردهیم، خواهیم داشت:

$$du=(u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t+u'_z\cdot z'_t)\cdot dt+(u'_x\cdot x'_v+u'_y\cdot y'_v+u'_z\cdot z'_v)\cdot dv$$

جمله‌ها را، به‌ترتیب زیر، گروه‌بندی می‌کنیم:

$$du=u'_x(x'_t dt+x'_v dv)+u'_y(y'_t dt+y'_v dv)+u'_z(z'_t dt+z'_v dv)$$

عبارت‌های داخل پرانتزها، چیزی جز دیفرانسیل‌های تابع‌های x و y و z (نسبت به t و v) نیستند، به‌نحوی که می‌توانیم بنویسیم:

$$du=u'_x\cdot dx+u'_y\cdot dy+u'_z\cdot dz$$

به‌همان شکلی از دیفرانسیل رسیدیم که در حالت مستقل بودن متغیرهای x و y و z داشتیم (ولی البته، نمادهای dx، dy و dz، در این جا، مفهوم دیگری دارند).

به این ترتیب برای تابع با چند متغیر هم، حکم بی‌تغییری شکل دیفرانسیل (اول) ـ شبیه مورد تابع با یك متغیر ـ برقرار است*.

ممکن است، x و y و z، وابسته به متغیرهای مختلفی باشند، مثلاً

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t,w),\quad z=\chi(v,w)$$

در چنین وضعی، همیشه می‌توان در نظر گرفت:

$$x=\varphi_1(t,v,w),\quad y=\psi_1(t,v,w),\quad z=\chi(t,v,w)$$

و همان بحث‌های قبلی را، در مورد آن، تکرار کرد.

نتیجه. در موردی که x و y، تابع‌هایی از یك متغیر بودند، این رابطه‌ها را داشتیم:

$$d(cx)=c\cdot dx,\quad d(x\pm y)=dx\pm dy,\quad d(xy)=y\cdot dx+x\cdot dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}$$

این رابطه‌ها، برای حالتی هم، که x و y تابعی از چند متغیر باشند، درست است، یعنی وقتی که

$$x=\varphi(t,v,\ldots),\quad y=\psi(t,v,\ldots)$$

به‌عنوان نمونه، رابطهٔ آخری را ثابت می‌کنیم.

برای این منظور، x و y را متغیرهای مستقل می‌گیریم، در آن صورت

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y^2}dy=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2}$$

می‌بینیم که، با این فرض، دیفرانسیل، کاملاً شبیه حالتی است که x و y، تابعی از یك متغیر بودند. با تکیه بر بی‌تغییری شکل دیفرانسیل، می‌توان گفت که این دستور، برای

---

*) یادآوری کنیم که این نتیجه را، تنها با یك شرط مشتق پذیربودن همهٔ تابع‌های مورد بررسی هم، می‌توان به‌دست آورد. برای این که در این مورد قانع شویم، کافی است ثابت کنیم که نتیجهٔ انطباق تابع‌های مشتق‌پذیر، بازهم یك تابع مشتق‌پذیر است.

حالتی هم که x و y تابع چند متغیر باشند، درست است.

خاصیتی را که برای دیفرانسیل کامل ثابت کردیم و نتیجهٔ آن، امکان ساده‌کردن محاسبهٔ دیفرانسیلی را به‌وجود می‌آورد. مثلاً

۱) $$d\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2}$$

۲) $$d\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(x^2+y^2+z^2)dx-x\cdot d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{(y^2+z^2-x^2)\cdot dx-2xy\cdot dy-2xz\cdot dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

چون ضریب‌های دیفرانسیل‌های مستقل، همان مشتق‌های نسبی نظیرهستند، بنابراین، می‌توان مقدار مشتق‌های نسبی را، فوراً به‌دست‌آورد؛ مثلاً برای $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$، مستقیماً داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

و برای $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

[با ۲) و ۳)، **۱۷۷** مقایسه کنید].

۱۸۶. کاربرد دیفرانسیل کامل درمحاسبه‌های تقریبی. از دیفرانسیل کامل تابع چند متغییرهم، شبیه‌دیفرانسیل تابع با یك‌متغیر [**۱۰۸**]، می‌توان‌برای برآوردخطا درمحاسبه‌های تقریبی استفاده‌کرد. تابع $u=f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم، برای تعیین مقدارهای x و y، به‌ترتیب، دچار خطاهای Δx و Δy شده باشیم. در این صورت، مقدار u نیز ــ که از روی مقدارهای غیردقیق آوندها محاسبه می‌شود ــ با خطای

$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ به‌دست می‌آید. می‌خواهیم با فرض معلوم بودن خطاهای Δx و Δy، خطای Δu را برآورد کنیم.

با عوض کردن (تقریبی) نمو تابع، با دیفرانسیل آن (که تنها برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك Δx و Δy قابل گذشت است)، داریم:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y \qquad (۱۶)$$

در این‌جا، خطاهای Δx و Δy و هم ضریب‌های آن‌ها، می‌توانند مثبت یا منفی باشند؛ که اگر آن‌ها را، با مقدارهای مطلق خود، عوض کنیم، به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|$$

اگر حداکثر خطاهای مطلق را با δu، δx، δy نشان دهیم، به‌روشنی می‌توان قبول کرد:

$$\delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial u}{uy}\right| \cdot \delta y \qquad (۱۷)$$

به‌چند مثال می‌پردازیم.

۱) قبل ازهمه، به‌کمك این دستور، می‌توان، قاعده‌ای عملی برای محاسبه‌های تقریبی معمولی به‌دست آورد. فرض کنیم $u = xy$ (که در آن $x > 0$ و $y > 0$)، به‌نحوی که $du = y \cdot dx + x \cdot dy$. باعوض کردن دیفرانسیل، با نمو، داریم: $\Delta u = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$ [(۱۶) را ببینید]. و با عبور به‌مرزهای خطا [(۱۷) را ببینید]:

$$\delta u = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y$$

که اگر دوطرف این تساوی را بر $u = xy$ تقسیم کنیم:

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y} \qquad (۱۸)$$

که این قاعده را بیان می‌کند: خطای نسبی (حداکثر) حاصل ضرب، برابراست بامجموع خطاهای نسبی (حداکثر) عامل‌های آن.

می‌توانستیم، ساده‌تر، و به‌این ترتیب عمل کنیم: ابتدا، از رابطهٔ $u = xy$ لگاریتم بگیریم و، سپس، دیفرانسیل آن را محاسبه کنیم*:

---

*) توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که دیفرانسیل $\ln u$ را، مثل حالتی محاسبه کردیم، که u متغیرمستقل است، با وجودی که درعمل، تابعی است از x و y [۱۷۵]. این نکته را، درمورد مثال بعدی هم، باید در نظر داشت.

$$\ln u=\ln x+\ln y,\ \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$$

درحالت $u=\frac{x}{y}$ هم، باهمین روش، به‌دست می‌آید:

$$\ln u=\ln x-\ln y,\ \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}$$

که با عبور به‌مقدارهای مطلق و به‌خطای حداکثر، دوباره به‌همان دستور (۱۸) می‌رسیم. به این ترتیب، خطای نسبی (حداکثر) خارج قسمت، برابراست با مجموع خطاهای نسبی (حداکثر) مقسوم و مقسوم‌علیه.

۲) این نوع محاسبهٔ خطا، درتوپوگرافی، کاربرد زیادی دارد و، به‌خصوص،وقتی که بخواهیم عنصرهای اندازه‌گیری نشده را، از روی عنصرهایی که اندازه‌گرفته شده‌اند، محاسبه کنیم. مثال‌هایی ازاین نوع، می‌آوریم:

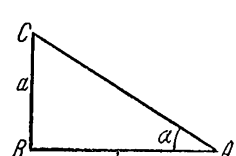
درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۱۰۳)، فرض می‌کنیم، ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ $AB=b$ و زاویهٔ مجاور به‌آن $\widehat{BAC}=\alpha$. اندازهٔ a (ضلع دیگرمجاور به زاویهٔ قائمه) هم از روی رابطهٔ $a=b.tg\alpha$ به‌دست می‌آید. خطاهای اندازه‌گیری b و α، روی a، چگونه اثرمی‌گذارد؟

با دیفرانسیل‌گیری داریم:

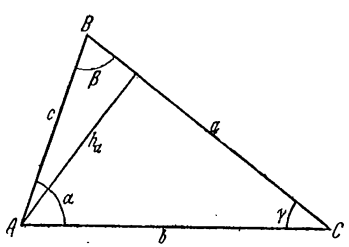
$$da=tg\alpha.db+\frac{b}{\cos^2\alpha}.d\alpha$$

به‌نحوی که

$$\delta a=tga.\delta b+\frac{b}{\cos^2\alpha}.\delta\alpha$$



شکل ۱۰۳



شکل ۱۰۴

فرض کنیم، مثلاً، اندازه گیری، ما را به‌این نتیجه‌ها رسانده باشد:

$$b = ۱۲/۵۶(\text{متر}) \pm ۰/۰۵(\text{متر}),\ \alpha = ۲۵^\circ ۲۱' ۴۰'' \pm ۱۲''$$

به‌طوری که

$$a = ۵۷/۶۲(\text{متر})$$

δa را از روی دستور، تعیین می کنیم؛ درآن داریم: $\delta b = ۰/۰۵$ و $\delta\alpha = \frac{۱۲''}{۲۰۶۲۶۵''}$

(زیرا، باید $\delta\alpha$ را برحسب رادیان بیان کردویك رادیان برابراست با $\frac{۶۰'' \times ۶۰ \times ۳۶۰}{۲\pi}$، یعنی $۲۰۶۲۶۵''$). داریم:

$$tg\alpha \cdot \delta b = ۰/۰۲۳۷,\ \frac{b}{\cos^۲\alpha}\delta\alpha = ۰/۰۰۸۷$$

به‌نحوی که، با گرد کردن $\delta a = ۰/۰۴$ می‌شود. بنابراین $a = ۵۷/۶۲(\text{متر}) \pm ۰/۰۴(\text{متر})$.

۳) خطای تعیین ضلع a را، که از رابطهٔ زیر به‌دست می آید، پیدا می کنیم:

$$a = \sqrt{b^۲ + c^۲ - ۲bc\cdot\cos\alpha}$$

مثلث ABC زاویه‌های حاده دارد (شکل ۱۰۴).

بـا استفاده از نتیجه‌هـای مثال ۵) شمارهٔ **۱۷۷**، می‌توان، با توجه به‌دستور (۱۷)، فوراً نوشت:

$$\delta a = \frac{b - c\cdot\cos\alpha}{a}\cdot\delta b + \frac{c - b\cdot\cos\alpha}{a}\delta c + \frac{bc\cdot\sin\alpha}{a}\cdot\delta\alpha$$

از روی شکل هم، مستقیماً به‌دست می آید:

$$b - c\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos\gamma,\ c - b\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos\beta,\ bc\cdot\sin\alpha = a\cdot h_a$$

که درآن، h_a عبارت است از ارتفاع وارد برضلع a درمثلث. به این ترتیب، معلوم می‌شود که

$$\delta a = \cos\gamma\cdot\delta b + \cos\beta\cdot\delta c + h_a\cdot\delta\alpha$$

و از روی این رابطه، به‌سادگی می‌توان دربارهٔ تاثیر جداگانهٔ خطاهای δb، δc و $\delta\alpha$، روی δa، داوری کرد.

۱۸۷. تابع‌های همگن. می‌دانیم، چند جمله‌ای همگن، بـه چندجمله‌ای گفته می‌شود

که همهٔ جمله‌های آن، از یك درجه، باشند. مثلاً عبارت

$$۳x^۲ - ۲xy + ۵y^۲$$

یك چندجمله‌ای همگن از درجهٔ دوم است. اگر، دراین عبارت، x و y را درضریبی مثل t ضرب کنیم، درهمهٔ جمله‌های چندجمله‌ای، ایـن ضریب t، با درجهٔ دوم ظـاهر می‌شود. برای هرچند جمله‌ای همگن، همین وضع وجود دارد.

تابع‌هایی هم که طبیعت بغرنج‌تری دارند، می‌توانند، همین خاصیت را داشته‌باشند مثلاً، اگردرعبارت

$$x\frac{\sqrt{x^۴+y^۴}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}$$

آوندهای x و y را بهtx و ty تبدیل کنیم، به‌عبارتی می‌رسیم، که درآن، عامل $t^۲$ وجود دارد. بنابرایـن، می‌توان‌آن را جمله‌ای از یك عبارت همگن درجهٔ دوم به‌حساب آورد. طبیعی است‌که تابع نظیر آن را، تابع همگن درجهٔ دوم بنامیم.

تعریف کلی را بدهیم:

تابع $f(x_۱, \dots, x_n)$ ازn آوند را، که درحوزه $\mathcal{D}$ معین است، تابعی همگن‌ازدرجهٔ m می‌نامیم، بـه‌شرطی‌که، اگر همهٔ‌آوندها را باضریب t درنظر بگیریم، تابع، این ضریب را به درجهٔ m تبدیل‌کند، یعنی اتحاد زیر برقرار باشد:

$$f(tx_۱, \dots, tx_n) = t^m \cdot f(x_۱, \dots, x_n) \qquad (۱۹)$$

برای سادگـی‌کار، فـرض می‌کنیم کـه $x_۱$، ... ، x_n و t، تنها مقدارهـای مثبت را اختیارکنند. همچنین فرض‌می‌کنیم، حوزهٔ $\mathcal{D}$، که درآن تابع f را بررسی می‌کنیم، همراه باهرنقطهٔ $M(x_۱, \dots, x_n)$، شامل هر نقطهٔ به‌صورت $M_t(tx_۱, \dots, tx_n)$، به‌ازای $t>۰$، باشد، یعنی شامل همهٔ نیم‌خطهایی باشدکه ازنقطهٔ مبداء آغازشده وازنقطهٔ M گذاشته‌اند.

درجهٔ همگن‌بودن، یعنی m، می‌تواند هرعدد حقیقی دلخواه باشد مثلاً، تابع

$$x^\pi \cdot \sin\frac{y}{x} + y^\pi \cdot \cos\frac{x}{y}$$

نسبت به‌آوندهای x و y، تابعی است همگن و ازدرجهٔ π.

حالا، کوشش می‌کنیم، عبارت‌کلی تابع همگن درجهٔ m را، پیداکنیم.

$f(x_۱, \dots, x_n)$را تابعی همگن ازدرجهٔ صفرمی‌گیریم. آن‌وقت

$$f(tx_۱, tx_۲, \dots, tx_n) = f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$$

با فرض $t=\frac{۱}{x_۱}$ به‌دست می‌آید:

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)=f\left(۱, \frac{x_۲}{x_۱}, \dots, \frac{x_n}{x_۱}\right)$$

اگر تابعی با $(n-۱)$ آوند را، با شرط زیر، درنظر بگیریم:

$$\varphi(u_۱, \dots, u_{n-۱})=f(۱, u_۱, \dots, u_{n-۱})$$

معلوم می‌شود که

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)=\varphi\left(\frac{x_۲}{x_۱}, \dots, \frac{x_n}{x_۱}\right)$$

به‌این ترتیب، هر تابع از درجهٔ صفر، به‌صورت تابعی از نسبت همهٔ آوندها به‌یکی از آن‌ها، درمی‌آید. عکس این حکم هم درست است، به نحوی که برابری اخیر، عبارت کلی تابع همگن مرتبهٔ صفر را به‌دست می‌دهد.

اگر $f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$، تابعی همگن و از درجهٔ m باشد (و تنها در این حالت)، نسبت آن بر $x_۱^m$، تابعی همگن و از درجهٔ صفر خواهد بود، به‌طوری که

$$\frac{f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)}{x_۱^m}=\varphi\left(\frac{x_۲}{x_۱}, \dots, \frac{x_n}{x_۱}\right)$$

به‌این ترتیب، صورت کلی تابع همگن از درجهٔ m را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)=x_۱^m \cdot \varphi\left(\frac{x_۲}{x_۱}, \dots, \frac{x_n}{x_۱}\right)$$

مثال:

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^۴+y^۴}}{x-y} \cdot \ln\frac{x}{y}=x^۲ \cdot \frac{\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۴}}{\frac{y}{x}-۱} \cdot \ln\frac{y}{x}$$

۱۸۸. رابطهٔ اولر. فرض می‌کنیم، تابع همگن (از درجهٔ m) $f(x, y, z)$*، در حوزهٔ (باز) $\mathcal{D}$، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته، نسبت به همهٔ آوندها باشد. با تثبیت نقطهٔ

*) تنها، برای ساده‌کردن نوشته‌ها، در این‌جا، حالت سه متغیر را درنظر گرفته‌ایم.

دلخواه (x_0, y_0, z_0)، از $\mathcal{D}$، به‌اعتبار اتحاد اساسی (۱۹)، برای $t>0$ دلخواه، خواهیم داشت:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^m\cdot f(x_0, y_0, z_0)$$

ازاین تساوی، نسبت به t مشتق می‌گیریم: درسمت چپ، از روی قاعدهٔ مشتق‌گیری تابع مرکب*، و درسمت راست، به‌طورساده، همچون تابع توانی، به‌دست می‌آید:

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+$$
$$+f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0=mt^{m-1}\cdot f(x_0, y_0, z_0)$$

اگردراین تساوی، $t=1$ بگیریم، به رابطهٔ زیرمی‌رسیم:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x_0+f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y_0+f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z_0=$$
$$=m\cdot f(x_0, y_0, z_0)$$

به‌این ترتیب، درنقطهٔ غیرمشخص (x, y, z)، به‌تساوی زیرمی‌رسیم:

$$f'_x(x, y, z)\cdot x+f'_y(x, y, z)\cdot y+f'_z(x, y, z)\cdot z=m\cdot f(x, y, z) \quad (۲۰)$$

که به‌رابطهٔ اولر (L.Euler) معروف است.

دیدیم که هرتابع غیرمشخص همگن درجهٔ m، به‌شرطی که همراه با مشتق‌های نسبی خود پیوسته باشد، دراین تساوی صدق می‌کند. حالا ثابت می‌کنیم که، برعکس، هرتابع پیوسته‌ای که مشتق‌های نسبی پیوسته‌ای داشته باشد و درتساوی اولر (۲۰) صدق کند، حتماً تابعی همگن از درجهٔ m خواهد بود.

$f(x, y, z)$ را، چنین تابعی می‌گیریم، با تثبیت مقدارهای دلخواه x_0، y_0، z_0، تابع زیر را، نسبت به t $(t>0)$، در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}$$

این تابع، به ازای هر $t>0$، معین و پیوسته است. با محاسبهٔ مشتق آن $\varphi'(t)$، از روی قاعدهٔ مشتق‌گیری کسرها، بازهم به‌کسری می‌رسیم که صورت آن چنین است:

$$[f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0+$$

---

*) برای این‌که، حق داشته باشیم ازاین قاعده استفاده کنیم، فرض کردیم که مشتق‌های نسبی هم، پیوسته‌اند [۱۸۱].

$$+f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0]-m\cdot f(tx_0, ty_0, tz_0)$$

اگردر رابطهٔ اولر(۲۰)، xوyوz را، بهtx_0 وty_0 وtz_0 تبدیل کنیم، می‌بینیم که این صورت کسر، برابر صفر می‌شود، به‌نحوی که $\varphi'(t)=0$ و $\varphi(t)=c=\text{const.}$ (برای $t>0$). برای تعیین ثابت c، در تساوی مشخص کنندهٔ $\varphi(t)$، قرارمی‌دهیم $t=1$. نتیجه می‌شود:

$$c=f(x_0, y_0, z_0)$$

بنابراین

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^m}=f(x_0, y_0, z_0)$$

یا

$$f(tx_0, ty_0, tz_0)=t^m\cdot f(x_0, y_0, z_0)$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

می‌توان گفت که رابطهٔ اولر هم، به‌همان اندازهٔ رابطهٔ اساسی (۱۹)، مشخص کنندهٔ تابع همگن مرتبهٔ m است.

§۴. مشتق‌ها و دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر

۱۸۹. مشتق مرتبه‌های بالاتر. اگر تابع $f(x, y, z)$*، دریك حوزهٔ (باز) $\mathcal{D}$، نسبت به یکی ازمتغیرهـا، مشتق نسبی داشته باشد، خود ایـن مشتق نسبی هم، تابعی از x، y و z است و، به نوبهٔ خود، می‌تواند نسبت به‌همان متغیرویا نسبت بـه متغیردیگری، مشتق نسبی داشته‌باشد.مشتق‌های‌اخیر، برای تابع اولیهٔ $u=f(x, y, z)$، مشتق‌های نسبی (یامشتق‌های جزئی) مرتبهٔ دوم، خواهند بود.

اگرمشتق اول مثلاً، نسبت بـه x گرفته شده بـاشد، مشتق‌هـای این مشتق اول را، نسبت به x و y و z، چنین نشان می‌دهند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\partial z}$$

*) دراین‌جا هم، برای سادگی نوشته‌ها، به‌تابعی ازسه متغیر، اکتفا می‌کنیم.

یا

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0),\quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$
$$^*u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)$$

به‌همین ترتیب، می‌توان، مشتق مرتبه‌های سوم، چهارم وغیره (یا مشتق سوم، چهارم و ...) را تعریف کـرد. تعریف کلـی مشتق نسبی مرتبهٔ nام را، می‌توان با روش استقرائی، ارائه داد.

یادآوری می‌کنیم که‌مشتق‌های نسبی‌مرتبه‌های بالاتر، نسبت به‌متغیرهای مختلف، مثلاً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}, \ldots$$

را، مشتق‌های نسبی مختلط می‌نامند.

مثال‌ها ۱) فرض می‌کنیم $u = x^4 y^3 z^2$؛ دراین صورت

$$u'_x = 4x^3 y^3 z^2, \qquad u''_{xy} = 12x^3 y^2 z^2,$$
$$u'_y = 3x^4 y^2 z^2, \qquad u''_{yx} = 12x^3 y^2 z^2,$$
$$u'_z = 2x^4 y^3 z, \qquad u''_{zx} = 8x^3 y^3 z,$$
$$u'''_{xyz} = 24x^3 y^2 z, \qquad u^{IV}_{xyzx} = 72x^2 y^2 z,$$
$$u'''_{yxx} = 36x^2 y^2 z^2, \qquad u^{IV}_{yxxz} = 72x^2 y^2 z,$$
$$u'''_{zxy} = 24x^3 y^2 z, \qquad u^{IV}_{yxyx} = 72x^2 y^2 z^2$$

۲) درشمارهٔ **۱۷۷**، مشتق‌های نسبی تابع $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ را به‌دست آوردیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

حالا، مشتق‌های بعدی را حساب می‌کنیم:

---

*) روشن است که‌علامت دیفرانسیلی را ، باید مانند نماد یك پارچه درنظر گرفت. مربع ∂x^2، درمخرج، به جای $\partial x \partial x$ است و نشان می‌دهد که، نسبت به x، دوبار مشتق گرفته‌ایم؛ درست، همان طورکه اندیس x^2 هم، به معنای xx است. این نکته را، در آینده هم، باید درنظر داشت.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},\ldots$$

۳) برای تابع $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3x^2\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

عبارت‌های مشابهی هم، برای $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ به‌دست می‌آید. با ترکیب آن‌ها، ثابت می‌شود که تابع u، درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

۴) فرض می‌کنیم $y=f(x+at)+\varphi(x-at)$، که در آن، $a=\text{const}$. و $f(u)$ و $\varphi(u)$ دو تابع نامشخص و دارای مشتق‌های اول و دوم، هستند. ثابت می‌کنیم که، هرچه باشند تابع‌های f و φ، تابع y درمعادلهٔ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$، صدق می‌کنند.

با استفاده ازقاعدهٔ مشتق‌گیری تابع‌های مرکب داریم*:

---

*) f' و φ'، به‌معنای مشتق $f(u)$ و $\varphi(u)$، نسبت به‌آوند u است.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x+at)+\varphi'(x-at),\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x+at)+\varphi''(x-at),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=f'(x+at)\cdot a+\varphi'(x-at)(-a),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f''(x+at)\cdot a^2+\varphi''(x-at)\cdot(-a)^2=a^2\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

۵) ثابت کنید که عبارت

$$z=x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

که در آن، φ و ψ، تابع‌هایی نامشخص (و دارای مشتق‌های اول ودوم) را نشان می‌دهند، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^3}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x^3}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

که اگرسه مشتق اخیر را، به‌ترتیب، در x^2، $2xy$ و y^2 ضرب و، سپس، آن‌ها را باهم جمع کنیم، به نتیجهٔ صفر، می‌رسیم.

۱۹۰. قضیهٔ مربوط به مشتق‌های مختلط. ازمثال‌های ۱) و ۲) دیده می‌شود که اگر مشتق‌های مختلط را، نسبت به‌یك نوع ازمتغیرها، ولی با ترتیب‌های متفاوت، محاسبه کنیم، نتیجهٔ آن‌ها، یکی می‌شود.

باید توجه داشت که، این نتیجه، به‌هیچ وجه، ناشی ازتعریف مشتق مختلط نیست و حالت‌هایی وجود دارد که این دونوع مشتق با هم برابر نیستند.

به‌عنوان مثال، این تابع را در نظرمی گیریم:

$$f(x,y)=xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ (x^2+y^2>0),\ f(0,0)=0$$

داریم:

$$f'_x(x,y)=y\cdot\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\quad (x^2+y^2>0)$$

$$f'_x(0,0)=0$$

اگر حالت خاص $x=0$ را در نظر بگیریم، برای هر مقدار y (ومنجمله برای $y=0$) داریم: $f'_x(0,y)=-y$. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که در نقطهٔ $(0,0)$ داریم:

$$f''_{xy}(0,0)=-1$$

اگر، به‌همین ترتیب، f''_{yx} را در نقطهٔ $(0,0)$ پیدا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f''_{yx}(0,0)=1$$

بنابراین، درمورد این تابع داریم: $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

با وجود این، برابر بودن مشتق‌های مختلط درمثال‌ها ـ با تفاوت ترتیب دیفرانسیل‌ها ـ امری تصادفی نیست. این امر، درمورد طبقه وسیعی از تابع‌ها ـ که مشروط به‌شرط‌های معینی باشند ـ اتفاق می‌افتد. با قضیهٔ ساده‌تر زیر آغاز می‌کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم: ۱) $f(x,y)$، در حوزهٔ (باز) $\mathcal{D}$، معین باشد، ۲) در این حوزه، مشتق‌های اول f'_x و f'_y و، همچنین، مشتق‌های دوم مختلط f''_{xy} و f''_{yx} وجود داشته باشد، وبالاخره ۳) مشتق‌های اخیر f''_{xy} و f''_{yx}، به‌عنوان تابع‌هایی از x و y، در نقطهٔ (x_0,y_0) حوزهٔ $\mathcal{D}$، پیوسته باشند. آن‌وقت، در این نقطه داریم:

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=(f''_{yx}(x_0,y_0)\qquad (1)$$

اثبات. این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}$$

که در آن، h و k مخالف صفر و، مثلاً، مثبت هستند. ضمناً، h و k تا حدی کوچک‌اند که تمامی مستطیل $[x_0,x_0+h;y_0,y_0+k]$ در $\mathcal{D}$ قرار گرفته است. تا انتهای بحث، این نکته‌ها را در نظر داریم.

این تابع کمکی از x را، وارد می‌کنیم:

$$\varphi(x)=\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}$$

این تابع، دربازهٔ $[x_0, x_0+h]$، باتوجه به ۲)، دارای مشتق است:

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x, y_0+k)-f'_x(x, y_0)}{k}$$

و در نتیجه، پیوسته است. به‌کمك این تابع، عبارت W را، که برابر است با

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}-\right.$$
$$\left.-\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}\right] \qquad (۲)$$

می‌توان به این‌صورت نوشت:

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$$

چون برای تابع $\varphi(x)$، دربازهٔ $[x_0, x_0+h]$، همهٔ شرط‌های قضیهٔ لاگرانژ [۱۱۲] برقرار است، با توجه به‌دستور نموهای محدود، می‌توانیم W را، به این شکل، بنویسیم:

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}$$
$$(0<\theta<1)$$

با استفاده از وجود مشتق $f''_{xy}(x, y)$، دوباره دستور نموهای محدود را، واین‌بار، دربارهٔ تابع‌ازy: $f'_x(x_0+\theta h, y)$، دربازهٔ $[y_0, y_0+k]$، به‌کارمی‌بریم. بالاخره‌به‌دست می‌آید:

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \quad (0<\theta, \theta_1<1) \qquad (۳)$$

ولی عبارت W، نسبت‌به x و y ازیك طرف و h و k ازطرف دیگر، متقارن است، بنابراین، می‌توان نقش‌آن‌هارا، با آوردن تابع کمکی

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h, y)-f(x_0, y)}{h}$$

عوض‌کرد و با بحث مشابهی، نتیجهٔ زیر را به‌دست‌آورد:

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2,\ \theta_3<1) \qquad (۴)$$

ازمقایسهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k)$$

حالا، با میل h و k به سمت صفر، در این برابری، تساوی حدی را بسه دست می‌آوریم. باتوجه به محدود بودن ضریب‌های θ، θ_1، θ_2، θ_3، آوندهـای سمت راست و سمت چپ، به‌سمت x_0 و y_0 میل می‌کنند و آن‌گاه، به‌اعتبار۳)، بالاخره داریم:

$$f''_{xy}(x,\ y)=f''_{yx}(x,\ y)$$

قضیه ثابت شد.

به این‌ترتیب، مشتق‌های مختلط پیوستهٔ f''_{xy} و f''_{yx}، همواره برابرند.

درمثالی‌که قبلاً آوردیم، مشتق‌های

$$f'_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \quad (x^2+y^2>0)$$

وقتی که $x\to 0$ و $y\to 0$، اصلاً دارای حـدی نیستند و، در نتیجه، در نقطهٔ $(0,\ 0)$ ناپیوسته‌اند. و طبیعی است‌که قضیهٔ فوق‌را، درموردآن، نمی‌توان به‌کاربرد.

جالب خواهد بودکه مسالهٔ مربوط به‌برابری (۱) را، بامسالهٔ مربوط به‌حد تکراری ــ‌که درشمارهٔ **۱۶۸** بررسی کردیم‌ــ‌مقایسه‌کنیم. اگروجودمشتق‌های‌اول را مفروض‌بگیریم، آن‌گاه بانوشتن عبارت W به‌صورت (۲)، به‌سادگی دیده می‌شودکه

$$\lim_{k\to 0} W=\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h} \quad (h=\text{const.}) \qquad (۵)$$

و مشابه‌آن

$$\lim_{h\to 0} W=\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k} \quad (k=\text{const.}) \qquad (۵^*)$$

آن‌گاه، از روی خود تعریف مشتق

$$f''_{yx}(x_0,\ y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0)-f'_y(x_0,\ y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} W \qquad (۶)$$

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k)-f'_x(x_0,\ y_0)}{k}=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} W \qquad (۶^*)$$

به این ترتیب، مسألهٔ مربوط به وجود برابری مشتق‌های مختلط، با مسالهٔ مربوط به‌وجود برابری حدهای تکراری برای عبارت W (که‌به k و h بستگی دارد)، یکی‌است.

از این یادداشت، می‌توان، برای تقریب قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، استفاده‌کرد.

علاوه بر وجود مشتق‌های اول، وجود تنها یکی از مشتق‌های مختلط را، مثلاً $f''_{xy}(x, y)$ درهمسایگی نقطهٔ (x_0, y_0) (حتی با کنارگذاشتن خود این نقطه)،مفروض می‌گیریم. به‌علاوه فرض می‌کنیم‌که حد متناهی

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f''_{xy}(x, y) = A$$

وجود داشته باشد.

از این‌جا، وجود هر دو مشتق مختلط در نقطهٔ (x_0, y_0) و برابری (۱)، نتیجه می‌شود*.

در واقع، با آغاز فرض، می‌توان مانند سابق، به برابری (۳) رسید و، سپس، با استفاده از وجود حد تابع $f''_{xy}(x, y)$ درنقطهٔ (x_0, y_0)، وجود حد دوگانه را، ضمن میل هم‌زمان h و k به‌سمت صفر، ثابت‌کرد:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} W = A$$

ولی حدهای سادهٔ (۵) و (*۵)، بنابه فرض، وجود دارند؛ بنابراین، از روی قضیهٔ شمارهٔ ۱۶۸، حدهای تکراری (۶) و (*۶) نیز وجود دارند و برابر حد دوگانه‌اند. و این، به معنای آن است‌که مشتق‌های $f''_{xy}(x_0, y_0)$ و $f''_{yx}(x_0, y_0)$ وجود دارند و باهم برابرند.

۱۹۱. تعمیم. حالا دیگر می‌توانیم، قضیهٔ کلی مربوط به مشتق‌های مختلط را ثابت کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم‌تابع $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از n متغیر، درحوزهٔ (باز) nبعدی $\mathcal{D}$، معین و دارای همهٔ مشتق‌های نسبی تا مرتبهٔ $(k-1)$ام و مشتق‌های مختلط مرتبهٔ kام باشد و، ضمناً، همهٔ این مشتق‌ها، در $\mathcal{D}$، پیوسته باشند.

با این شرط‌ها، مقدار مشتق مختلط مرتبهٔ kام، بستگی به ردیفی ندارد که توالی مشتق‌ها، طبق‌آن، انجام می‌گیرد.

اثبات. به‌ازای $k = ۲$، قضیه را ثابت‌کردیم، به‌طوری‌که مثلاً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

---

*) این حکم، متعلق به شوارتز است (H. A. Schwarz).

در واقع، برای این‌که، این‌حالت را، به‌قضیهٔ اول تبدیل کنیم، کافی است توجه کنیم که برای محاسبهٔ این مشتق‌ها، می‌توان همهٔ متغیرهـا (به جز x_i و x_j) را، مقدارهای ثابتی فرض کرد. ضمناً، با تثبیت سایـر متغیرها، پیوستگی این مشتق‌ها حفظ می‌شود (زیرا، طبق فرض، مشتق‌ها نسبت به همهٔ متغیرها، پیوسته بودند). حالا به حالت $k>۲$ می‌پردازیم.

ابتدا، قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم کـه، در محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ kام، تنها دو دیفرانسیل پشت سرهم را جابه‌جا کرده باشیم. یعنی درستی این برابری را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_h}\partial x_{i_{h+1}}\cdots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{h+1}}\partial x_{i_h}\cdots\partial x_{i_k}} \qquad (۷)$$

(در این‌جـا، i_1، i_2، ...، i_h، i_{h+1}، ...، i_k، یك علامت‌گذاری از n علامت ۱، ۲، ...، n، با تکرارهای ممکن است).

با مشتق‌گیری‌های متوالی لازم، برای محاسبهٔ این مشتق‌ها، می‌بینیم کـه مشتق مرتبهٔ $(h-۱)$ام، برای هردو حالت، یکی است. با استفاده از قضیه‌ای که برای حالت $k=۲$ ثابت کردیم، معلوم می‌شود که مشتق‌های مرتبهٔ $(h+۱)$ام آن‌ها هم، برابرند. دنبالهٔ عمل‌ها هم، در هردوحالت، یکسان است و، بنابراین، به نتیجه‌های یکسانی منجر می‌شود.

به این‌ترتیب، برابری (۱) درست است وقضیه، برای این حالت، ثابت شده است. ولی، از آن‌جا که هر جابه‌جائی عنصرها را می‌توان، با یك سلسله جابه‌جائی، به‌جابه‌جائی دوعنصر پشت‌سرهم‌منجر کرد، بنابراین، درواقع، قضیه را برای حالت‌کلی‌هم ثابت کرده‌ایم: اگر شرط پیوستگی مشتق‌های نظیر برقرار باشد، همواره می‌تـوان دیفرانسیل‌های متغیرهای مختلف را، با یکدیگر، جابه‌جا کرد.

بعد از این، همواره، مشتق‌ها را پیوسته خواهیم گرفت، بـه‌طوری‌کـه ردیف توالی مشتق‌ها، بی‌تفاوت باشد. این وضع، ضمناً، به‌ما اجازه می‌دهدکه برای نوشتن مشتق مختلط، مشتق‌گیری‌های نسبت به یك متغیر را، باز هم بیاوریم. اگر u، تابعی از x_1، x_2، ...، x_n باشد، چنین مشتقی را، این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

که در آن داریم: $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$. اگر هم u، تابعی از x، y، ...، z باشد، در آن‌صورت، این مشتق، این‌طور نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}\cdots\partial z^{\gamma}}$$

که‌در آن $\alpha+\beta+\ldots+\gamma=k$. ضمناً، هر کدام از نماهای α_1، α_2، ...، α_n یا α، β، ...، γ می‌توانند مساوی صفر هم باشند. وقتی که نمائی صفر باشد، عملاً به‌معنای این است که نسبت به متغیر نظیر، مشتق نگرفته‌ایم.

۱۹۲. مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر از تابع‌های مرکب. این تابع را مفروض می‌گیریم:

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که‌در آن، x_1، x_2، ...، x_n، به نوبهٔ خود، تابع‌هایی از متغیرهای t_1، t_2، ...، t_m هستند.

$$x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

در مورد تابع‌های f و φ_i، فرض می‌کنیم که همهٔ آن‌ها، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته، نسبت به‌همهٔ متغیرها، تا مرتبهٔ kام باشند. با درنظر گرفتن u، به‌عنوان تابعی مرکب از متغیرهای t_1، t_2، ...، t_m:

$$u=F(t_1, t_2, \ldots, t_m)=f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

ثابت می‌کنیم که، این تابع مرکب نیز، دارای همهٔ مشتق‌ها، تا مرتبهٔ kام است و، ضمناً، این مشتق‌ها، پیوسته‌اند.

اگر دقیق‌تر بگوییم، می‌خواهیم حکم زیر را ثابت کنیم: هر مشتق مرتبهٔ kام تابع F وجود دارد که تشکیل شده است‌ازمشتق‌های تابع f (نسبت‌به آوندهای x_1، x_2، ...، x_n) و تابع‌های φ_i (نسبت‌به آوندهای t_1، t_2، ...، t_m) با مرتبه‌ای که از k تجاوز نمی‌کند،از راه ضرب و جمع.

استدلال را، با روش استقرای ریاضی می‌آوریم. برای $k=1$، حکم ثابت است و از دستوری‌که قبلاً دربارهٔ مشتق تابع مرکب ثابت‌کردیم [۱۸۱]، نتیجه می‌شود.

فرض‌می‌کنیم که، قضیه برای همهٔ مشتق‌های‌همهٔ مرتبه‌های پایین‌تر از k، درست‌باشد، ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت، برای مشتق‌های مرتبهٔ kام هم درست است. هرمشتق kام، از یك مشتق $(k-1)$ام، با مشتق‌گیری نسبت به یکی از t_jها، به‌دست می‌آید. مشتق مرتبهٔ $(k-1)$ام را در نظر می‌گیریم. این مشتق، بنابه فرض، از مشتق‌های تابع‌های f و φ_i، نسبت به متغیرهای x و t، با مرتبه‌هایی که از $(k-1)$ تجاوز نمی‌کند، از راه ضرب و جمع، به‌دست می‌آید؛ یعنی به‌صورت مجموعی ازحاصل‌ضرب مشتق‌های مذکور است. با مشتق‌گیری نسبت‌به t_j، درمورد هرکدام ازاین ضرب‌ها، بایدبه‌نوبت ازهرکدام ازعامل‌ها، مشتق بگیریم. وقتی که این عامل، مشتقی از یکی از تابع‌های φ است که مرتبهٔ آن از $(k-1)$ تجاوز نمی‌کند، بعد از مشتق‌گیری، مشتقی ازهمان تابع به‌دست می‌آیدکه مرتبهٔ

آن از k تجاوز نمی‌کند. و اگر این عامل، مشتقی، با مرتبه‌ای که از $(k-1)$ تجاوز نمی‌کند، از تابع f باشد، دراین صورت، با در نظر گرفتن آن، به‌عنوان تابعی مرکب از متغیرهای t و مشتق‌گیری نسبت به t_j، آن را با مجموع معلومی از حاصل ضرب‌ها، عوض می‌کنیم*.

به این ترتیب، برای مشتق موردنظر مرتبهٔ kام، به‌روشنی، همان عبارتی به دست می‌آید، که می‌خواستیم، و همین، حکم ما را ثابت می‌کند.

پیوستگی مشتق‌های تابع مرکب F، از خود طریق تشکیل آن‌ها از مشتق‌های f و φ_i، و با توجه به پیوستگی مشتق‌های اخیر، ناشی می‌شود.

۱۹۳. دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر. فرض کنیم که تابع $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$، در حوزهٔ $\mathcal{D}$، دارای مشتق‌های نسبی پیوستهٔ مرتبهٔ اول باشد. در آن‌صورت، به‌طوری که می‌دانیم دیفرانسیل (کامل) du، عبارت است از

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

که در آن، dx_1، ...، dx_n، عبارتند از نموهای دلخواه متغیرهای مستقل x_1، ...، x_n.

می‌بینیم که du هم، تابعی است از x_1، x_2، ...، x_n. اگر به‌فرض، مشتق‌های پیوستهٔ مرتبهٔ دوم برای u وجود داشته باشد، به‌معنای این‌است که du، مشتق‌های نسبی مرتبهٔ اول‌را دارد و، آن‌وقت، می‌توان دربارهٔ دیفرانسیل (کامل) از این دیفرانسیل du، یعنی $d(du)$، صحبت کرد، که آن‌را دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (یا کوتاه‌تر: دیفرانسیل دوم) u می‌نامند و با نماد d^2u نشان می‌دهند.

توجه به این نکته مهم است که: نموهای dx_1، dx_2، ...، dx_n، همچون مقدارهای ثابتی در نظر گرفته می‌شوند و، ضمن عبور از یك دیفرانسیل به دیفرانسیل بعدی، تغییر نمی‌کنند.

به‌این ترتیب، اگر از قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right).dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right).dx_2+\dots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).dx_n$$

---

*) پیوستگی همهٔ مشتق‌های تابع f، حق استفاده از قاعدهٔ معلوم، برای محاسبهٔ مشتق از تابع مرکب را، برای ما تامین می‌کند [۱۸۱].

و یا پس از بازکردن

$$d^2u=\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\cdot dx_1+\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_n}\cdot dx_n\right)\cdot dx_1+$$

$$+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_2\partial x_n}\cdot dx_n\right)\cdot dx_2+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_n\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial^2u}{\partial x_n\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}\cdot dx_n\right)\cdot dx_n=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\cdot dx_1^2+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\cdot dx_2^2+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}\cdot dx_n^2+$$

$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}\cdot dx_1dx_2+2\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_3}\cdot dx_1dx_3+\cdots+$$

$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x_2\partial x_3}\cdot dx_2dx_3+\cdots+2\frac{\partial^2u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\cdot dx_{n-1}dx_n$$

به همین ترتیب، می‌توان دیفرانسیل مرتبهٔ سوم و غیره را تعریف کرد. به طور کلی، اگر دیفرانسیل مرتبهٔ $(k-1)$ام $d^{k-1}u$ معلوم باشد، دیفرانسیل مرتبهٔ kام d^ku، به عنوان دیفرانسیل (کامل) از دیفرانسیل مرتبهٔ $(k-1)$ام تعریف می‌شود*:

$$d^ku=d(d^{k-1}u)$$

اگر برای تابع u، مشتق‌های نسبی همهٔ مرتبه‌ها، تا مرتبهٔ kام، وجود داشته باشد، آن‌گاه، وجود این دیفرانسیل kام نیز تامین است. ولی، همان‌طور که احساس می‌کنید، عبارت‌های باز شدهٔ دیفرانسیل‌های متوالی، مرتباً، بغرنج‌تر و مفصل‌تر می‌شوند. به‌خاطر ساده‌کردن شیوهٔ نوشتن آن‌ها، به‌این روش متوسل می‌شوند:

قبل‌از همه، درعبارت دیفرانسیل اول «حرف u را پشت پرانتز قرار می‌دهیم و آن‌را به‌طور نمادی، به‌این ترتیب، می‌نویسیم:

$$du=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)\cdot u$$

---

*) به‌سادگی می‌توان مفهوم دیفرانسیل‌های نسبی از مرتبهٔ دلخواه را، مشخص کرد، ولی‌ما، به‌آن نمی‌پردازیم.

حالا، اگر در عبارت دیفرانسیل دوم هم «u را پشت پرانتز بیاوریم»، عبارت باقی‌ماندهٔ داخل پرانتز، به‌طور صوری، به‌صورت بازشدهٔ توان دوم عبارت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{dx_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

و بنا بر این، دیفرانسیل دوم را، به‌طور نمادی، می‌توان چنین نوشت:

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^2\cdot u$$

به‌همین ترتیب، می‌توان دیفرانسیل سوم و مرتبه‌های بالاتر را هم نوشت. این، یک قاعدهٔ کلی است و برای هر k، برابر نمادی زیر، برقرار است:

$$d^ku=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^k\cdot u \qquad (۸)$$

که باید این طور فهمیده شود: ابتدا چندجمله‌ای واقع در پرانتز را، به طور صوری، طبق قاعدهٔ جبری، به توان می‌رسانیم و، سپس، همهٔ جمله‌های حاصل را در u «ضرب» می‌کنیم (یعنی u را درصورت کسرها، پهلوی ∂^k می‌نویسیم) و، آن‌وقت، همهٔ نمادها، به‌معنای مشتق‌ها یا دیفرانسیل‌ها، بازمی‌گردند.

دیدیم که این قاعده، برای $k=1$ و $k=2$ درست است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم که اگر برای d^ku درست باشد، برای $d^{k+1}u$ هم درست است.

با توجه به‌این‌که، قاعده را بر d^ku درست فرض کرده‌ایم، آن‌را باز می‌کنیم:

$$d^ku=\sum C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\cdot\frac{\partial^ku}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}\cdot dx_2^{\alpha_2}\cdots dx_n^{\alpha_n}$$

که در آن، علامت $\sum$، مجموع همهٔ گروه‌های ممکن شامل عددهای صحیح و غیرمنفی α_1، α_2، ...، α_n را، با شرط $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$ دربر می‌گیرد و

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}=\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

ضریب «چندجمله‌ای» هستند (یعنی ضریب‌هایی که از بسط یک چندجمله‌ای جبری، وقتی که به‌توان k می‌رسد، به‌دست می‌آید).

بنا بر فرض، مشتق‌های پیوستهٔ مرتبهٔ $(k+1)$ام وجود دارد. از رابطهٔ قبل، دیفرانسیل می‌گیریم، داریم:

$$d^{k+1}u=\sum C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\cdot\left[\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1+1}dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n}+\right.$$

$$+\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2+1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2+1}\ldots dx_n^{\alpha_n}+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n+1}}\cdot dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n+1}\right]$$

مشاهده می‌شود که همین عبارت را، می‌توانستیم از ضرب عبارت‌های نمادی زیر به‌دست آوریم:

$$\sum C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\partial x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\partial x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)$$

و سپس، u را بنویسیم: ولی، این ضرب، چیزی جز حاصل‌ضرب

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^k\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^{k+1}$$

نیست، به‌نحوی که

$$d^{k+1}u=\left(\frac{\partial}{dx_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^{k+1}\cdot u$$

و این، همان رابطه‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از بحث‌های قبل‌دیده می‌شود که، دیفرانسیل kام، عبارت است از چندجمله‌ای صحیح همگن از درجه k و یا، به‌اصطلاح، عبارت است از شکل مرتبهٔ kام نسبت به‌دیفرانسیل‌های متغیرهای مستقل، که ضریب‌های آن‌ها را، مشتق نسبی مرتبهٔ kام، ضرب در ثابت‌های عددی صحیح (ضریب‌های «چندجمله‌ای»)، تشکیل می‌دهند.

مثلاً، اگر داشته باشیم $u=f(x,y)$، آن‌گاه

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cdot dy^2,$$

$$d^3u=\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\cdot dx^3+3\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}\cdot dx^2dy+3\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}\cdot dxdy^2+\frac{\partial^3u}{\partial y^3}\cdot dy^3,$$

$$d^4u=\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\cdot dx^4+4\frac{\partial^4u}{\partial x^3\partial y}\cdot dx^3dy+6\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}\cdot dx^2dy^2+$$

$$+4\frac{\partial^4u}{\partial x\partial y^3}\cdot dxdy^3+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\cdot dy^4.$$

و غیره. اگر به‌طور مشخص، فرض کنیم $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$، خواهیم داشت:

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},\quad d^2u=\frac{2xy(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$d^3u=\frac{(6x^2y-2y^3)dx^3+(18xy^2-6x^3)dx^2dy}{(x^2+y^2)^3}+$$

$$+\frac{(6y^3-18x^2y)dxdy^2+(2x^3-6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

وغیره.

وقتی‌که تعداد متغیرها زیادتر شود، عبارات دیفرانسیل هم، به‌همان نسبت، پیچیده‌تر می‌شود. در حالتی‌که داشته باشیم $u=f(x, y, z)$، بازشدهٔ دیفرانسیل سوم، چنین است:

$$d^3u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial}{\partial z}\cdot dz\right)^3\cdot u=\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\cdot dx^3+\frac{\partial^3u}{\partial y^3}\cdot dy^3+$$

$$+\frac{\partial^3u}{\partial z^3}\cdot dz^3+3\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}\cdot dx^2dy+3\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}\cdot dxdy^2+$$

$$+3\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial z}\cdot dx^2dz+3\frac{\partial^3u}{\partial x\partial z^2}\cdot dxdz^2+3\frac{\partial^3u}{\partial y^2\partial z}\cdot dy^2dz+$$

$$+3\frac{\partial^3u}{\partial y\partial z^2}\cdot dydz^2+6\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}\cdot dxdydz$$

۱۹۴. دیفرانسیل تابع‌های مرکب. تابع مرکب زیر را درنظر می‌گیریم:

$$u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

که در آن، به‌نوبهٔ خود داریم:

$$x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

در این حالت، دیفرانسیل اول، می‌تواند به‌صورت سابق حفظ شود:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot dx_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

[براساس بی‌تغییری شکل دیفرانسیل اول، ۱۸۵]. ولی، دراین‌جا، dx_1، ...، dx_n، نه دیفرانسیل‌هایی از متغیرهای مستقل، بلکه دیفرانسیل‌هائی از تابع‌ها هستند، و بنابراین، خودآن‌ها هم، تابع‌هائی می‌شوندکه ممکن‌است، مقدار ثابت ــ مثل حالت قبل ــ نباشند.

با محاسبهٔ دیفرانسیل دوم تابع [و با توجه به قاعده‌های دیفرانسیل‌گیری شمارهٔ ۱۸۵]، خواهیم داشت:

$$d^2u=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\dots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d(dx_1)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d(dx_2)+\dots+\frac{du}{\partial x_n}\cdot d(dx_n)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^2\cdot u+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n$$

می‌بینیم که برای دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر از اول، بی‌تغییری شکل، درحالت کلی، مطرح نیست.

حالا، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که x_1، x_2، ...، x_n، تابع‌هائی خطی از t_1، t_2، ...، t_m باشند. یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$x_i=\alpha_i^{(1)}t_1+\alpha_i^{(2)}t_2+\dots+\alpha_i^{(m)}t_m+\beta_i$$
$$(i=1, 2, \dots, n)$$

که‌در آن، $\alpha_i^{(j)}$ و β_i، مقدارهایی ثابت‌اند.

دراین‌حالت، خواهیم داشت:

$$dx_i=\alpha_i^{(1)}dt_1+\dots+\alpha_i^{(m)}dt_m=\alpha_i^{(1)}\Delta t_1+\dots+\alpha_i^{(m)}\Delta t_m=\Delta x_i$$

می‌بینیم که همهٔ دیفرانسیل‌های اول تابع‌های x_1، x_2، ...، x_n، در این حالت، مقدارهایی ثابت‌اند و به t_1، t_2، ...، t_m بستگی ندارند. بنابراین، در این حالت، می‌توانیم، از همهٔ آن‌چه در شمارهٔ **۱۹۳** گفتیم، بدون هیچ تغییری، استفاده کنیم. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر به‌جای متغیرهای مستقل x_1، x_2، ...، x_n. تابع‌هایی خطی نسبت به t_1، t_2، ...، t_m در نظر بگیریم، عبارت‌های سابق، حتی برای دیفرانسیل‌های مرتبه‌های بالاتر نیز می‌توانند حفظ شوند. در آن‌ها، دیفرانسیل‌های dx_1، dx_2، ...، dx_n. با نموهای Δx_1، Δx_2، ...، Δx_n یکی می‌شوند، ولی این نموها، دلخواه نیستند و مشروط به نموهای Δt_1، Δt_2، ...، Δt_m می‌شوند.

این نکتهٔ ساده، ولی مهم را (که به کوشی تعلق دارد)، مستقیماً در شمارهٔ بعد به‌کار خواهیم برد.

۱۹۵. رابطهٔ تیلور. می‌دانیم [**۱۲۶**. (۱۳)] که تابع $F(t)$، به‌شرط وجود $(n+1)$ مشتق اولیه برای آن، می‌تواند از روی رابطهٔ تیلور، به‌ترتیب زیر، بسط داده شود:

$$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)\cdot(t-t_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}F''(t_0)\cdot(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

(جملهٔ متمم در شکل لاگرانژ، انتخاب شده است). با در نظر گرفتن

$$t-t_0=\Delta t=dt,\ F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0)$$

رابطه بالا را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\cdot\Delta t)\quad(0<\theta<1)$$

ضمناً، تاکید بر این نکته مهم است که، مقدار dt، که با درجه‌های مختلف در عبارت‌های دیفرانسیل‌های سمت راست وجود دارد، دقیقاً برابر است با همان نمو Δt، که نمو تابع سمت چپ را مشخص می‌کند.

درست، رابطهٔ تیلور را، در شکل آخر خود، می‌توان، برای تابع‌های چندمتغیر هم، گسترش داد.

برای سهولت نوشته‌ها، به‌حالت تابع با دومتغیر $f(x,y)$، اکتفا می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که این تابع، درهمسایگی یك نقطهٔ معین (x_0, y_0)، دارای مشتق‌های پیوستهٔ همهٔ مرتبه‌ها، تا مرتبهٔ $(n+1)$ام باشد. به x_0 و y_0، نموهای Δx و Δy را چنان می‌دهیم که پاره‌خط راستی که نقطه‌های (x_0, y_0) و $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ را به‌هم وصل می‌کند، ازمحدودهٔ همسایگی موردنظر نقطهٔ (x_0, y_0) خارج نشود.

می‌خواهیم ثابت کنیم که، با توجه به فرض‌هایی که داشتیم، برابری زیر دربارهٔ تابع $f(x, y)$، درست است:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\theta\cdot\Delta y) \qquad (9)$$

$$(0<\theta<1)$$

ضمناً، دیفرانسیل‌های dx و dy، از درجه‌های مختلف، موجود درسمت راست، درست برابر با آن نموهای Δx و Δy متغیرهای مستقل هستند که نمو تابع سمت چپ را به‌وجودآورده‌اند.

برای اثبات [شبیه شمارهٔ **۱۸۳**]، متغیرجدید t را، با این شرط، وارد می‌کنیم:

$$x = x_0 + t\cdot\Delta x, \quad y = y_0 + t\cdot\Delta y \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad (10)$$

که با گذاشتن این مقدارهای x و y، درتابع $f(x,y)$، تابع مرکب ازیك متغیر t را به دست می‌آوریم:

$$F(t) = f(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y)$$

وما می‌دانیم که آن چه به‌وسیلهٔ رابطه‌های (۱۰) وارد شده است، ازنظرهندسی پاره‌خط راستی را بیان می‌کند که نقطه‌های $M_0(x_0, y_0)$ و $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ را به‌هم می‌پیوندد.

حالامی‌بینیم که، می‌توان به‌جای نمو

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

نموتابع کمکی را درنظر گرفت:

$$\Delta F(x)=F(1)-F(0)$$

زیرا، دونمو با هم برابرند. ولی $F(t)$، تابعی با یك متغیر و دارای [۱۹۲] $(n+1)$ مشتق پیوسته است، درنتیجه، با به‌کاربردن رابطهٔ تیلوردربارهٔ آن، داریم:

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2}d^2F(0)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta)\quad(0<\theta<1)\qquad(11)$$

ضمناً، دیفرانسیل dt، که با درجه‌های مختلف در سمت راست وجود دارد، برابر است با $\Delta t=1-0=1$.

حالا، با استفاده ازاین مطلب، که، جانشینی خطی متغیرها، خاصیت بی‌تغییری شکل دیفرانسیل را حفظ می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$dF(0)=f'_x(x_0, y_0)\cdot dx+f'_y(x_0, y_0)\cdot dy=df(x_0, y_0)$$

$$d^2F(0)=f''_{x^2}(x_0, y_0)\cdot dx^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot dxdy+$$

$$+f''_{y^2}(x_0, y_0)\cdot dy^2=d^2f(x_0, y_0)$$

وغیره. بالاخره، برای دیفرانسیل $(n+1)$ام، خواهیم داشت:

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0+\theta\cdot\Delta y)$$

لازم است به‌این نکته توجه کنیم که، دراین‌جا، دیفرانسیل‌های dx و dy، هیچ تفاوتی با نموهای Δx و Δy ــ که قبلاً انتخاب کردیم ــ ندارند. در واقع

$$dx=\Delta x\cdot dt=\Delta x,\quad dy=\Delta y\cdot dt=\Delta y$$

با قراردادن همهٔ این‌ها، دربسط (۱۱)، به‌بسط مطلوب (۹) می‌رسیم.

خواننده باید به‌خاطربسپارد که، اگر چه شکل دیفرانسیلی رابطهٔ تیلور، برای تابع با چند متغیر، به‌همان سادگی تابع با یك متغیراست، ولی، درشکل بازشده خود، خیلی پیچیده‌تراست. ببینیم، سه جملهٔ اول آن، حتی برای تابع با دو متغیر، به چه صورتی درمی‌آید:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=[f'_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y]+$$

$$+\frac{1}{2!}[f''_{x^2}(x_0, y_0).\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0, y_0).\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0, y_0).\Delta y^2]+$$

$$+\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0, y_0).\Delta x^3+3f'''_{x^2y}(x_0, y_0).\Delta x^2\Delta y+$$

$$+3f'''_{xy^2}(x_0, y_0).\Delta x\Delta y^2+f'''_{y^3}(x_0, y_0).\Delta y^3]+\cdots$$

رابطهٔ (۹)، به‌ازای $n=0$ هم برقرار است. این حالت خاص را در **۱۸۳**، بررسی کرده‌ایم.

§۵. اکسترمم‌ها. مقدارهای حداکثر و حداقل

۱۹۶. اکسترمم‌های تابع با چند متغیر. شرط‌های لازم. تابع

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

را درحوزهٔ $\mathcal{D}$ معین می‌گیریم و $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$را، نقطه‌ای درونی ازاین حوزه فرض می‌کنیم.

گویند، تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، در نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، دارای مـاکزیمم (می‌نیمم) است، اگربتوان‌آن را با چنان همسایگی

$$(x_1^0-\delta, x_1^0+\delta;\ x_2^0-\delta, x_2^0+\delta;\ \ldots;\ x_n^0-\delta, x_n^0+\delta)$$

محصورکردکه، به‌ازای همهٔ نقطه‌های این همسایگی، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$
$$(\geqslant)$$

اگراین همسایگی را بتوان آن قدرکوچک‌گرفت، تـا علامت برابری حذف شود، یعنی درهرنقطه‌ای ازآن ــ به‌استثنای خود نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، نابرابری اکید

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)<f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$
$$(>)$$

برقرار باشد، درآن صورت، گـویندکه در نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، ماکزیمم (می‌نیمم) خاص وجود دارد و، درغیراین صورت، ماکزیمم (می‌نیمم) را، غیرخاص نامند.

برای نام‌گذاری مشترك ماکزیمم ومی‌نیمم، از واژهٔ اکسترمم استفاده می‌شود.

فرض می‌کنیم کـه تابع، درنقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، دارای اکسترمم باشد. ثابت می‌کنیم که اگر، دراین نقطه، مشتق‌های نسبی (متناهی) وجود داشته باشد:

$$f'_{x_1}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ), \dots, f'_{x_n}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

آن وقت، همهٔ مشتق‌های نسبی برابر صفرند، به‌نحوی که صفرشدن مشتق‌های نسبی مرتبهٔ اول، شرط لازم وجود اکسترمم است.

برای این منظور، فرض می‌کنیم $x_2 = x_2^\circ$، ...، $x_n = x_n^\circ$ و x_1 را متغیر نگاه می‌داریم، به‌این ترتیب، با تابعی از یك متغیر، سروکار پیدا می‌کنیم:

$$u = f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_x^\circ)$$

چون فرض کردیم، در نقطهٔ $(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$، اکسترمم وجود دارد (برای مشخص بودن وضع، آن را ماکزیمم می‌گیریم)، منجمله نتیجه می‌شود که در یك همسایگی $(x_1^\circ - \delta, x_1^\circ + \delta)$ از نقطهٔ $x_1 = x_1^\circ$، الزاماً، باید نابرابری زیر برقرار باشد:

$$f(x_1, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ) \leqslant f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$$

به‌نحوی که تابع با یك متغیر فوق، در نقطهٔ $x_1 = x_1^\circ$، دارای ماکزیمم می‌شود. در این جا، از قضیهٔ فرما [۱۰۹]، نتیجه می‌شود که

$$f'_{x_1}(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ) = 0$$

و به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که سایر مشتق‌های نسبی‌هم، در نقطهٔ $(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$، برابر صفرند.

به‌این ترتیب، اکسترمم، «احتمالاً» در نقطه‌هایی خواهد بود که در آن‌ها، همهٔ مشتق‌های نسبی مرتبهٔ اول، برابر صفر شوند. مختصات این نقطه‌ها را می‌توان، از حل دستگاه معادله‌های زیر پیدا کرد:

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

شبیه تابع‌های با یك متغیر، در این جا هم، این‌گونه نقطه‌ها را، نقطه‌های سکون

می‌نامند.*

یادداشت‌ها. I. شرط لازم وجود اکسترمم را، در حالتی که تابع دیفرانسیل پذیر باشد، می‌توان کوتاه‌تر و به‌این ترتیب نوشت:

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

زیرا، اگر داشته باشیم: $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \dots = f'_{x_n} = 0$، روشن است که برای dx_1، dx_2، ...، dx_n دلخواه، داریم:

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \dots + f'_{x_n}dx_n = 0$$

و برعکس، اگر در نقطهٔ مفروض، این شرط به‌طور اتحادی برقرار باشد، آن‌گاه با توجه به نامشخص بودن dx_1، dx_2، ...، dx_n، هرکدام از مشتق‌های f'_{x_1}، f'_{x_2}، ...، f'_{x_n}، جدا جدا، برابر صفر می‌شوند.

II. معمولاً، تابع موردنظر $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$، دارای مشتق‌های نسبی (متناهی) در سرتاسر حوزه می‌باشد و، در این صورت، باید برای پیدا کردن نقطه‌ای که تابع را به اکسترمم می‌رساند، بین نقطه‌های سکون به جست‌و جو پرداخت. ولی، حالت‌هایی پیش می‌آید که بعضی از مشتق‌های نسبی، در نقطه‌های جداگانه‌ای، برابر بی‌نهایت می‌شوند و یا اصلاً وجود ندارند (در عین حال، بقیهٔ مشتق‌ها برابر صفرند). این نقطه‌ها را هم، باید به نقطه‌های سکون اضافه کرد و، به‌عنوان نقطه‌هایی که، احتمالاً، تابع را به اکسترمم می‌رسانند. مورد بررسی قرار داد. [شمارهٔ ۶، ۲۰۱] را ببینید].

۱۹۷. شرط‌های کافی (حالت تابع با دو متغیر). شبیه تابع‌های با یك متغیر، در این جا هم، وجود نقطهٔ سکون، به‌هیچ وجه، کافی برای وجود اکسترمم نیست. اگر، به‌عنوان مثال، تابع ساده $z = xy$ را در نظر بگیریم. آن‌گاه $z'_x = y$ و $z'_y = x$، به‌طور هم‌زمان، تنها در نقطهٔ مبداء (۰،۰) برابر صفر می‌شوند، که در آن‌جا $z = 0$. در عین حال، مستقیماً آشکار است که، در همسایگی دلخواه این نقطه، تابع هم مقدارهای مثبت و هم مقدارهای منفی را اختیار می‌کند و، بنابراین، نمی‌تواند اکسترمم باشد. در شکل ۹۲، سطح (سهموی هذلولی‌وار) نمایش معادلهٔ $z = xy$ داده شده است. این سطح، در نزدیکی مبداء، زینی شکل است که از

---

*) در حالت تابع با دو متغیر $z = f(x, y)$، به‌شرط مشتق‌پذیر بودن آن، شرط‌های

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0$$

تعبیر هندسی ساده‌ای دارند. صفحهٔ مماس [۱۸۰، (۶) را ببینید] بر سطح $z = f(x, y)$، در نقطهٔ نظیر اکسترمم‌های آن، موازی صفحهٔ xy می‌شود.

یك طرف صفحهٔ قائم به‌سمت بالا وازطرف دیگرصفحهٔ قائم، به‌سمت پایین، خم‌شده‌است.

بنابراین، مسالهٔ مربوط به‌شرط‌های‌کافی، برای وجود (یا عدم وجود) اکسترمم در نقطهٔ سکون، پیش می‌آید. در واقع، باید راه بعدی بررسی نقطه را، پیداکنیم.

ابتدا به‌حالت تابع با دومتغیر $f(x,y)$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که این تابع، درهمسایگی یك نقطهٔ (x_0,y_0)، معین، پیوسته و دارای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم پیوسته، باشد. نقطهٔ (x_0,y_0) را، یك نقطهٔ سکون می‌گیریم، یعنی نقطه‌ای که با این شرط‌ها، سازگاراست:

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0 \qquad (1a)$$

برای‌آن‌که معلوم‌کنیم‌که، آیا در واقع، تابع درنقطهٔ (x_0,y_0) به‌اکسترمم می‌رسد یا نه، به‌طورطبیعی، باید به‌تفاضل زیرمراجعه‌کرد:

$$\Delta=f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

این تفاضل را، طبق رابطهٔ تیلور [۱۹۵]، با اکتفا به دو جمله، بسط می‌دهیم. ضمناً، چون نقطهٔ (x_0,y_0)، نقطهٔ سکون فرض شده است، جملهٔ اول حذف می‌شود و، به‌طور ساده، به‌دست می‌آید:

$$\Delta=\frac{1}{2!}[f''_{x^2}\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}\cdot\Delta x\Delta y+f''_{y^2}\Delta y^2] \qquad (2)$$

ضمناً، نقش نموهای Δx و Δy، به‌عهدهٔ $(x-x_0)$ و $(y-y_0)$ است وهمهٔ مشتق‌ها، در نقطه‌ای مثل

$$(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\quad (0<\theta<1)$$

محاسبه شده‌اند.

دربررسی مقداراین مشتق‌ها، درخود نقطهٔ موردآزمایش، مقدارهای

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0,y_0),\quad a_{12}=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad a_{22}=f''_{y^2}(x_0,y_0) \qquad (3)$$

را درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f''_{xy}(\dots)=a_{12}+\alpha_{12},\quad f''_{y^2}(\dots)=a_{22}+\alpha_{22}$$

به‌نحوی‌که، باتوجه به پیوستگی مشتق‌های دوم

$$\Delta y\to 0 \text{ و } \Delta x\to 0 \text{ با شرط } \text{همهٔ } \alpha\to 0 \qquad (4)$$

وتفاضل Δ، به‌صورت زیردرمی‌آید:

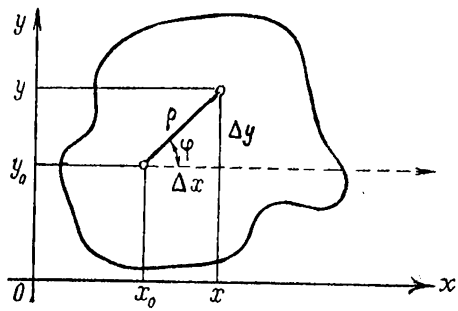
$$\Delta=\frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2+$$

$$+\alpha_{11}\Delta x^2+2\alpha_{12}\Delta x\Delta y+\alpha_{22}\Delta y^2\}$$

روشن می کنیم که، رفتار تفاضل Δ، اساساً، بستگی به‌علامت عبارت $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ دارد.

برای این‌که بحث، ساده‌تر پیش برود، از «مختصات قطبی» استفاده می‌کنیم. نقطهٔ (x_0, y_0) را، قطب وخطی از آن‌جا موازی محور x رسم شود، محور قطبی می‌گیریم (شکل ۱۰۵). $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ را، فاصلهٔ بین نقطه‌های (x_0, y_0) و (x, y)، و φ را زاویهٔ بین خط واصل بین این دونقطه ومحور قطبی فرض می‌کنیم، به‌نحوی که

$$\Delta x=\rho.cos\varphi,\quad \Delta y=\rho.sin\varphi$$



شکل ۱۰۵

دراین صورت، تفاضل موردنظر Δ، این‌طور نوشته می‌شود:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\{a_{11}cos^2\varphi+2a_{12}cos\varphi sin\varphi+a_{22}sin^2\varphi+$$

$$+\alpha_{11}cos^2\varphi+2\alpha_{12}cos\varphi sin\varphi+\alpha_{22}sin^2\varphi\}$$

۱°. ابتدا فرض می‌کنیم $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$.

دراین‌حالت داریم: $a_{11}a_{22}>0$. به‌نحوی‌که $a_{11}\neq 0$ وسه‌جملهٔ‌اول داخل آکولاد را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{1}{a_{11}}.[(a_{11}cos\varphi+a_{12}sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2).sin^2\varphi] \qquad (5)$$

روشن است که عبارت داخل کروشه، همیشه مثبت است، به‌نحوی که سه‌جمله‌ای نامبرده،

به‌ازای هیچ مقداری از φ، برابرصفرنمی‌شود و دارای علامت ضریب a_{11} است. مقدارمطلق این سه‌جمله‌ای، به‌عنوان تابع پیوسته‌ای از φ در بازهٔ $[0, 2\pi]$، دارای کمترین مقدار m (و البته، مثبت) می‌باشد [۸۵]:

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geqslant m > 0$$

ازطرف دیگر، درمورد سه‌جمله‌ای دوم داخل آکولاد، با توجه به (۴)، داریم:

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m$$

که برای هر مقدار φ برقراراست، تنها به‌شرطی‌که ρ (وهمراه با آن Δx و Δy)، به‌قدر کافی کوچک باشند. ولی، دراین صورت، تمامی عبارت درون آکولاد، یعنی تفاضل Δ، همان علامت سه‌جمله‌ای اول، یعنی علامت a_{11} را خواهد داشت.

بنابراین، درحالت $a_{11} > 0$، خواهیم داشت $\Delta > 0$ وتابع، در نقطهٔ (x_0, y_0)، دارای می‌نیمم است. و درحالت $a_{11} < 0$، داریم $\Delta < 0$، یعنی ماکزیمم وجود دارد.

۲°. حالافرض کنیم $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

به‌حالتی می‌پردازیم که $a_{11} \neq 0$ باشد. دراین جا هم، می‌توان از تبدیل (۵) استفاده کرد. به‌ازای $\varphi = \varphi_1 = 0$، عبارت درون کروشه مثبت است، زیرا منجر به a_{11}^2 می‌شود. برعکس، اگر $\varphi = \varphi_2$، با این شرط انتخاب شود که

$$a_{11}\cos\varphi_2 + a_{12}\sin\varphi_2 = 0 \quad (\sin\varphi_2 \neq 0)$$

آن‌وقت، عبارت داخل کروشه، به $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi_2$ تبدیل می‌شود که مقدار آن، منفی است. درهر دوحالت $\varphi = \varphi_1$ و $\varphi = \varphi_2$، وقتی که ρ به‌قدر کافی کوچک باشد، سه‌جمله‌ای دوم داخل آکولاد، به‌قدر کافی کوچک می‌شود وعلامت Δ را می‌توان از روی علامت سه جمله‌ای اول، معین کرد. به‌این ترتیب، درنزدیکی دلخواه نقطهٔ مورد نظر (x_0, y_0)، روی نیم خطهایی که بازاویه‌های $\varphi = \varphi_1$ و $\varphi = \varphi_2$ مشخص می‌شوند، مقدارهایی باعلامت‌های مختلف خواهد داشت و، درنتیجه، دراین نقطه، نمی‌تواند اکسترمم وجود داشته باشد.

اگرداشته باشیم $a_{11} = 0$، سه‌جمله‌ای اول داخل آکولاد، چنین می‌شود:

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)$$

آن وقت، با توجه به‌این که بی‌تردید $a_{12} \neq 0$، می‌توان زاویهٔ $\varphi_1 \neq 0$ را طوری تعیین کرد که

$$|a_{22}|\cdot|\sin\varphi_1| < 2|a_{12}|\cdot|\cos\varphi_1|$$

در این صورت، سه‌جمله‌ای، به ازای $\varphi=\varphi_1$ و $\varphi=-\varphi_1$ و $\varphi=\varphi_2=-\varphi_2$، دارای علامت‌های مختلف می‌شود و به‌همان نتیجهٔ بحث بالا می‌رسیم.

به‌این ترتیب، درحالت $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$، تابع $f(x,y)$، در نقطهٔ سکون (x_0,y_0) دارای اکسترمم است: ماکزیمم به‌ازای $a_{11}<0$ و می‌نیمم به‌ازای $a_{11}>0$. در حالت $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$، تابع $f(x,y)$، در نقطهٔ سکون (x_0,y_0)، اکسترمم ندارد.

در حالتی که داشته باشیم $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$، برای تعیین تکلیف، باید به‌مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر مراجعه کرد، که فعلاً از آن می‌گذریم.

مثال‌ها. ۱) دربارهٔ ماکزیمم و می‌نیمم این تابع، بحث کنید:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\quad (p>0,\ q>0)$$

مشتق‌های نسبی را محاسبه می‌کنیم:

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=\frac{y}{q}$$

از این‌جا، بلافاصله، دیده می‌شود که تنها نقطهٔ سکون، مبداء مختصات $(0,0)$ است.

a_{11}، a_{12} و a_{22} را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{q}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ و، درنتیجه، تابع مفروض در نقطهٔ $(0,0)$ می‌نیمم دارد.

شکل هندسی نمایش این تابع، یک سهموی بیضی‌وار است که رأس آن در مبداء مختصات قراردارد (شکل ۹۳).

۲) $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$. داریم:

$$z'_x=\frac{x}{p},\quad z'_y=-\frac{y}{q}$$

می‌بینیم که نقطهٔ $(0,0)$، نقطهٔ سکون است. محاسبه می‌کنیم:

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=-\frac{1}{q}$$

که، در نتیجه، به نابرابری $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ می‌رسیم و، بنابراین، اکسترمم وجود ندارد.

از نظر هندسی، در این جا، با یک سهموی هذلولی‌وار سروکار داریم که راس آن در مبداء مختصات است.

۳) $z=y^2+x^3$ یا $z=y^2+x^4$.

در هر دوی آن‌ها، نقطهٔ $(0,0)$، نقطهٔ سکون است و در آن $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$. تلاش ما به نتیجه‌ای نمی‌رسد. ضمناً، به‌طوری که مستقیماً دیده می‌شود، در حالت اول می نیمم وجود دارد و در دومی، اکسترممی وجود ندارد.

یادداشت. از آن چه در این شماره نتیجه گرفته‌ایم، بعدها [۲۳۶] و در بحث دربارهٔ رفتار منحنی در نزدیکی نقطهٔ «خاص» استفاده خواهیم کرد.

۱۹۸. شرط‌های کافی (حالت کلی). حالا، حالت کلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را معین، پیوسته و دارای مشتق‌های پیوستهٔ مرتبهٔ اول و دوم در همسایگی یک نقطهٔ سکون $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ فرض می کنیم. اگر تفاضل

$$\Delta=f(x_1, x_2, \dots, x_n)-f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

را، مثل قبل، از روی دستور تیلور، بسط دهیم، به‌دست می آید:

$$\Delta=\frac{1}{2}\{f''_{x_1^2}\Delta x_1^2+f''_{x_2^2}\cdot\Delta x_2^2+\dots+f''_{x_n^2}\cdot\Delta x_n^2+$$

$$+2f''_{x_1x_2}\cdot\Delta x_1\Delta x_2+2f''_{x_1x_3}\cdot\Delta x_1\Delta x_3+\dots+2f''_{x_{n-1}x_n}\Delta x_{n-1}\cdot\Delta x_n\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}f''_{x_ix_k}\cdot\Delta x_i\Delta x_k$$

که در آن $\Delta x_i=x_i-x_i^0$. مشتق‌ها، همگی در نقطه‌ای مثل نقطهٔ زیر، محاسبه شده‌اند:

$$(x_1^0+\theta\cdot\Delta x_1, x_2^0+\theta\cdot\Delta x_2, \dots, x_n^0+\theta\cdot\Delta x_n)\quad(0<\theta<1)$$

در این جا نیز، مقدارهای

$$f''_{x_ix_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)=a_{ik}\quad(i,k=1,2,\dots,n)\qquad(6)$$

را وارد می کنیم، به‌نحوی که*

---

*) روشن است که $(a_{ik}=a_{ki})a_{ik}=a_{ki}$.

$$f''_{x_i x_k}(x_1^\circ+\theta\cdot\Delta x_1, \dots, x_n^\circ+\theta\cdot\Delta x_n)=a_{ik}+\alpha_{ik}$$

و

$$\alpha_{ik}\to 0 \text{ با شرط } \Delta x_1\to 0, \dots, \Delta x_n\to 0 \qquad (۷)$$

عبارت Δ را، که مورد توجه ماست، می‌توان چنین نوشت:

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k+\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\right\} \qquad (۸)$$

دراین‌جا، در داخل آکولاد، درجای اول، دیفرانسیل دوم تابع f درنقطهٔ موردنظر، قرار دارد؛ و به‌صورت چند جمله‌ای همگن درجهٔ دوم و یا، به‌اصطلاح، به‌شکل کوادراتیك از متغیرهای Δx_1، ...، Δx_n درمی‌آید*. همان‌طورکه می‌بینیم، حل مشکل ما، به‌ویژگی‌های شکل کوادراتیك مربوط می‌شود.

درجبرعالی، شکل کوادراتیك

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}y_iy_k \quad (a_{ik}=a_{ki}) \qquad (۹)$$

ازمتغیرهای y_1، ...، y_n را معین مثبت (منفی) گویند، اگر به‌ازای همهٔ مقدارهای آوندها، که به‌طورهم‌زمان برابرصفرنباشند، مقداری مثبت (منفی) باشد. مثلاً شکل

$$۶y_1^2+۵y_2^2+۱۴y_3^2+۴y_1y_2-۸y_1y_3-۲y_2y_3$$

معین مثبت است، زیرا، این عبارت را می‌توان چنین نوشت:

$$(۲y_1-۳y_3)^2+۲(y_1+y_2+y_3)^2+۳(y_2-y_3)^2$$

دراین‌جا، این‌امکان‌رانداریم که، به‌تفصیل، دراین زمینه‌وارد شویم‌وتنها، به‌یادآوری شرط لازم وکافی، برای آن‌که شکل کوادراتیك (۹)، مثبت معین باشد، اکتفا می‌کنیم. این شرط متعلق به‌سیلوستر (J.J. Sylvester) است وبارشته نابرابری‌های زیربیان می‌شود:

$$a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \dots$$

---

*) مجموع دوم، دارای شکل مشابهی است، ولـی در آن، خود ضریب‌ها هم، تابع‌هایی ازهمان متغیرها هستند.

$$\ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0^*$$

چون شکل منفی معین، با عوض کردن علامت همهٔ جمله‌ها، به‌شکل معین مثبت در می‌آید و برعکس، بنابراین به‌سادگی شرط شکل معین منفی هم پیدا می‌شود: این شرط عبارت است ازهمین نابرابری‌های فوق، اگرجهت نابرابری‌ها را (از آغاز از اولی) یك درمیان عوض کنیم.

با استفاده ازاین مفهوم‌ها، شرط‌های کافی را، برای وجود اکسترمم، تنظیم می‌کنیم.

اگردیفرانسیل دوم، شکل کوادراتیك

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k \qquad (10)$$

ـ باهمقدارهای (۶) ضریب‌ها ـ مثبت معین (منفی) باشند، آن‌گاه، درنقطهٔ مورد بررسی $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$، می‌نیمم (ماکزیمم) خاص وجود خواهد داشت.

برای اثبات، فاصلهٔ

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$$

بین نقطه‌های $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ و $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را واردمی‌کنیم. ضمناً فرض می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_i}{\rho} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

حالا، می‌توان عبارت (۸) برای Δ را به‌این صورت نوشت:

---

*) توجه کنیم که جملهٔ شامل $y_i y_k$ $(i \neq k)$، دوبار در مجموع (۹) ظاهر می‌شود، به‌نحوی که $a_{ik} = a_{ki}$، برابر با نصف ضریب $y_i y_k$ می‌شود. اگر، مقدارهای زیررا درنظر بگیریم، می‌توان به‌سادگی، درستی شرط‌ها را، آزمایش کرد:

$$a_{11} = 6,\ a_{22} = 5,\ a_{33} = 14,$$

$$a_{12} = a_{21} = 2,\ a_{13} = a_{31} = -4,\ a_{23} = a_{32} = -1$$

$$\Delta=\frac{\rho^{۲}}{۲}\left\{\sum_{i,k=۱}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i,k=۱}^{n}\alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right\} \qquad (۱۱)$$

عددهای ξ_i با هم‌صفر نمی‌شوند، بنابراین، اگر شکل (۱۰) مثبت باشد، اولین‌مجموع داخل آکولاد، در رابطهٔ (۱۱)، همواره دارای علامت مثبت می‌شود. علاوه برآن، چون

$$\sum_{i=۱}^{n}\xi_i^{۲}=۱ \qquad (۱۲)$$

بنابراین، عدد مثبت ثابت m پیدا می‌شود که برای همهٔ مقدارهای ممکن ξ_i، داشته باشیم:

$$\sum_{i,k=۱}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\geqslant m$$

در واقع، این‌مجموع، تابع‌پیوسته‌ای از آوند ξ_i درتمامی فضا می‌شود، به‌خصوص، درمجموعهٔ $\mathfrak{M}$ نقطه‌های $(\xi_۱, \dots, \xi_n)$، که دررابطهٔ (۱۲) («سطح کروی») صدق‌می‌کنند. ولی، به‌سادگی دیده می‌شود که این مجموعه بسته است و، درنتیجه، شامل همهٔ نقطه‌های تجمع خود می‌شود؛ در این صورت، با توجه به‌قضیهٔ ویرشتراس [۱۷۳، یادداشت بعد از اثبات را ببینید]، مجموع نامبرده، در $\mathfrak{M}$ هم، دارای کمترین مقدارخود، m می‌شود، که الزاماً مثبت است (مثل همهٔ مقدارهای آن در $\mathfrak{M}$).

ازطرف دیگر، باتوجه به (۷)، مجموع دوم در (۱۱)، به‌ازای ρهای به‌قدرکافی کوچك، آشکارا، ازلحاظ قدرمطلق، کمتر از m خواهد بود، به‌نحوی که تمامی آکولاد مثبت می‌شود. بنابراین، درکرهٔ به‌قدرکافی کوچك، با مرکز نقطهٔ $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$، تفاضل Δ مثبت می‌شود. از همین جا، معلوم می‌شود که در نقطهٔ نامبرده، تابع $f(x_۱, \dots, x_n)$، دارای می نیمم است.

به همین ترتیب، می‌توان در مورد حالتی که شکل (۱۰) معین، ولی منفی باشد، بحث کرد.

۱۹۹. شرط‌های عدم وجود اکسترمم. شکل کوادراتیك (۹) را، نامعین گویند، وقتی که بتواند مقدارهایی با علامت‌های مختلف، اختیار کند. مثلاً، شکل زیرچنین‌است:

$$۶y_۱^{۲}+y_۲^{۲}+y_۳^{۲}+۸y_۱y_۲-۸y_۱y_۳-۲y_۲y_۳$$

و مقدارآن، مثلاً، به‌ازای $y_۱=۱$ و $y_۲=y_۳=۰$ برابرمقدارمثبت $+۶$ و به‌ازای $y_۱=+۱$، $y_۲=-۱$ و $y_۳=۰$ برابرمقدارمنفی -۱ می‌شود.

حالا، می‌توانیم حکم شمارهٔ پیش را ــ که اثبات کردیم ــ به‌این‌ترتیب، تکمیل کنیم: اگرشکل کوادراتیك (۱۰)، نامعین باشد، آن‌وقت در نقطهٔ موردآزمایش $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$،

اکسترمم وجود ندارد.

فرض کنیم، شکل (۱۰)، به‌ازای $\Delta x_i = h_i$ $(i = ۱, ۲, \dots, n)$، مقدار مثبت

$$\sum_{i,k=۱}^{n} a_{ik} h_i h_k > ۰ \qquad (۱۳)$$

و به‌ازای $\Delta x_i = \bar{h}_i$ $(i = ۱, ۲, \dots, n)$، مقدار منفی

$$\sum_{i,k=۱}^{n} a_{ik} h_i h_k < ۰$$

را اختیار کند. ابتدا فرض می‌کنیم

$$\Delta x_i = h_i t \quad (t \neq ۰) \quad (i = ۱, ۲, \dots, n)$$

که متناظر است با حرکت در طول خطی که نقطه‌های $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$ و $(x_۱^۰ + h_۱, \dots, x_n^۰ + h_n)$ به هم وصل می‌کند. آن وقت، اگر در (۸)، عامل $t^۲$ را از آکولاد بیرون بیاوریم، برای این حالت داریم:

$$\Delta = \frac{t^۲}{۲}\left\{\sum_{i,k=۱}^{n} \alpha_{ik} h_i h_k + \sum_{i,k=۱}^{n} \alpha_{ik} h_i h_k\right\}$$

اولین مجموع داخل آکولاد، با توجه به (۱۳)، عدد معین مثبتی است. در مورد مجموع دوم، ضریب‌های آن، وقتی $t \to ۰$، به‌سمت صفر میل می‌کنند، زیرا ضمناً روشن است که همهٔ Δx_iها به‌سمت صفر میل می‌کنند. یعنی، وقتی t به‌قدر کافی کوچک باشد، عبارت درون آکولاد (و همراه با آن، تمامی تفاضل Δ)، مثبت می‌شود. در نتیجه، در نقطه‌های خط مذکور، که به‌قدر کافی به $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$ نزدیک باشند، داریم:

$$f(x_۱, \dots, x_n) > f(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$$

از طرف دیگر، اگر فرض کنیم:

$$\Delta x_i = \bar{h}_i t \quad (t \neq ۰) \quad (i = ۱, ۲, \dots, n)$$

یعنی، در طول خط دیگری که نقطه‌های $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$ و $(x_۱^۰ + h, \dots, x_n^۰ + h)$ را به‌هم وصل می‌کند، حرکت کنیم، در آن‌صورت، در نقطه‌هایی از آن که به‌قدر کافی به $(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$ نزدیک‌اند (یعنی متناظر با مقدارهای به‌قدر کافی کوچک t باشند)، داریم:

$$f(x_۱, \dots, x_n) < f(x_۱^۰, \dots, x_n^۰)$$

به‌این ترتیب، ثابت می‌شود که، در نقطهٔ مورد آزمایش، ماکزیمم یا می‌نیمم وجود

ندارد.

گاهی پیش می‌آید که شکل (۹)، با وجودی که نمی‌تواند مقدارهای با علامت‌های مختلف را اختیار کند، معین نیست، زیرا، به‌جز مقدارهای صفر آوندها، به‌ازای مقدارهای دیگری هم برابر صفر می‌شود. دراین حالت، شکل را غیرمعین می‌نامند. مثلاً درشکل زیر، چنین است:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_1y_2+2y_1y_3+2y_2y_3=(y_1+y_2+y_3)^2$$

که مقدارهای منفی را نمی‌تواند اختیار کند، ولی به‌ازای

$$y_1+y_2+y_3=0$$

برابر صفر می‌شود، مثلاً به‌ازای $y_1=y_2=\frac{1}{2}$ و $y_3=-1$.

حالتی که شکل (۱۰) نیمه معین باشد، حالت «مشکوك» است و، بسته به رفتار مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر، ممکن است اکسترمم داشته باشد یا نداشته باشد: در حالتی هم که همهٔ مشتق‌های مرتبهٔ دوم، در نقطهٔ مورد آزمایش برابر صفر شوند، باید به‌مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر مراجعه کرد.

دراین‌جا، به بررسی حالت «مشکوك» نخواهیم پرداخت.

یادداشت. وقتی که با تابع یك‌متغیرهٔ $f(x)$ سروکار داشته باشیم، شکل (۱۰)، تبدیل به یك جمله‌ای می‌شود:

$$f''(x_0).\Delta x^2$$

که‌در آن، x_0 همان نقطهٔ مورد آزمایش است. این شکل، آشکارا، معین‌است ــ مثبت به‌ازای $f''(x)>0$ و منفی به ازای $f''(x)<0$ ــ به این ترتیب، معیار شمارهٔ **۱۳۷**، به صورت حالت خاصی از حالتی درمی‌آید که در شمارهٔ **۱۹۸** مورد بررسی قرار دادیم.

اگر به تابع $f(x, y)$ با دو متغیر هم توجه کنیم، می‌بینیم که، در این‌جا هم، همهٔ آن‌چه راکه در شمارهٔ **۱۹۷** گفته بودیم، در درون بحث‌های **۱۹۸** و **۱۹۹** وجود دارد. از بحث‌های اخیر، می‌توان به‌همان نتیجه شمارهٔ **۱۹۷** رسید که شکل

$$a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2$$

در حالتی معین است که داشته باشیم $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ (برای $a_{11}>0$ مثبت و برای $a_{11}<0$ منفی). و درحالتی که $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ باشد، نامعین است.

۲۰۰. بیشترین و کمترین مقدار تابع. مثال‌ها. فرض کنیم تابع $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$،

در یك حوزهٔ کران‌دار و بستهٔ $\mathcal{D}$، و معین و پیوسته ودارای مشتق‌های نسبی متناهی در این حوزه ــ به‌استثنای، احتمالاً، چند نقطهٔ جداگانه ــ باشد بنابرقضیهٔ ویرشتراس [۱۷۳]، نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ در این حوزه، پیدا می‌شود که‌تابع، درآن، به‌حداکثر (حداقل) همهٔ مقدارهای خود می‌رسد. اگر نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ در درون حوزهٔ $\mathcal{D}$ قرار گیرد، درآن صورت روشن است که تابع، در آن، ماکزیمم (می‌نیمم) است، به‌نحوی که در این‌حالت نقطهٔ موردنظر ما، حتماً، بین نقطه‌های «مشکوك» به‌اکسترمم قرار دارد. ولی ممکن‌است که تابع، بیشترین (کمترین) مقدار خود را، درنقطه‌های مرزی به‌دست آورد. به‌این علت، برای این‌که بیشترین (کمترین) مقدارتابع $u = f(x_1, \dots, x_n)$ را در حوزهٔ $\mathcal{D}$ پیداکنیم، باید همهٔ نقطه‌های درونی «مشکوك» به اکسترمم را پیدا و مقدار تابع را در هرکدام از آن‌ها محاسبه کرد و، سپس، با مقدارهای تابع درنقطه‌های مرزی مقایسه کرد. بیشترین (کمترین) این مقدارها، بیشترین (کمترین) مقدار تابع، در تمامی حوزه، خواهد بود.

این مطلب را، ضمن چند مثال، روشن می‌کنیم.

۱) می‌خواهیم، حداکثر مقدار تابع

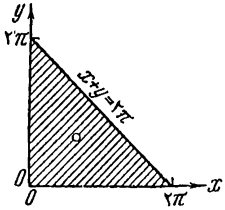
$$u = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

را، در مثلث محدود به محور ox، محور oy و خط $x+y=2\pi$، پیداکنیم (شکل ۱۰۶). داریم:

$$u'_x = \cos x - \cos(x+y),\quad u'_y = \cos y - \cos(x+y)$$

در درون حوزه، مشتق‌ها تنها درنقطهٔ $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ صفر می‌شوند، که

در آن‌جا $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ است. از آن‌جا که در نقطه‌های مرزی، یعنی



شکل ۱۰۶

برخط‌های $x=0$، $y=0$ و $x+y=2\pi$، تابع برابر صفر می‌شود، بنابراین روشن است که همان نقطهٔ $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$، تابع را به بیشترین مقدار خود می‌رساند.

۲) بیشترین و کمترین مقدار تابع

$$u = a^2x^2 + by^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

را، به‌شرط این‌که متغیرهای x، y و z با رابطهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ مربوط باشند (و $a>b>c>0$) پیدا کنید.

$z^۲$ را، به‌کمك شرط، محاسبه و در عبارت تابع قرار می‌دهیم:

$$u=(a^۲-c^۲)x^۲+(b^۲-c^۲)y^۲+c^۲-[(a-c)x^۲+(b-c)y^۲+c]^۲$$

که تابعی است از دو متغیر x و y در دایرهٔ $x^۲+y^۲\leqslant ۱$.

مشتق‌های

$$u'_x=۲x(a-c)\{(a+c)-۲[(a-c)x^۲+(b-c)y^۲+c]\}$$

$$u'_y=۲y(b-c)\{(b+c)-۲[(a-c)x^۲+(b-c)y^۲+c]\}$$

به‌طور هم‌زمان، در این نقطه‌ها، برابر صفر می‌شوند:

$$(۱)\ x=y=۰(u=۰),\ (۴)\ x=۰,\ y=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(u=\frac{۱}{۴}(b-c)^۲\right),$$

$$(۳)\ x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}},\ y=۰\ \left(u=\frac{۱}{۴}(a-c)^۲\right)$$

حالا باید به‌مرز حوزه، یعنی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ بپردازیم. از این‌جا، $y^۲$ را پیدا می‌کنیم و در عبارت u می‌گذاریم، به تابعی با یك متغیر x می‌رسیم:

$$u=(a^۲-b^۲)x^۲+b^۲-[(a-b)x^۲+b]^۲$$

که در بازهٔ $[۱\ ،\ ۱-]$ قرار دارد. در درون این بازه، مشتق

$$u'_x=۲(a-b)^۲x\cdot(۱-۲x^۲)$$

در این نقطه‌ها، برابر صفر می‌شود:

$$(۴)\ x=۰(u=۰),\ (۵)\ x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(u=\frac{۱}{۴}(a-b)^۲\right)$$

بالاخره، توجه می‌کنیم که در انتهای بازهٔ موردنظر

$$(۶)\ x=\pm ۱\ \ (u=۰)$$

به این ترتیب، باید مقدارهای زیر را باهم مقایسه کنیم:

$$u=۰;\ \frac{۱}{۴}(b-c)^۲;\ \frac{۱}{۴}(a-c)^۲;\ \frac{۱}{۴}(a-b)^۲$$

که در میان آنها، ۰ از همه کوچکتر و $\frac{۱}{۴}(a-c)^۲$ از همه بزرگتر است. همین دومقدار،

کمترین و بیشترین مقدارهای تابع خواهد بود که، به‌ترتیب، در نقطه‌های

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

و

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

به‌دست می‌آیند.

درحالت تابع با دومتغیر $u=f(x, y)$، درحالت کلی، حوزهٔ تعریف تابع، معمولاً به‌وسیلهٔ یك منحنی (و یا چند منحنی) محصور می‌شود. در طول این منحنی (یا هرکدام از منحنی‌ها)، یایکی از دومتغیر بستگی به‌دیگری دارد و یا هر دو بستگی به‌یك پارامتر دارند، به نحوی که در مرز، تابع $u=f(x, y)$، وابسته به‌یك متغیر می‌شود و حداکثر (حداقل) مقدار آن با روش شمارهٔ **۱۳۹** پیدا می‌شود. اگرفرض کنیم، منحنی با معادله‌های پارامتری داده شده باشد:

$$x=\varphi(t), y=\psi(t)$$

کـه در آن، t دربازه $[t_0, T]$ تغییر می‌کند، آن‌گاه، روی‌این منحنی، تابع مفروض، تابعی مرکب از t خواهد بود:

$$u=f(\varphi(t), \psi(t))$$

که برای آن، می‌توانیم بیشترین (کمترین) مقدار را پیدا کنیم.

۳) مطلوب است محاسبهٔ حداکثر مقدار این حاصل‌ضرب

$$u=xyzt$$

با این شرط که عددهای غیرمنفی x، y، z، t، دارای مجموع ثابتی هستند:

$$x+y+z+t=4c$$

ثابت می‌کنیم که بیشترین مقدار برای u، وقتی به‌دست می‌آید که همهٔ عامل‌ها، برابر باشند: $x=y=z=t=c$*.

ازشرط‌مساله، مقدار t را پیدا می‌کنیم: $t=4c-x-y-z$ و در u قرار می‌دهیم:

---

*) مـا تنها به‌خاطر روشن‌بودن وضع، تعداد عامل‌ها را، برابر ۴ گرفته‌ایم، ولی نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آوریم، برای هرتعداد از عامل‌ها، درست است.

$$u=xyz(۴c-x-y-z)$$

دراین‌جا، با تابعی از سه متغیر مستقل x، y و z سروکار داریم که در حوزه‌ای سه بعدی، با شرط‌های زیر، معین است:

$$x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰,\ x+y+z\leqslant ۴c$$

از نظر هندسی، این حوزه به‌صورت چهار وجهی محدود به صفحه‌های $x=۰$، $y=۰$، $z=۰$ و $x+y+z=۴c$ درمی‌آید.

مشتق‌ها را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(۴c-۲x-y-z)=۰,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx(۴c-x-۲y-z)=۰,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy(۴c-x-y-۲z)=۰$$

این معادله‌ها، در درون حوزه، تنها در نقطهٔ $x=y=z=c$ برقرارند که در آن‌جا داریم: $u=c^۴$. چون در مرز حوزه به‌دست می‌آید $u=۰$، بنابراین، حداکثر مقدار تابع، همان $c^۴$ است.

حکم ثابت است (زیرا به‌ازای $x=y=z=c$، ضمناً $t=c$ می‌شود)*.

به‌طور کلی، درحالت تابع باسه متغیر $u=f(x, y, z)$، حوزهٔ تعریف به‌وسیلهٔ یك (یا چند) سطح محصور می‌شود. دراین مسیر سطح (یاسطح‌ها)، متغیرهای x و y و z بستگی به‌دو پارامتر دارند (نقش پارامترها، ممکن است به عهدهٔ دوتا از همین متغیرها باشد، مثل مثالی که هم اکنون حل کردیم و در آن داشتیم $z=۴c-x-y$). دراین‌صورت، تابع u هم، تنها به‌دو پارامتر بستگی پیدا می‌کند، به‌نحوی که پیدا کردن بیشترین (کمترین) مقدار آن در مرز به‌سادگی به‌دست می‌آید.

اگر تابع $u=f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ دربازهٔ باز (یا نامتناهی) $\mathcal{D}$ داده شود، در آن

---

*) از آن‌چه گفته شد، نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب عددهای مثبت $xyzt$، به مجموع ثابت $۴c$، از $c^۴$ تجاوز نمی‌کند، یعنی

$$\sqrt[۴]{xyzt}\leqslant c=\frac{x+y+z+t}{۴}$$

یعنی واسطهٔ هندسی از واسطهٔ عددی تجاوز نمی‌کند و این، نتیجه‌ای است که برای تعداد دلخواه این گونه عددها، برای ما روشن بود [۱۳۳، (۴a)].

صورت، از پیش نمی‌توان داوری کرد که آیا این تابع، به بیشترین (کمترین) مقدار خود، در حوزه، می‌رسد یا نه! دست‌کم در بعضی از حالت‌های جداگانه، ممکن است چنین مقداری وجود داشته باشد، و ما، ضمن مثال، روشن می‌کنیم که چگونه می‌توان از وجود آن مطمئن شد.

۴) مطلوب است تعیین حداقل مجموع

$$u=x+y+z+t$$

از عددهای مثبت x، y، z و t، به‌شرطی که حاصل‌ضرب آن‌ها، مقدار ثابتی باشد:

$$xyzt=c^4$$

ثابت می‌کنیم که بیشترین مقدار برای u، وقتی حاصل می‌شود که عامل‌ها همگی برابر باشند: $x=y=z=t=c$*.

t را به دست می‌آوریم $t=\frac{c^4}{xyz}$ و در u قرار می‌دهیم:

$$u=x+y+z+\frac{c^4}{xyz}$$

باید بیشترین مقدار این تابع با سه متغیر x، y و z را، در حوزهٔ تعریف خود، با توجه به نابرابری‌های $x>0$، $y>0$ و $z>0$، (یعنی در کنج اول باز و نامتناهی مختصات) پیدا کنیم.

از روش قبل استفاده می‌کنیم. اگر در حوزه نقطه‌ای وجود داشته باشد که، در آن‌جا، تابع ما به بیشترین مقدار خود برسد، در آن صورت، این نقطه را باید بین نقطه‌های سکون جست و جو کرد:

$$u'_x=1-\frac{c^4}{x^2yz}=0,\quad u'_y=1-\frac{c^4}{xy^2z}=0,$$

$$u'_z=1-\frac{c^4}{xyz^2}=0$$

از این‌جا به‌دست می‌آید: $x=y=z=c$ که نظیر $t=c$ است؛ ضمناً، به‌ازای این مقدارها داریم: $u=4c$.

چگونه باید تحقیق کنیم که آیا، به واقع، این مقدار، بیشترین مقدار است یا نه؟ روشن است که با نزدیک شدن به‌صفحه‌های مرزی $x=0$، $y=0$ و $z=0$، درست

*) در این‌جا هم، تعداد عامل‌ها، می‌تواند دلخواه باشد.

مثل موقعی که به‌سمت بی‌نهایت برویم، تابع u تا بی‌نهایت صعود می‌کند. نقطهٔ پیدا شده‌را می‌توان به‌وسیلهٔ مکعب $[E, E; \varepsilon, E; \varepsilon, E]$ محصور کرد. $E>0$ را آن‌قدر بزرگ و $\varepsilon>0$ را آن قدر کوچك می‌گیریم که در بیرون این مکعب و روی سطح آن داشته باشیم $u>4c$. ولی، درمکعب، مانندحوزهٔ بسته ومتناهی، تابع u باید به‌کمترین مقدارخودبرسد و، روشن است که، این مقدار در همان نقطه‌ای حاصل می‌شودکه قبلاً به‌دست آوردیم که درحوزهٔ اصلی هم، کمترین خواهد بود.

یادداشت. درمثال‌های ۱)، ۳) و ۴)، در درون حوزهٔ تعریف تابع، تنها یك نقطهٔ «مشکوك» وجود داشت. آیا این، می‌تواند وسیلهٔ اطمینانی برای بیشترین (کمترین)مقدار تابع دراین نقطه باشد؟ برخلاف آن چه درمورد تابع با یك متغیرداشتیم [یادداشت شمارهٔ **۱۳۹** را ببینید]، دراین جا، نمی‌توان نتیجه‌گرفت‌که حتماً با بیشترین (کمترین) مقدار تابع، درحوزه، سروکاردارید.

مثال سادهٔ زیرنشان می‌دهدکه این نتیجه‌گیری، ممکن است نادرست ازآب درآید. تابع

$$u=x^3-4x^2+2xy-y^2$$

را، درمستطیل $[-1, 1; -5, 5]$ درنظرمی‌گیریم. مشتق‌های آن

$$u'_x=3x^2-8x+2y,\quad u'_y=2x-2y$$

درمحدودهٔ حوزه، تنها درنقطهٔ $(0, 0)$ برابرصفرمی‌شود. با معیارشمارهٔ **۱۹۷** می‌توان فهمیدکه تابع، درآن دارای ماکزیممی (برابر ۰) است. ولی این مقدار، بیشترین مقدار، درحوزهٔ تعریف تابع، نیست، زیرا مثلاً درنقطهٔ $(0, 5)$، تابع $u=25$ می‌شود.

به‌این ترتیب، در حالت تابع با چند متغیر، ضمن جست‌وجوی بیشترین یاکمترین مقدارتابع درحوزه، عملاً، به‌بررسی ماکزیمم ومی‌نیمم نیازی پیدا نمی‌کنیم.

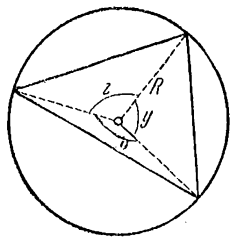
۲۰۱. مساله‌ها. چه در ریاضیات وچه‌درسایر بخش‌های‌دانش‌وصنعت، اغلب‌مساله‌ها، منجربه جست و جوی بیشترین یاکمترین مقداریك تابع می‌شوند.

حل مساله‌های ۱) تا ۴)، به‌مثال‌هایی مربوط می‌شودکه درشمارهٔ قبل حل‌کرده‌ایم.

۱) بین مثلث‌های محاط در دایرهٔ به‌شعاع R، آن را پیداکنیدکه دارای مساحت حداکثرباشد (شکل ۱۰۷).

اگر زاویه‌های مرکزی رو به‌روی ضلع‌های مثلث را، به x، y و z نشان دهیم، در آن صورت، با رابطهٔ

$$x+y+z=2\pi$$



شکل ۱۰۷

به‌هم مربوط می‌شوند. z را می‌توان برحسب دومجهول دیگر نوشت:

$$z = 2\pi - x - y$$

مساحت P مثلث، برحسب این زاویه‌ها، چنین بیان می‌شود:

$$P = \frac{1}{2}R^2 \sin x + \frac{1}{2}R^2 \sin y = \frac{1}{2}R^2 \sin z =$$

$$= \frac{1}{2}R^2[\sin x + \sin y - \sin(x+y)]$$

حوزهٔ تغییر x و y، دراین‌جا، باشرط‌های $x \geqslant 0$، $y \geqslant 0$، $x+y \leqslant 2\pi$ مشخص می‌شود. باید مقدارهایی از x را پیداکرد که عبارت درون کروشه را به‌بیشترین مقدارخود برساند.

می‌دانیم [۲۰۰، مثال ۱)] که این مقدار، عبارت است از $x = y = \frac{2\pi}{3}$، به‌نحوی که z هم برابر $\frac{2\pi}{3}$ می‌شود: مثلث مطلوب، متساوی‌الاضلاع است.

۲) بین همهٔ مثلث‌های به محیط $2p$، مثلثی را پیداکنید که مساحت P آن، حداکثر باشد.

اگر x و y و z را سه ضلع مثلث بگیریم، باتوجه به‌دستورهرون داریم:

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

می‌توان باگذاشتن $z = 2p - x - y$، P را به‌این صورت نوشت:

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

و حداکثرمقدار این تابع را، درحوزهٔ مثلثی که دربارهٔ آن در ۱۶۰، ۶) صحبت شد، پیداکرد.

ولی ما، به‌ترتیب دیگری عمل می‌کنیم. مسأله به‌این جا منجر می‌شود که باید، بیشترین مقدار را برای حاصل‌ضرب عددهای مثبت زیر پیدا کرد:

$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

درحالی‌که، مجموع این عددها، مقدار ثابتی است:

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=۳p-۲p=p$$

ومی‌دانیم [۲۰۰، مثال۳)] که، برای این منظور، باید همهٔ عامل‌ها برابر باشند، که از آن جا به دست می‌آید: $x=y=z=\frac{۲p}{۳}$. بازهم، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳) بین مکعب مستطیل‌های محاط در بیضوی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$

(یال‌های مکعب مستطیل، موازی محورهای مختصات است)، آن را پیدا کنیدکه دارای حجم حداکثر باشد.

اگرمختصات راسی از مکعب مستطیل راکه درکنج اول مختصات قراردارد، x و y و z بنامیم، برای آن خواهیم داشت: $v=۸xyz$. به‌جای v، می‌توانیم کمیت زیر رادر نظر بگیریم:

$$u=\frac{v^۲}{۶۴a^۲b^۲c^۲}=\frac{x^۲}{a^۲}\cdot\frac{y^۲}{b^۲}\cdot\frac{z^۲}{c^۲}$$

و روشن است که u و v، با هم، بـه بیشترین مقدارخود می‌رسند. ولی، پیداکردن حداکثر مقدارu، بازهم، به‌همان مثال ۳) منجرمی‌شود.

پاسخ:

$$\frac{x^۲}{a^۲}=\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{۳}},\ y=\frac{b}{\sqrt{۳}},\ z=\frac{c}{\sqrt{۳}}$$

۴) فرض کنیم، گازی (مثلاً هـوا)، در کمپرسور پیستونی، ازفشارجو $p_۰$ تا فشار $p>p_۰$ فشرده‌می‌شود. کاری که برای فشردن یك مولکول گرم گازانجام می‌گیرد، این‌طور بیان می‌شود:

$$A=RT_۰\cdot\frac{\gamma}{\gamma-۱}\left[\left(\frac{p}{p_۰}\right)^{\frac{\gamma-۱}{\gamma}}-۱\right]$$

که در آن، R «ثابت گازی»، T_0 درجه حرارت مطلق گاز تا فشردگی و γ عددی است (بزرگتر از واحد) که به ساختمان کمپرسور مربوط می‌شود. روشن است که هرچه درجهٔ حرارت اولیهٔ T_0 کمتر باشد، مقدار کار A هم کمتر می‌شود. در فشارهای بالا، وقتی که صرفه‌جوئی در کار اهمیت پیدا می‌کند، روند فشار را به چند مرحله تقسیم می‌کنند، تا در فاصله‌های فشار، (که همراه با گرم شدن گاز است)، گاز خنک‌تر شود.

فرض کنیم با کمپرسور سه‌مرحله‌ای سروکار داشته باشیم که در دو فاصلهٔ بینابینی، درجهٔ حرارت گاز را دوباره به T_0 برساند. اگر مقدار فشار را، در پایان مرحله‌های اول و دوم، به‌ترتیب، p_1 و p_2 بنامیم، تمامی کار فشار، چنین خواهد بود:

$$A=RT_0\cdot\frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]+\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]+\left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]\right\}$$

حالا، این پرسش پیش می‌آید: اگر p_0، p و T_0 مفروض باشند، فشارهای بینابینی p_1 و p_2 را چگونه انتخاب کنیم، تا مقدار کار مصرف شده، به‌حداقل ممکن برسد؟

اگر ضریب‌ها و جمله‌های ثابت را ــ که تاثیری در مقدارهای مورد نظر p_1 و p_2 ندارند ــ کنار بگذاریم، در آن صورت، به بررسی این عبارت می‌رسیم:

$$u=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

وچون، حاصل‌ضرب

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\cdot\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\cdot\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

مقداری است ثابت، بنابراین، با استفاده از مثال ۴)، ۲۰۰، فوراً معلوم می‌شود که مجموع u، وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسد، که همهٔ عامل‌ها با هم برابر باشند.

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

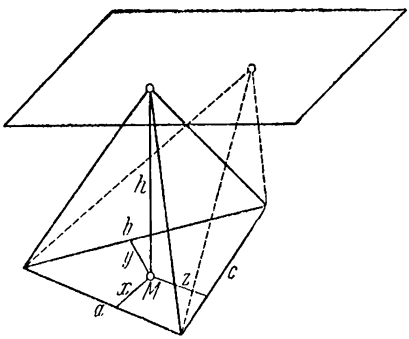
یا

$$\frac{p_1}{p_0}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{p}{p_2}$$

به‌نحوی که فشارهای متوالی، تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند، ازآن‌جا

$$p_1=\sqrt[3]{p_0^2\cdot p_2},\quad p_2=\sqrt[3]{p_0 p_2^2}$$

۵) مثلث با ضلع‌های a، b و c برصفحه داده شده است (شکل ۱۰۸)؛ بر روی این مثلث، می‌توان مجموعه‌ای بی‌شمار ازهرم‌ها، با ارتفاع معلوم h به‌وجود آورد. ازبین‌آن‌ها، هرمی را پیدا کنیدکه دارای کمترین مقدار ممکن سطح جانبی باشد.



شکل ۱۰۸

کافی است،جای نقطهٔ M، تصویر رأس هرم را برصفحهٔ قاعده پیداکنیم. فاصلهٔ نقطهٔ M را ازسه‌ضلع a، b و c، به‌ترتیب، x، y و z می‌گیریم. هرعمود را وقتی با علامت مثبت می‌گیریم که درهمان طرفی باشدکه مثلث قرارگرفته است و، درغیراین صورت، منفی به‌حساب می‌آوریم. مقدارهای x، y و z را می‌توان با رابطهٔ زیر به‌هم مربوط کرد (منظوراز P، مساحت مثلث است).

$$ax+by+cz=2P \Rightarrow z=\frac{2P-ax-by}{c}$$

حالا، سطح جانبی هرم‌را، به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{x^2+h^2}+\frac{b}{2}\sqrt{y^2+h^2}+\frac{c}{2}\sqrt{z^2+h^2}$$

که درآن، باید به‌جای z، مقدارش را، از رابطهٔ قبلی، قراردهیم. حوزهٔ تغییرمتغیرهای مستقل x و y، عبارت است ازتمامی صفحهٔ xy. داریم:

$$2S'_x=\frac{ax}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{a}{c}=0$$

$$2S'_y=\frac{by}{\sqrt{y^2+h^2}}-\frac{cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\cdot\frac{b}{c}=0$$

یا

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \Rightarrow x=y=z$$

یعنی نقطهٔ M، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است.

برای این‌که مطمئن شویم که این جواب، پاسخ‌گوی کمترین مقدار برای S است، می‌توان مثل مثال ۴) شمارهٔ قبل، ثابت کرد که اگر x یا y ترقی کند، مساحت S هم، تا بی‌نهایت، ترقی می‌کند.

۶) سه نقطهٔ غیرواقع بر یك امتداد $M_1(a_1, b_1)$، $M_2(a_2, b_2)$ و $M_3(a_3, b_3)$، بر یك صفحه، داده شده‌اند. می‌خواهیم، در این صفحه، نقطه‌ای را پیدا کنیم که مجموع فاصله‌های آن از سه نقطهٔ مفروض، حداقل باشد.

نقطهٔ دلخواه $M(x, y)$ را اختیار و فرض می‌کنیم:

$$\rho_i = \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

این تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$u = \Sigma\rho_i = \Sigma\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}$$

مشتق‌های نسبی، برای تابع، درهمه‌جا ـ به‌جز نقطه‌های مفروض ـ وجود دارد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Sigma\frac{x-a_i}{\rho_i} = \Sigma\cos\theta_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \Sigma\frac{y-b_i}{\rho_i} = \Sigma\sin\theta_i$$

که در آن، θ_i عبارت است از زاویهٔ بین خط M_iM با محور Ox.

نقطه‌های «مشکوك» به‌اکسترمم، قبل از همه، عبارتند از نقطه‌های M_1، M_2 و M_3، که در آن، مشتق وجود نـدارد؛ سپس، نقطهٔ M_0، که در آن‌جـا، مشتق‌ها با هم برابر صفر می‌شوند (می‌بینیم که این نقطه، همیشه وجود ندارد). چون با ترقی x یا y به‌سمت بی‌نهایت، تابع u هم، به‌روشنی، به‌سمت بی‌نهایت می‌رود، پس تابع مفروض در یکی از همین نقطه‌هایی که یاد کردیم، به کمترین مقدار خود می‌رسد.

برای پیداکردن نقطهٔ سکون M_0، دو مشتق نسبی را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3 = 0 \qquad \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3 = 0$$

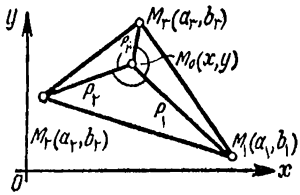
اولی را در $\sin\theta_2$ و دومی را در $\cos\theta_2$ ضرب و، سپس، ازهم کم می‌کنیم، نتیجه‌می‌شود:

$$\sin(\theta_1-\theta_2) = \sin(\theta_2-\theta_3) \Rightarrow \theta_1-\theta_2 = \theta_2-\theta_3$$

و به‌طریق مشابهی معلوم می‌شود که

$$\theta_2-\theta_3=\theta_3-\theta_1$$

بدین ترتیب، باید زاویه‌های بین هر دو خط از خط‌های M_0M_1، M_0M_2 و M_0M_3 را، برابر $\frac{2\pi}{3}$ گرفت. اگر کمان درخور زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ را روی هریک از ضلع‌های مثلث رسم کنیم، نقطهٔ M_0 در محل برخورد آن‌ها خواهد بود.



شکل ۱۰۹

اگر در این مثلث، زاویه‌ای بزرگتر یا مساوی $\frac{2\pi}{3}$ وجود نداشته باشد، کمان‌های نامبرده، در درون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند و نقطهٔ M_0، که از آن‌جا، ضلع‌های مثلث تحت زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ دیده می‌شوند، به‌دست می‌آید (شکل ۱۰۹). در این حالت، باید مقدارهایی را که u در چهار نقطهٔ «مشکوک» پیدا می‌کند، مقایسه کنیم. ثابت می‌کنیم که مقدار u، در نقطهٔ سکون M_0 کمتر از دیگران است (یعنی، به‌طور کلی، کوچکترین مقدار است). بنا به «قضیهٔ کسینوس‌ها» داریم:

$$\overline{M_1M_2}^2=\overline{M_0M_1}^2+\overline{M_0M_2}^2+\overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}>(\overline{M_0M_2}+\frac{1}{2}\overline{M_0M_1})^2$$

به نحوی که

$$\overline{M_1M_2}>\overline{M_0M_2}+\frac{1}{2}\overline{M_0M_1}$$

و به‌همین ترتیب

$$\overline{M_1M_3}>\overline{M_0M_3}+\frac{1}{2}\overline{M_0M_1}$$

با هم جمع می‌کنیم:

$$\overline{M_1M_2}+\overline{M_1M_3}>\overline{M_0M_1}+\overline{M_0M_2}+\overline{M_0M_3}$$

یعنی

$$u(M_1)>u(M_0)$$

روشن است که، در این‌جا، می‌توان به‌جای M_1، همین وضع را برای نقطه‌های M_2 یا M_3

هم ثابت کرد.

درحالتی که یکی از زاویه‌های مثلث، برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ یا بزرگتر از آن باشد، وضع عوض می‌شود. دراین حالت، نقطهٔ سکون وجودندارد و کمترین مقدار تابع u دریکی از نقطه‌های مفروض $M_۱$، $M_۲$ یا $M_۳$ به‌دست می‌آید (و در واقع، در رأس زاویهٔ منفرجهٔ مثلث).

ویژگی جالب این مساله، دراین جاست که در آن، به‌جز نقطهٔ سکون، باید نقطه‌هایی را هم، که در آن‌ها مشتق وجود ندارد، بـه حساب آورد [با یادداشت II، شمارهٔ ۱۹۶ مقایسه کنید].

۷) تعمیم مسالهٔ ۱). در دایـرهٔ مفروض به‌شعاع R، یك $(n+۱)$ ضلعی با حداکثر مساحت P، محاط کنید.

زاویه‌های مرکزی رو بـه‌روی ضلع‌های چند ضلعی را به $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، $x_{n+۱}$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n+x_{n+۱}=۲\pi$$

ازآن‌جا

$$x_{n+۱}=۲\pi-(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)$$

ومساحت P، برابراست با

$$P=\frac{۱}{۲}R^۲\sin x_۱+\frac{۱}{۲}R^۲\sin x_۲+\cdots+\frac{۱}{۲}R^۲\sin x_k+\frac{۱}{۲}R^۲\sin x_{n+۱}$$

اگربه‌جای $x_{n+۱}$، مقدارش را قراردهیم، مساله، منجربه‌پیداکردن حداکثر مقدار تابع‌زیر می‌شود:

$$u=\sin x_۱+\sin x_۲+\cdots+\sin x_n+\sin[۲\pi-(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)]$$

ضمناً، حوزهٔ $\mathcal{D}$، تغییرمتغیرهای‌مستقل $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، با نابرابری‌های زیر تعیین می‌شود:

$$x_۱\geqslant ۰,\ x_۲\geqslant ۰,\ \ldots,\ x_n\geqslant ۰,\ x_۱+x_۲+\cdots+x_n\leqslant ۲\pi$$

یعنی، یك سیمپلکس n بعدی [۱۶۲].

از روی قاعدهٔ کلی، مشتق‌ها را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را برابرصفر قرارمی‌دهیم:

$$\cos x_۱-\cos(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)=۰$$

. . . . . .

$$\cos x_n - \cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0$$

تنها نقطهٔ درونی حوزه که در این معادله‌ها صدق می‌کند، عبارت است از نقطهٔ

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{2\pi}{n+1}$$

که البته، ضمناً $x_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}$. این نقطه، متناظر است با $u = (n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}$.

برای این که ثابت کنیم، این نقطه در واقع، حداکثر مقدار u است، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. برای $n = 2$، حکم ما در مثال ۱) شمارهٔ قبل، ثابت شده است. فرض می‌کنیم که حکم، برای n جملهٔ سینوس درست باشد (یعنی، برای مجموع آن‌ها، $n.\sin\frac{2\pi}{n}$ حداکثر مقدار شود)، در این صورت، ثابت می‌کنیم که این حکم برای مجموع $(n+1)$ سینوس هم درست است.

در واقع، باید مقدار $(n+1).\sin\frac{2\pi}{n+1}$ را، با مقدارهایی که تابع در مرزهای حوزهٔ $\mathcal{D}$ اختیار می‌کند، مقایسه کنیم، برای نمونه، «مرز سیمپلکس» $x_n = 0$ را در نظر می‌گیریم در آن‌جا، u تابعی از $(n-1)$ متغیر خواهد بود:

$$u = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{n-1} + \sin[2\pi - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})]$$

و بنابراین، حداکثر مقدار در این جا، برابر است با $n.\sin\frac{2\pi}{n}$. برای سایر نقطه‌های «مرز» هم، می‌توان همین نتیجه را به‌دست آورد. ولی چون

$$n.\sin\frac{2\pi}{n} < (n+1).\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

پس، حکم ثابت است*. بیشترین مساحت را، چندضلعی منتظم دارد.

۸) یک شبکهٔ تغذیهٔ الکتریکی با اتصال موازی را در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۱۰، طرح شبکه داده شده است. ضمناً، A و B، محل اتصال منبع جریان و P_1، P_2، ...، P_n،

---

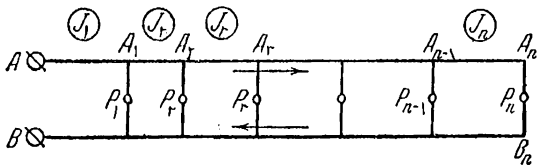
*) این نامساوی از این جا ناشی می‌شود که تابع $\frac{\sin z}{z}$، وقتی z از ۰ تا π ترقی کند، به‌طور یکنوا نزولی است [۱۳۳، ۱ را ببینید].

نقطه‌های گیرنده ــ که به‌ترتیب بـه جریان‌های i_1، i_2، ... ، i_n نیازدارند. اگرازقبل بدانیم که افت مجاز پتانسیل درمدار، به‌طورکلی، $2e$ باشد، می‌خواهیم مـقطع سیم را طوری پیدا کنیم که برای تمامی مسیر، حداقل مس مصرف شود.

کافی است، تنها یکی ازسیم‌ها، و مثلاً AA_n را درنظربگیریم، زیرا سیم دیگرهم، در وضعی کاملاً مشابـه قرار دارد. طول قسمت‌هـای AA_1، A_1A_2، ... ، $A_{n-1}A_n$ را با l_1، l_2، ... ، l_n (بـرحسب متر) ومساحت مقطع‌های عرضی آن را به q_1، q_2، ... ، q_n (بر حسب میلی‌مترمربع) نشان می‌دهیم. دراین صورت، عبارت

$$u_1=l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n$$

معرف حجم تمامی مس مصرف شده (برحسب سانتیمترمکعب) است، که باید کمترین‌مقدار ممکن آن‌را به دست‌آوریم؛ با توجه به‌این‌که افت‌کلی پتانسیل درسیم AA_n، برابراست با e.



شکل ۱۱۰

به‌سادگی معلوم می‌شود که‌کدام جریـان‌های J_1، J_2، ... ، J_n درقطعه‌هـای AA_1، A_1A_2، ... ، $A_{n-1}A_n$ می گذرند:

$$J_1=i_1+i_2+\cdots+i_n,\quad J_2=i_2+\cdots+i_n,\ \ldots,\ J_n=i_n$$

اگرمقاومت‌سیم مسی، به‌طول یك متر ومقطع یك میلی‌مترمربع را با ρ نشان دهیم، مقاومت این قطعه‌ها، عبارت خواهند بود از

$$r_1=\frac{\rho l_1}{q_1},\ r_2=\frac{\rho l_2}{q_2},\ \ldots,\ r_n=\frac{\rho l_n}{q_n}$$

به‌طوری‌که افت پتانسیل نظیر، دراین قطعه‌ها، طبق قانون اهم، چنین بیان می‌شود:

$$e_1=r_1J_1=\frac{\rho l_1J_1}{q_2},\ e_2=r_2J_2=\frac{\rho l_2J_2}{q_2},\ \ldots,\ e_n=r_nJ_n=\frac{\rho l_nJ_n}{q_n}$$

برای این کـه ازعمل‌های پیچیده، دوری کنیم، به‌جای متغیرهای q_1، q_2، ... ، q_n،

از همین مقدارهای e_1، e_2، ...، e_n استفاده می‌کنیم، که با شرط سادهٔ زیر، به‌هم مربوط‌اند:

$$e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}+e_n=e \Rightarrow e_n=e-e_1-e_2-\cdots-e_{n-1}$$

در این صورت، به‌نوبهٔ خود

$$q_1=\frac{\rho l_1 J_1}{e_1},\quad q_2=\frac{\rho l_2 J_2}{e_2},\quad \ldots,\quad q_n=\frac{\rho l_n J_n}{e_n}=\frac{\rho l_n J_n}{e-e_1-e_2-\cdots-e_{n-1}}$$

و

$$u=\rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1}+\cdots+\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}}+\frac{l_n^2 J_n}{e-e_1-\cdots-e_{n-1}}\right]$$

ضمناً، حوزهٔ تغییر متغیرهای مستقل e_1، e_2، ...، e_{n-1}، با نابرابری‌های زیر، معین می‌شود:

$$e_1>0,\ e_2>0,\ \ldots,\ e_{n-1}>0,\ e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}<e$$

(سیمپلکس باز).

با مساوی صفر قرار دادن مشتق‌های u، نسبت به همهٔ متغیرها، به‌این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,$$

$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0,\ \ldots$$

$$\ldots,\ -\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2}+\frac{l_n^2 J_n}{(e-e_1-\cdots-e_{n-1})^2}=0$$

از آن‌جا (با وارد کردن دوبارهٔ e_n)

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2}=\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2}=\cdots=\frac{l_n^2 J_n}{e_n^2}$$

اگر، مقدار مشترک همهٔ این نسبت‌ها را $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda>0)$ بگیریم، آن وقت

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\quad e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2},\ \ldots,\ e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n}$$

ضمناً، λ را می‌توان، به‌سادگی، از شرط $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$، معین کرد:

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\cdots+l_n\sqrt{J_n}}$$

چون، با نزدیك شدن نقطهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ به مرزهای حوزه، مقدار u تا بی‌نهایت ترقی می‌کند، بنابراین، درواقع، همان مقدارهایی که برای e_1، e_2، ...، $(e_n)e_{n-1}$ پیدا کردیم، تابع u را به کمترین مقدار خود می‌رساند.

در پایان، اگر دوباره به متغیرهای اصلی q_1، q_2، ...، q_n برگردیم، داریم:

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1}, q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2}, \ldots, q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n}$$

به‌نحوی که مناسب‌ترین مقطع‌های سیم، درحالتی است که با ریشه‌های دوم نیروی برق، متناسب باشند.

۹) روش حداقل مجذورها. این روش، به‌روش مطالعهٔ کاملاً گسترده‌ای گفته می‌شود که مضمون آن را در این‌جا شرح می‌دهیم.

می‌خواهیم، مقدار سه کمیت* x و y و z را طوری پیدا کنیم که، برای آن‌ها، $n>3$ معادلهٔ خطی زیر، برقرار باشد:

$$a_ix+b_iy+c_iz=d_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ضمناً، بعضی ازضریب‌های a_i، b_i، c_i و d_i ازطریق تجربی به‌دست آمده‌اند و، بنابراین، مقدارهایی تقریبی‌اند. درضمن، فرض می‌کنیم، سه تا ازاین معادله‌ها، دترمینانی مخالف صفر داشته باشند، مثلاً فرض می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (14)$$

با وجود این، مقدارهای x و y و z، که به‌کمك سه معادلهٔ اول به‌دست می‌آیند، در حالت کلی، درسایر معادله‌ها، دقیقاً صدق نمی‌کنند (یا به‌خاطر خطای ناگزیری که درضریب‌ها وجود دارد، و یا به‌خاطر تقریبی بودن خود معادله‌ها). با توجه به‌این که هیچ معادله، بردیگری، برتری اساسی ندارد و با توجه به ناگزیری خطای

$$\delta_i=a_ix+b_iy+c_iz-d_i$$

---

*) تنها به‌خاطر سادگی عمل، به‌سه کمیت اکتفا کرده‌ایم.

تلاش می‌شود که، برای مقدارهـای دلخواه انتخابی x و y و z، مجموع مجذورهای این خطاها را، به‌حداقل خود برسانند:

$$W=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)^2$$

(نام گذاری‌روش هم، ازهمین‌جاست). به‌زبان دیگر، بهترین توافق با نتیجه‌های حاصل‌از تجربه، به‌مقدارهایی از x و y و z گفته می‌شود که تابع $W=W(x, y, z)$ را به‌حداقل مقدارخود برسانند.

با توجه به‌قاعدهٔ کلی، برای رسیدن بـه‌این هدف، مشتق‌های W نسبت به x و y و z را، برابرصفرقرارمی‌دهیم:

$$2\sum_{i=1}^{n}a_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}b_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}c_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0$$

گوس (C. F. Gauss)، علامت گذاری‌دیگری را، برای مجموع جمله‌های ازیك نوع، به‌کاربرد. اوبه‌جای $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ ازعلامت $[aa]$ وبه‌جای $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ ازعلامت $[ab]$استفاده می‌کند وغیره.

با علامت گذاری گوس، معادلـه‌های حاصل را، برای تعیین x و y و z، مـی‌توان این‌طور نوشت:

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z=[ad]$$

$$[ba]x+[bb]y+[bc]z=[bd]$$

$$[ca]x+[cb]y+[cc]z=[cd]$$

که معادله‌های نرمال نامیده می‌شوند.

برای این‌که اطمینان پیداکنیم که‌این معادله‌ها، مقدارهای x و y و z را،به‌صورت یك ارزشی معلوم می‌کنند، باید مشخص کردکه دترمینان دستگاه، مخالف صفراست. ولی، از روی قضیهٔ معلوم جبر، مجذوراین دترمینان، به‌این صورت، درمی‌آید:

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}^{۲} = \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}^{۲}$$

ضمناً، عمل Σ، درموردهمهٔ انواع ترکیب‌های ممکن (i, j, k) از n علامت ۱، ۲، ... ، n (سه بـه سه) انجام می‌گیرد. چـون از بین همهٔ دتـرمینان‌های سمت راست، طبق فرض، دست‌کم یکی، مخالف صفراست، بنابراین، دترمینان سمت چپ هم مخالف صفرمی‌شود.

حالا، بایـد روشن کنیم کـه مقدارهایی ازمتغیرها، که ازمعادله‌های نرمال به‌دست می‌آیند، حقیقتاً، تابع u را بـه‌حداقل مقدارخـود می‌رسانند. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که دربیرون کرهٔ باشعاع به‌قدر کافی بزرگ W، مقدار u به‌قدرکافی بزرگ می‌شود. به‌این منظور، مقدارهای سه پرانتز اول درعبارت W را درنظرمی‌گیریم:

$$a_۱x+b_۱y+c_۱z-d_۱=u_۱,\quad a_۲x+by+c_۲z-d_۲=u_۲$$

$$a_۳x+b_۳y+c_۳z-d_۳=u_۳$$

باتوجه به (۱۴)، x ، y و z هم، به‌نوبهٔ خـود، باضریب‌های ثابت کاملاً معین، برحسب این مقدارها، به‌صورت‌خطی بیان می‌شوند. چون فعلاً هرسه مقدار $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ محدودند، x و y و z هـم، مقدارهـایـی مـحدود می‌شونـد. ازایـن‌جـا، روشن مـی‌شودکه اگر $r^۲=x^۲+y^۲+z^۲$، تا بـی‌نهایت ترقی کند، $u_۱^۲+u_۲^۲+u_۳^۲$ (و در نتیجه W) هـم، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند.

MATH75.IR

فصل ششم

دترمینان‌های تابعی و کاربرد آن‌ها

§۱. ویژگی‌های صوری دترمینان‌های تابعی

۲۰۲. تعریف دترمینان تابعی (ژاکوبین). در این فصل هم (مثل سایر بخش‌ها)، نوع خاصی از دترمینان‌ها، که از مشتق‌های نسبی تشکیل شده‌اند، مورد بررسی ما قرار می‌گیرد. ابتدا، ویژگی‌های اساسی آن‌ها را بیاموزیم.

فرض کنیم n تابع از n متغیر داده شده باشد:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

که در حوزهٔ n بعدی $\mathcal{D}$ معین باشد و، در آن، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته، نسبت به همهٔ متغیرها، باشد. از این مشتق‌ها دترمینان زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

این دترمینان را، معمولاً، دترمینان تابعی ژاکوبی یا ژاکوبین دستگاه (۱) می‌نامند، که از نام ژاکوبی (C. G. J. Jacobi)، ریاضی‌دان آلمانی (که برای نخستین بار، ویژگی‌ها و کاربردهای آن‌را مورد مطالعه قرار داد)، گرفته شده است*. برای سادگی کار، آن‌را، با نماد

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

که شبیه علامت‌مشتق است، نشان‌می‌دهند. ژاکوبین، ویژگی‌هایی دارد که شبیه ویژگی‌های مشتق‌های معمولی است.

۲۰۳. ضریب ژاکوبین‌ها. علاوه بر دستگاه (۱)، دستگاه تابع‌های زیر را هم، در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \end{aligned}\right\} \qquad (۲)$$

که درحوزهٔ $\mathcal{P}$، معین و دارای مشتق‌های نسبی پیوسته باشند. فرض می‌کنیم که با تغییر نقطهٔ $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ در $\mathcal{P}$، نقطهٔ نظیر $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ازحوزهٔ $\mathcal{D}$ تجاوز نکند، به‌نحوی که y_1، y_2، ...، y_n را بتوان مانند تابع‌های مرکب، از t_1، t_2، ...، t_n، باواسطهٔ x_1، x_2، ...، x_n در نظر گرفت.

حالا، ژاکوبین دستگاه (۱) را، در ژاکوبین دستگاه (۲):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\delta t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

*) درواقع، «ژاکوبین‌ها»، دریک‌زمان، به‌وسیلهٔ ژاکوبی و اوستروگرادسکی، وارد دانش‌شده‌اند.

ضرب می‌کنیم. در نظریهٔ دترمینان‌ها، قضیه‌ای داریم که ضرب دترمینان‌ها را، طبق دستور زیر، برای ما مشخص می‌کند:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ b_{n1}b_{n2}\cdots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ c_{n1}c_{n2}\cdots c_{nn} \end{vmatrix}$$

که در آن، جملهٔ عمومی دترمینان آخری، چنین است:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(ضرب از روی قاعدهٔ «سطر در ستون»). این دستور را، در مورد دترمینان‌های تابعی به‌کار می‌بریم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

توجه می‌کنیم که از روی رابطهٔ مربوط به مشتق تابع‌های مرکب، جملهٔ عمومی این دترمینان، چنین است:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\dots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}=\frac{\partial y_i}{\partial t_k}$$
$$(i, k=1, 2, \dots, n)$$

بنابراین، می‌توانیم، دترمینان آخری را، این‌طور بنویسیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

این ویژگی ژاکوبین‌ها را، که ثابت کردیم، می‌توان، به‌صورت کوتاه، چنین نوشت:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)}=\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)} \quad (۳)$$

اگر با تابع y از x سروکار می‌داشتیم، که x خود تابعی از t بود، در آن صورت، به رابطهٔ معلوم برای مشتق تابع مرکب می‌رسیدیم: $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$. به این ترتیب، خاصیتی را که برای ژاکوبین به‌دست آوردیم، می‌توان تعمیم رابطهٔ مشتق تابع مرکب دانست.

حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که متغیرهای t_1، t_2، ...، t_n، متحد با y_1، y_2، ...، y_n باشند، به‌نحوی که دستگاه تابع‌های (۲) را بتوان تبدیلی از دستگاه (۱) دانست*.

رابطهٔ حاصل، به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}=1$$

---

*) خود امکان این تبدیل را، در این‌جا، مفروض می‌گیریم. بند بعد را ببینید.

یا

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \qquad (۴)$$

که در واقع، رابطهٔ مربوط به‌مشتق تابع معکوس را به‌خاطرمی‌آورد.

۲۰۴. ضرب ماتریس‌های تابعی (ماتریس ژاکوبی). m تابع y_1، y_2، ...، y_m را، از n متغیر x_1، x_2، ...، x_n $(n>m)$، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

ضمناً، متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n، به‌نوبهٔ خود، تابع‌هایی از m متغیر t_1، t_2، ...، t_m هستند:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{cases}$$

با فرض این‌که، در هر دو حالت، مشتق‌های نسبی پیوسته، وجود دارند، می‌کوشیم عبارتی برای ژاکوبین y_1، y_2، ...، y_m، به عنوان تابع‌هایی از t_1، t_2، ...، t_m پیدا کنیم.

در نظریهٔ دترمینان‌ها، قضیهٔ مربوط به ضرب ماتریس‌ها، ثابت می‌شود (که‌ضرب دترمینان‌ها ــ که قبلاً از آن استفاده کردیم ــ حالت خاصی ازآن می‌شود). دو ماتریس (جدول) را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad (n>m)$$

حاصل ضرب آن‌ها، ماتریس مربع نامیده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

که عضوهای آن، از روی این رابطه به‌دست می‌آیند:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

دترمینان نظیر این ماتریس، برابر است بامجموع

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \cdots & b_{i_1 m} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \cdots & b_{i_2 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i_m 1} & b_{i_m 2} & \cdots & b_{i_m m} \end{vmatrix}$$

که با انواع ترکیب‌های $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ از n علامت $1, 2, \ldots, n$ ـ به‌صورت m به m ـ بازمی‌شود.

اگر، این نتیجه را در مورد «ماتریس‌های تابعی» (یا ماتریس ژاکوبی)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

به‌کار بریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\cdots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\cdots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\cdots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\cdots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\cdots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\cdots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_m)} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_1} & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

اگر دوباره، رابطهٔ مربوط به مشتق‌گیری تابع مرکب را به خاطر آوریم، آن‌گاه، می‌توان دترمینان سمت چپ این برابری را، به‌این صورت نوشت:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial t_1} & \frac{\partial y_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

با علامت‌های اختیاری، این نتیجه را، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})} \cdot \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} \quad (۵)$$

که درمجموع، باید هرگونه ترکیب از n علامت ۱، ۲، ...، n، به‌صورت m به m، درنظر گرفته شود.

این رابطه، به‌ازای $m = ۱$، به رابطهٔ معلوم مشتق یك تابع مرکب، تبدیل می‌شود. (با واسطهٔ چند متغیر):

$$\frac{\partial y}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{dt}$$

و بنابراین، تعمیمی است ازآن.

حالت خاصی را که به‌ازای $n = ۳$ و $m = ۲$ به‌دست می‌آید، می‌آوریم:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} + \\ + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)} \quad (۶)$$

این رابطه، کاربردهای زیادی دارد.

یك رشته از ویژگی‌های ژاکوبین را، که مشابه ویژگی‌های مشتق معمولی بود، ثابت کردیم؛ دراین‌باره، بازهم در یکی از شماره‌های نزدیك [۲۱۰، ۸)] صحبت خواهیم کرد. ولی شباهت بیشترمشتق‌ها و ژاکوبین‌ها، درنقشی ظاهرمی‌شودکه در نظریهٔ تابع‌های ضمنی (بند بعدی را ببینید) و، به‌خصوص، در مسالهٔ تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه و، به‌طورکلی، چندگانه (جلدسوم)، به‌عهده دارند.

§۲. تابع‌های ضمنی

۲۰۵. مفهوم تابع ضمنی با یك متغیر. فرض می‌کنیم، مقدارهای دو متغیر x و y، به‌وسیلهٔ یك معادله، به‌هم مربوط باشند. اگر همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ ببریم، به‌صورت کلی زیر درمی‌آید:

$$F(x, y) = ۰ \quad (۱)$$

در این‌جا، $F(x, y)$، تابع دو متغیره‌ای است که درحوزه‌ای تعریف شده‌است. اگربه‌ازای

هرمقدار x، در یك حوزه، یك یا چند مقدار y وجود داشته باشدکه همراه با x، در معادلهٔ (۱) صدق کنند، آن‌گاه، با تابع یك یا چند ارزشی $y=f(x)$ سروکار داریم که به ازای آن، برابری

$$F(x, f(x))=0 \qquad (۲)$$

نسبت به x، یك اتحاد تشکیل می‌دهد.

به‌عنوان نمونه، معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-۱=0 \qquad (۱a)$$

را درنظر می‌گیریم. روشن است که این معادله، y را به عنوان یك تابع دو ارزشی از x، در بازهٔ $[-a, a]$ مشخص می‌کند. داریم:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-x^۲}$$

که اگر در (۱a)، به‌جای y، مقدارش را قرار دهیم، به‌یك اتحاد می‌رسیم.

دراین‌جا، توانستیم، y را، به‌صورت‌ساده‌ای ــ به‌صورت یك تابع مقدماتی ــ برحسب x با یك عبارت تحلیلی بیان‌کنیم. ولی، کار همیشه به این سادگی نیست. این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$y-x-\varepsilon\sin y=0 \quad (0<\varepsilon<۱)$$

که قبلاً هم، با آن، برخورد داشتیم[منتهی با نشانه‌های‌دیگری برای متغیرها: **۸۳**].می‌دانیم که با این معادله، y مانند یك تابع یك ارزشی از x تعریف می‌شود، هرچند که نمی‌توانیم آن را، به‌صورت یك تابع مقدماتی، بیان‌کنیم.

تابع $y=f(x)$را ضمنی گویند اگر به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۱)،که (نسبت به y)حل‌نشده است، داده شده باشد. اگر بستگی مستقیم y نسبت بــه x پیدا شود، این تابع ضمنی، به‌یك تابع صریح تبدیل‌می‌شود. برای‌خواننده روشن است‌که این‌نام‌گذاری‌ها، تنها برای‌مشخص کردن‌شکل و وسیلهٔ مفروض بودن تابع‌است وهیچ ارتباطی با طبیعت‌آن ندارند. [روشن‌تر بگوییم: وقتی می‌توان مفهوم‌های تابع‌صریح و تابع ضمنی را درمقابل هم قرارداد‌که‌تابع صریح‌را به‌صورت تحلیلی مفروض بگیریم؛ ولی اگر تابع صریح را به این مفهوم بگیریم که، به‌نحوی، بستگی y نسبت بــه x مشخص شده است، درآن‌صورت، مشخص‌کردن این بستگی با رابطهٔ (۱)، هیچ نقصی نسبت به انواع دیگر این بستگی ندارد.]

درحالت‌های‌ساده‌تری‌که معادلهٔ (۱) جبری‌باشد، یعنی تابع $F(x, y)$، نسبت‌بهx وy

یك چند جمله‌ای صحیح باشد، تابعی را که به‌صورت ضمنی y را نسبت به x (و درحالت کلی، چند ارزشی) می‌دهد، تابع جبری گویند. اگر درجهٔ معادله (نسبت به y)، از چهار تجاوز نکرده باشد، تابع جبری را می‌توان به صورت عبارتی از رادیکال‌ها، به‌تابع‌صریح تبدیل کرد، ولی این تبدیل، در حالتی که با درجه‌های بالاتر از چهار (برای y) سروکار داشته باشیم، تنها درحالت‌های استثنائی ممکن است.

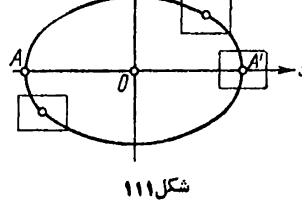
مسأله‌ای که برای ما جالب است، این است که بتوانیم وجود و یك‌ارزشی بودن تابع «ضمنی» را (در کنار سایر ویژگی‌های آن) ـ بدون این‌که دربارهٔ تبدیل آن به‌صورت «صریح» و با یك‌رابطهٔ تحلیلی کاری داشته باشیم ـ مورد بررسی قرار دهیم. ضمناً، طرح این مسأله، برای ما تازگی ندارد و باحالت‌های‌خاص آن‌سروکار داشته‌ایم: وقتی که‌صحبت برسر وجود و ویژگی‌های تابع معکوس، با معادلهٔ

$$y - f(x) = 0$$

بود، متغیر x، همچون یك تابع «ضمنی» از y تعریف می‌شد.

تعبیر هندسی این مسأله، آموزنده است. معادلهٔ (۱)، باشرط‌های معلوم، یك منحنی را برصفحه مشخص می‌کند [مثلاً معادلهٔ (1a)، همان طور که می‌دانیم، معرف یك بیضی است (شکل ۱۱۱)]. دراین حالت، آن‌را، معادلهٔ ضمنی منحنی گویند. مساله عبارت است ازاین که: آیا معادلهٔ (۱) (یا بخشی از آن)، می‌تواند با معادلهٔ معمولی به‌صورت $y = f(x)$، با تابع یك‌ارزشی درسمت راست، بیان شود؟ ازنظر هندسی، این مطلب به‌معنای آن است که هرخط موازی محور Oy، منحنی (یا بخشی از آن) را، تنها دریك نقطه قطع کند.

اگر بخواهیم تابع یك ارزشی داشته باشیم، درآن صورت، همان‌طور که از مثال بیضی دیده می‌شود، نه‌تنها حوزهٔ تغییر x، بلکه حوزهٔ تغییر y را هم باید محدود کرد.



شکل ۱۱۱

برای سادگی به‌این‌ترتیب خواهیم گفت که: درمستطیل $(a, b; c, d)$، معادلهٔ (۱)، y را مانند تابع یك ارزشی از x تعریف می‌کند، اگربه‌ازای هرمقدار x ازبازهٔ (a, b)، معادلهٔ (۱) دارای یك، و تنها یك ریشهٔ y در بازهٔ (c, d) باشد.

معمولاً، نقطهٔ معین (x, y)، که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند (یعنی برمنحنی واقع است)، مورد توجه ما خواهد بود و همسایگی این نقطهٔ را، به‌عنوان مستطیل نامبرده، در نظر می‌گیریم.

مثلاً، درحالت بیضی (شکل ۱۱۱)، معلوم است که می‌توان گفت: معادلهٔ (1a)، عرض y را، مانند تابع یك‌ارزشی از طول x، در همسایگی به‌قدرکافی کوچك هرنقطهٔ نامشخص

بیضی ــ به‌استثنای راس‌های A و A' آن برمحور بزرگتر ــ معین می‌کند.

۲۰۶. وجود تابع ضمنی. حال به شرط‌هایی می‌پردازیم که وجود تابع ضمنی یك‌ارزشی و پیوسته را، تامین می‌کنند.

قضیهٔ I. فرض‌کنیم: ۱) تابع $F(x, y)$، در یك مستطیل

$$\mathcal{D}=[x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0'+\Delta']$$

به مرکز نقطهٔ (x_0, y_0)، معین و پیوسته باشد؛

۲) $F(x, y)$ دراین نقطه، برابر صفر شود: $F(x_0, y_0)=0$؛

۳) برای مقدار ثابت x، تابع $F(x, y)$، با ترقی y، به‌طور یکنوا صعودی (یا به‌طور یکنوا نزولی) باشد.

آن‌گاه

a) دریك همسایگی نقطهٔ (x_0, y_0)، معادلهٔ (۱)، y را، مانند تابع یك‌ارزشی از x مشخص می‌کند: $y=f(x)$؛

b) به‌ازای $x=x_0$، این تابع، مقدار y_0 را اختیار می‌کند: $f(x_0)=y_0$؛

c) تابع $f(x)$ پیوسته‌است.

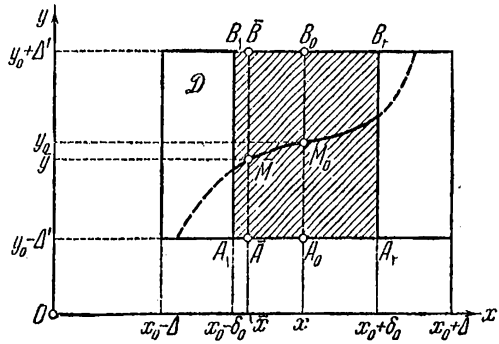
اثبات. درطول قائمی‌که از $M_0(x_0, y_0)$ می‌گذرد (شکل ۱۱۲)، حرکت می‌کنیم، یعنی $x=x_0$ را تثبیت می‌کنیم. دراین صورت، تابع $F(x, y)$، به‌تابع $F(x_0, y)$ از یك متغیر y تبدیل می‌شود و بنابه ۲)، به‌ازای $y=y_0$ برابر است با صفر. درعین‌حال، بنابه شرط۳)، تابع $F(x_0, y)$، همراه با y، صعود می‌کند، به‌طوری‌که‌برای $y<y_0$، مقدارهای تابع، کمتر از صفر و برای $y>y_0$، بیشتر از صفرخواهند بود. به‌خصوص، نتیجه می‌شود که‌در نقطه‌های $A_0(x_0, y_0-\Delta')$ و $B_0(x_0, y'+\Delta')$، مقدارهایی باعلامت‌های مختلف را اختیار می‌کند، یعنی

$$F(A_0)=F(x_0, y_0-\Delta')<0, F(B_0)=F(x_0, y_0+\Delta')>0$$

حالا، خط‌های افقی را در نظر می‌گیریم که براین نقطه‌های A_0 و B_0 می‌گذرند، یعنی این‌بار، $y=y_0-\Delta'$ و $y=y_0+\Delta'$ را تثبیت می‌کنیم؛ به‌دوتابع از یك متغیر x می‌رسیم: $F(x, y_0-\Delta')$ و $F(x, y_0+\Delta')$ که، همان‌طورکه دیدیم، به‌ازای $x=x_0$، اولی، مقداری‌منفی و دومی، مقداری‌مثبت‌می‌شود. ولی، بنابرشرط۱)، این‌تابع‌ها پیوسته‌اند*

---

*) ما تابع $F(x, y)$ را، نسبت به‌هردوی x و y، پیوسته فرض‌کردیم؛ ولی در چنین حالتی، تابع نسبت‌به هرمتغیر، به‌طور جداگانه، پیوسته خواهد بود.



شکل ۱۱۲

و، بنابراین، یك همسایگی $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ مقدار x_0 $(0<\delta_0\leqslant\Delta)$ پیدا می‌شود که، در آن، هردو تابع، علامت خود را حفظ می‌کنند [۸۰، پیش‌قضیهٔ]، به‌طوری که برای $x_0-\delta_0<x<x_0+\delta_0$:

$$F(x_0, y_0-\Delta')<0, F(x_0, y_0+\Delta')>0$$

به‌زبان دیگر، روی قاعده‌های پایین و بالای مستطیل اولیه، درطول پاره‌خط‌های A_1A_2 و B_1B_2، به‌طول $2\delta_0$ و مرکزهای A_0 و B_0، تابع مفروض $F(x, y)$، روی اولی منفی، و روی دومی مثبت است.

در بازهٔ $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$، مقدار نامشخص $x=\bar{x}$ را تثبیت می‌کنیم و پاره‌خط قائمی را درنظر می‌گیریم که دو نقطهٔ $\bar{A}(\bar{x}, y_0-\Delta')$ و $\bar{B}(\bar{x}, y_0+\Delta')$ را به‌هم وصل می‌کند. درطول این پاره‌خط، تابع ما، دوباره به‌تابع $F(\bar{x}, y)$ ازیك متغیر y، تبدیل می‌شود. چون این تابع، بنا به ۱) پیوسته است و، همان‌طور که گفته شد، در دو انتهای بازهٔ $[y_0-\Delta', y_0+\Delta']$، دارای مقدارهایی با علامت‌های مختلف است:

$$F(\bar{A})=F(\bar{x}, y_0-\Delta')<0, F(\bar{B})=F(\bar{x}, y_0+\Delta')>0$$

بنابراین، بنا به قضیهٔ بولزانو ـ کوشی [۸۰]، به ازای مقداری مثل $y=\bar{y}$، واقع در بین $y_0-\Delta'$ و $y_0+\Delta'$، تابع $F(\bar{x}, y)$ برابرصفر می‌شود:

$$F(\bar{x}, \bar{y})=0$$

این‌جاهم، ازشرط ۳) نتیجه‌می‌شود که به‌ازای $y<\bar{y}$ داریم: $F(\bar{x}, y)>0$ و به‌ازای $y<\bar{y}$ داریم: $F(\bar{x}, y)<0$، به‌نحوی که $\bar{y}$ تنها مقدار y در بازهٔ $(y_0-\Delta', y_0+\Delta')$ است که همراه با $\bar{x}=x$، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. برهر پارهٔ‌خط قائم $\bar{A}\bar{B}$، تنها یك نقطهٔ $M(\bar{x}, \bar{y})$ پیدا می‌شود که سمت چپ معادله را برابر صفر می‌کند.

به این ترتیب، درهمسایگی

$$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0; y_0-\Delta', y_0+\Delta')$$

نقطهٔ (x_0, y_0)، معادلهٔ (۱)، در واقع، y را مانند تابع یک‌ارزشی از x مشخص می‌کند: $y=f(x)$.

درعین‌حال، این بحث با توجه به۲)، همچنین نشان می‌دهد که $f(x_0)=y_0$. به‌خصوص، از $F(x_0, y_0)=0$ معلوم می‌شود که y_0، تنها مقدار y در بازهٔ $(y_0-\Delta', y_0+\Delta')$است که همراه با $x=x_0$، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

تنها، اثبات پیوستگی تابع $y=f(x)$، در بازهٔ $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ می‌ماند. در نقطهٔ $x=x_0$، این مطلب، مستقیماً از بحث قبلی نتیجه می‌شود که می‌توان آن‌را، درمورد هر مستطیل کوچك به‌مرکز $M_0(x_0, y_0)$ به‌کار برد. باعوض کردن عدد Δ'، باعدد دلخواه $\varepsilon<\Delta'$، مثل قبل، چنان $\delta\leqslant\delta_0$ پیدا می‌شود که برای هرمقدار x ازبازهٔ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$، تنهامقداری از y که همراه با x در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، بین $y_0-\varepsilon$ و $y_0+\varepsilon$ قرار داشته‌باشد. به‌این‌ترتیب، برای $|x-x_0|<\delta$ داریم:

$$|f(x)-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

که پیوستگی تابع $f(x)$ را، در نقطهٔ $x=x_0$، ثابت می‌کند.

اثبات، برای نقطهٔ دلخواه $x=\bar{x}$، شبیه اثبات درمورد $x=x_0$ انجام می‌گیرد. نقطهٔ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$، که در آن $\bar{y}=f(\bar{x})$، درهمان شرط‌های شبیه نقطهٔ $M_0(x_0, y_0)$ صدق می‌کند، زیرا $F(\bar{x}, \bar{y})=0$. بنابراین، مانند قبل، درهمسایگی نقطهٔ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$، متغیر y، به وسیلهٔ معادلهٔ (۱)، همچون تابع یک‌ارزشی وپیوسته در نقطهٔ $x=\bar{x}$، مشخص می‌شود. ولی، درست به‌علت یک‌ارزشی بودن، این تابع بر $f(x)$ منطبق می‌شود که، در واقع، پیوستگی $f(x)$ را به‌ازای $x=\bar{x}$، ثابت می‌کند.

قضیهٔ وجود تابع ضمنی را ثابت کردیم، بدون این‌که به مسألهٔ محاسبهٔ مقدارهای آن ویا نمایش تحلیلی آن، وارد شده باشیم. به‌این موضوع‌ها، در فصل دوازدهم، خواهیم پرداخت.

روشن است، قضیه‌ای که دراین‌جا ثابت کردیم، تعمیمی از قضیهٔ **۸۳** است.

۲۰۷. مشتق‌پذیری تابع ضمنی. فرض‌های مربوط به تابع $F(x, y)$ را تقویت می‌کنیم و، ازآن‌جا، به بحث‌در وجود وامکان‌تعیین‌مشتق، برای تابع $y=f(x)$، می‌پردازیم.

قضیهٔ II. فرض می‌کنیم: ۱) تابع $F(x, y)$ در مستطیل

$$\mathcal{D}=[x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0+\Delta']$$

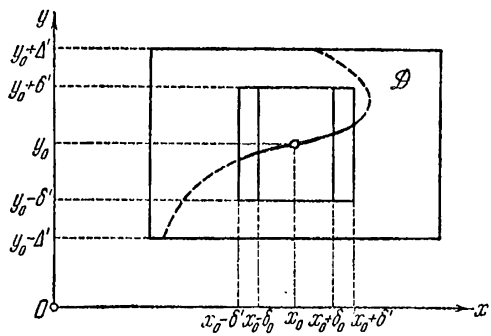
به مرکز (x_0, y_0) معین و پیوسته باشد؛

۲) مشتق‌های نسبی F'_x و F'_y، در $\mathcal{D}$، وجود داشته و پیوسته باشند؛
۳) $F(x, y)$ در نقطهٔ (x_0, y_0)، برابر صفر شود: $F(x_0, y_0)=0$؛
۴) مشتق $F'_y(x_0, y_0)$ مخالف صفر باشد.
آن‌وقت، علاوه بر نتیجه‌های a)، b) و c) از قضیهٔ I، ضمناً
d) تابع $f(x)$، دارای مشتق پیوسته است.

اثبات. (شکل ۱۱۳). فرض کنیم، مثلاً $F'_y(x_0, y_0)>0$، چون مشتق $F'_y(x, y)$، بنا به ۲)، پیوسته است، می‌توان چنان مربعی ساخت

$$[x_0-\delta', x_0+\delta'; y_0-\delta', y_0+\delta'] \quad (\delta'<\Delta, \Delta')$$

به نحوی که برای همهٔ نقطه‌های آن، داشته باشیم: $F'_y(x, y)>0$*. دراین‌صورت، برای این مربع، همهٔ شرط‌های قضیهٔ I برقرارند: یکنوایی تابع $F(x, y)$ نسبت به y، برای



شکل ۱۱۳

$x=\text{const}$.، ازاین‌جا ناشی می‌شود که داریم $F'_y>0$ [۱۳۲]. بنابراین، نتیجه‌های a) b) و c) را، باید ثابت شده تلقی کرد.

برای اثبات حکم d)، y را، همان تابع ضمنی $y=f(x)$ درنظر می‌گیریم که با معادلهٔ (۱)، تعریف‌می‌شود و به‌طور اتحادی در آن صدق می‌کند. به x، نمو Δx را می‌دهیم؛ مقدار $x+\Delta x$، متناظر است با مقدار $y+\Delta y=F(x+\Delta x)$، که‌همراه با آن، درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند: $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. نمو

$$\Delta F(x, y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0$$

را هم، اگر از روی رابطهٔ (۱) شمارهٔ **۱۷۸** حساب کنیم، داریم:

$$0=\Delta F(x, y)=F'_x(x, y)\cdot\Delta x+F'_y(x, y)\cdot\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

---

*) زیرا برای تابع با چند متغیرهم، حکم‌نظیرپیش‌قضیهٔ شمارهٔ **۸۰** درمورد تابع با یک‌متغیر، درست است.

که در آن، α و β بستگی به Δx و Δy دارند و، وقتی که Δx و Δy به‌طور هم‌زمان به‌سمت صفر میل کنند، α و β به‌سمت صفر میل می‌کنند. از این‌جا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)+\alpha}{F'_y(x, y)+\beta}$$

Δx را به‌سمت صفر میل می‌دهیم، بنا به پیوستگی تابع $y=f(x)$ [c] را ببینید]، Δy هم به‌سمت صفر میل می‌کند و، سپس، همراه با آن‌ها $\alpha \to 0$ و $\beta \to 0$. چون $F'_y \neq 0$، بنابراین، حد سمت راست و، درنتیجه، مشتق y نسبت به x وجود دارد:

$$f'(x)=y'_x=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (۳)$$

که با گذاشتن $f(x)$ به‌جای y، خواهیم داشت:

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

چون درصورت و مخرج، با تابع‌های پیوسته‌ای (از تابع‌های پیوسته) سروکار داریم و مخرج هم مخالف صفر است، بنابراین، روشن است که تابع $f'(x)$ نیز یك تابع پیوسته می‌شود. قضیه، ثابت شد.

جالب است که از روی ویژگی‌های تابع $F(x, y)$، می‌توانیم دربارهٔ ویژگی‌های تابع $y=f(x)$ ــ که مستقیماً در اختیار نداریم ــ داوری کنیم.

۲۰۸. تابع ضمنی از چند متغیر. شبیه معادلهٔ (۱)، می‌توان معادله‌ای را در نظر گرفت، که با تعداد بیشتری متغیر، سروکار داشته باشد:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)=0 \qquad (۴)$$

با شرط‌هایی، این معادله، y را، مانند تابع «ضمنی» از متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n، تعریف می‌کند:

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

که در حالت کلی، چند ارزشی است و اگر، در آن، به‌جای y، مقدارش را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))=0$$

که نسبت به x_1، x_2، ...، x_n، یك اتحاد تشکیل می‌دهد.

می گوئیم، معادلهٔ (۴)، درمکعب مستطیل $(n+1)$ بعدی

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n; c, d)$$

yرا، مانند تابع یك ارزشی نسبت به x_1، x_2، ... ، x_n مشخص می کند، اگربه‌ازای نقطهٔ دلخواه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، واقع درمکعب مستطیل n بعدی

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n)$$

معادلهٔ (۴)، دارای یك، و تنها یك ریشهٔ y، درباز‌هٔ (c, d)، باشد.

معمولاً، نقش این مکعب مستطیل، به‌عهدهٔ همسایگی نقطهٔ مورد علاقهٔ ما $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ است.

حالا، قضیهٔ مربوط به‌معادلهٔ (۴) را تنظیم می کنیم:

قضیهٔ III. فرض می کنیم: ۱) تابع $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$، در مکعب مستطیل n بعدی

$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1; \ldots; x_n - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

به‌مرکز نقطهٔ $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$، معین و پیوسته است؛

۲) مشتق‌های نسبی F'_{x_1}، ...، F'_{x_n}، F'_y، در $\mathcal{D}$، وجود دارند وپیوسته‌اند؛

۳) تابع F، درنقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ برابر صفر می‌شود وبالاخره

۴) مشتق F'_y دراین نقطه، برابر صفر نیست.

دراین صورت

a) دریك همسایگی نقطهٔ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$، معادلهٔ (۴)، y را مانند تابع یك ارزشی از x_1، x_2، ...، x_n، مشخص می‌کند؛ $(y = f(x_1, y_2, \ldots, x_n)$؛

b) این تابع، به‌ازای $x_1 = x_1^0$، ...، $x_n = x_n^0$، مقدار y_0 را اختیار می‌کند: $y_0 = f(x_1^0, \ldots, x_2^0, \ldots, x_n^0)$؛

c) تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$، نسبت به‌مجموعهٔ آوندهای خود، پیوسته است و

d) نیزدارای مشتق‌های نسبی‌پیوستهٔ f'_{x_1}، ...، f'_{x_n} می‌باشد.

ضرورتی‌نداردکه به‌اثبات این قضیه بپردازیم، کاملاً مشابه اثبات قضیه‌های I و II است.

بالاخره، درحالت کلی، می‌توان، دستگاهی از m معادله با $n+m$ متغیرداد:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

در این جا، صحبت بر سر تعریف m متغیر y_1، ...، y_m، به‌عنوان تابع‌هایی «ضمنی» از n متغیر x_1، x_2، ...، x_n، به‌وسیلهٔ این‌دستگاه، است:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n); \ \ldots; \ y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

به‌نحوی که، با قراردادن در (۵)، اتحادهای زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) &= 0 \end{aligned}$$

گویند، مکعب مستطیل $(n+m)$ بعدی

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n; c_1, d_1, \ldots; c_m, d_m)$$

دستگاه (۵) y_1، ...، y_m را، همچون تابع‌های یك ارزشی از x_1، ...، x_n مشخص می‌کند، به‌شرطی که برای هر نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$ درمکعب مستطیل n بعدی

$$(a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n)$$

دستگاه معادله‌های (۵)، دارای یك و تنها یك دستگاه جواب‌های y_1، ...، y_m، متعلق به‌مکعب مستطیل m بعدی

$$(c_1, d_1; \ldots; c_m, d_m)$$

باشند.

درمسألهٔ وجود تابع ضمنی یك ارزشی، که با معادلهٔ (۱) یا (۴) مشخص شده بود، نقش اصلی، به عهدهٔ این خواست بود که، در نقطهٔ موردنظر ــ که درمعادله صدق می‌کند ــ مشتق F'_y، نسبت به‌متغیری که باید به‌عنوان تابع ضمنی تعریف شود، مساوی صفر نباشد، در مسألهٔ مربوط به‌وجود تابع‌های ضمنی یك ارزشی y_1، ...، y_m ــ که با دستگاه معادله‌های (۵) تعریف شده‌اند ــ نقش مشابه، به‌عهدهٔ ژاکوبین تابع‌های واقع درسمت چپ، نسبت به‌متغیرهای y_1، ...، y_m، گذاشته شده است:

$$J=\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \qquad (۶)$$

قضیهٔ IV. فرض می‌کنیم: ۱) همهٔ تابع‌های F_1، ...، F_m، در مکعب مستطیل $(n+m)$ بعدی

$$\mathcal{D}=[x_1^\circ-\Delta_1, x_1^\circ+\Delta_1; \ldots; x_n^\circ-\Delta_n, x_n^\circ+\Delta_n;$$
$$y_1^\circ-\Delta_1', y_1^\circ+\Delta_1'; \ldots; y_m^\circ-\Delta_m', y_m'+\Delta_m']$$

به‌مرکز نقطهٔ $(y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$، معین و پیوسته باشند؛

۲) مشتق‌های این تابع‌ها، نسبت به همهٔ آوندها، در $\mathcal{D}$ وجود داشته و پیوسته باشند؛

۳) نقطهٔ $(y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ)$، در دستگاه (۵) صدق کند؛

۴) ژاکوبین J [(۶) را ببینید]، در این نقطه، مخالف صفر باشد.

آن‌گاه

a) در یک همسایگی نقطهٔ $(y_1^\circ, \ldots, y_m^\circ)$ دستگاه معادله‌های (۵)، y_1، ...، y_m را، به‌عنوان تابع‌های یک ارزشی از x_1، ...، x_n، مشخص می‌کنند:

$$y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, y_{m-1}=f_{m-1}(x_1,\ldots,x_n),$$
$$y_m=f_m(x_1,\ldots,x_n)$$

b) به‌ازای $x_1=x_1^\circ$، ...، $x_n=x_n^\circ$، این تابع‌ها، به‌ترتیب، مقدارهای y_1°، ...، y_{m-1}°، y_m° را اختیار می‌کنند:

$$f_1(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)=y_1^\circ, \ldots, f_{m-1}(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)=y_{m-1}^\circ,$$
$$f_m(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)=y_m^\circ$$

c) تابع‌های f_1، ...، f_m پیوسته‌اند و بالاخره

d) دارای مشتق‌های نسبی پیوسته، نسبت به‌همهٔ آوندها، هستند.

اثبات. با روش استقرای ریاضی عمل می‌کنیم. بـه ازای $m=1$، وقتی‌که دستگاه به یك معادله تبدیل می‌شود، قضیه درست است [این، همان، قضیهٔ III است]. حالا، فرض می‌کنیم که قضیه، برای حالتی که دستگاه از $(m-1)$ معادلـه تشکیل شده است وصحبت برسر تعریف $(m-1)$ تـابع ضمنی است، درست باشد، و آن را، برای دستگاه m معادله، ثابت می‌کنیم.

از آن‌جاکه، ژاکوبین J درنقطهٔ $(y_1^\circ, \dots, y_m^\circ)$ مخالف صفر است، دست‌کم یکی ازعنصرهای ستون‌آخر، دراین نقطه، مخالف صفراست. مثلاً، فرض می‌کنیم:

$$\frac{\partial F_m(x_1^\circ, \dots, y_m^\circ)}{\partial y_m} \neq 0$$

درچنین حالتی، با توجه به‌قضیهٔ III، معادلهٔ آخردستگاه (۵)، دریك همسایگی $\mathcal{D}^*$ از نقطهٔ $(x_1^\circ, \dots, y_m^\circ)$، y_m را به‌عنوان تابع یك ارزشی از بقیهٔ‌آوندها، مشخص می‌کند:

$$y_m = \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) \qquad (۷)$$

به‌نحوی‌که، این اتحاد را (نسبت به‌این‌آوندها) داریم:

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})) = 0 \qquad (۸)$$

این تابع φ، پیوسته و دارای مشتق‌های نسبی پیوسته است. علاوه بر آن

$$\varphi(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ, y_1^\circ, \dots, y_{m-1}^\circ) = y_m^\circ \qquad (۹)$$

یادآوری این مطلب مهم است‌که، مادام که خود را، به همسایگی $\mathcal{D}^*$ محدود کنیم، معادلهٔ

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

با معادلهٔ (۷) هم‌ارز است. درمحـدودهٔ $\mathcal{D}^*$، تنها یـك دستگاه از مقدارهای x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_m، درآن صدق می‌کند.

آخرین معادلهٔ‌دستگاه (۵) را، با این معادلهٔ (۷) عوض می‌کنیم و دربقیهٔ معادله‌های دستگاه(۵)، φ را، به‌جای y_m می‌گذاریم، دستگاه‌جدیدی‌از $(m-1)$معادله با $(n+m-1)$ متغیر به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}) = 0\\
&\Phi_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{m-1}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

که در آن، برای سهولت کار فرض شده است (به‌ازای $J = 1, 2, \dots, m-1$):

$$\Phi_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}) =$$
$$= F_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, y_{m-1})) \qquad (11)$$

اگر از محدودهٔ همسایگی $\mathcal{D}^*$ خارج نشویم، دستگاه (۵)، هم‌ارز دستگاه (۱۰) به‌انضمام معادلهٔ (۷) می‌شود. به‌این دلیل، اگر بتوانیم ثابت کنیم که دستگاه (۱۰)، در همسایگی به‌قدر کافی کوچک d^* نقطهٔ $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$، $m-1$ متغیر $y_1, \dots, y_{m-1}$ را، به عنوان تابع‌های یك ارزشی از $x_1, \dots, x_n$، مشخص می‌کند:

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_{m-1} = f_{m-1}(x_1, \dots, x_n) \qquad (12)$$

آن‌وقت. بنا به (۷)، متغیر y_m هم، به‌عنوان تابع یك ارزشی

$$y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= \varphi(x_1, \dots, x_n; f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{m-1}(x_1, \dots, x_n)) \qquad (12\,a)$$

مشخص می‌شود و، در نتیجه، حکم a)، به‌طور کامل، درست است*.

به‌دستگاه (۱۰) می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که در همسایگی نقطهٔ $(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)$، شرط‌های نظیر ۱)، ۲)، ۳)، ۴)، برای آن، برقرار است. درستی دوتای اولی، مستقیماً از ویژگی‌های تابع‌های F_j و φ، بـا توجه به (۱۱)، نتیجه می‌شود. شرط ۳) هم، با توجه به (۱۱) و (۹) (به‌ازای $J = 1, \dots, m-1$) به‌دست می‌آید:

$$\Phi_j(y_1^0, \dots, y_{m-1}^0) = F_j(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0, \varphi(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0)) =$$
$$= F_j(x_1^0, \dots, y_{m-1}^0, y_m^0) = 0$$

فقط می‌ماند بررسی ژاکوبین J^* (مشابه J):

---

*) روشن می‌کنیم کـه مکعب مستطیل $(n+m-1)$ بعدی (بـاز) d^* آن قدر کوچك است که بازه‌های آن، در درون بـازه‌های مکعـب مستطیل $(n+m)$ بعدی $\mathcal{D}^*$ قرار مـی‌گیرد. آن همسایگی نقطهٔ $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ کـه از آن، در حکم a) یـاد می‌شود، به‌وسیلهٔ تمامی بازه‌های مربوط به d^*، به‌انضمام بازهٔ آخری مربوط به $\mathcal{D}^*$، معین می‌شود.

$$J^*=\frac{D(\Phi_1,\ldots,\Phi_{m-1})}{D(y_1,\ldots,y_{m-1})}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

و اطمینان از این‌که، ژاکوبین، در نقطهٔ $(x_1^\circ,\ldots,y_{m-1}^\circ)$ مخالف صفراست. برای این منظور، دترمینان J را، به‌این ترتیب، تغییرشکل می‌دهیم: عنصرهای ستون mام آن را، به‌ترتیب، در $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}$ ضرب می‌کنیم و به‌عنصرهای $(m-1)$ ستون اول آن می‌افزاییم:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

اگر دراین‌جا، درنظر بگیریم $y_m=\varphi(x_1,\ldots,y_{m-1})$، آن‌وقت، همهٔ عنصرهای آن، به جز عنصرهای موجود درسطر آخر و ستون آخر، عبارت می‌شوند از مشتق‌های نسبی تابع‌های Φ_j (نسبت به $y_1,\ldots,y_{m-1}$). به خصوص، باتوجه به (۱۱)، مشتق‌گیری از Φ_j، به عنوان یك‌تابع مرکب نسبت به $y_1,\ldots,y_{m-1}$ (با استفاده از قاعدهٔ شمارهٔ **۱۸۱**) به‌ازای $J=1,2,\ldots,m-1$، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_1}=\frac{\partial F_j}{\partial y_1}+\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial y_{m-1}}=\frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}$$

از طرف دیگر، اگر از اتحاد (۸)*، نسبت‌به y_1، ...، y_{m-1} مشتق بگیریم، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}=0,\ldots,\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}=0$$

به‌این ترتیب، همهٔ عنصرهای سطر آخر (به‌جز آخرین آن‌ها)، برابر صفر می‌شوند و بالاخره

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

اگر این دترمینان را، برحسب عنصرهای سطر آخر، باز کنیم، به این نتیجه می‌رسیم:

$$J=J^*.\frac{\partial F_m}{\partial y_m}$$

سرانجام، فرض می‌کنیم $x_1=x_1^0$، ...، $y_{m-1}=y_{m-1}^0$؛ در این صورت $y_m=\varphi(x_1,\ldots,y_{m-1})$، بنابر (۹)، به y_m^0 تبدیل می‌شود. چون در این حالت، باتوجه به‌شرط ۴)، J مخالف صفر است، بنابراین، J^* هم نمی‌تواند برابر صفر شود؛ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

قضیه را، برای دستگاه (۱۰)، شامل $(m-1)$ معادله، درست فرض کردیم. در نتیجه، این دستگاه، در همسایگی نقطهٔ $(x_1^0,\ldots,y_{m-1}^0)$، تابع‌های یک‌ارزشی (۱۲) را مشخص می‌کند، که پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته هستند. علاوه بر آن، این تابع‌ها، با تقاضای b) هم‌سازگارند:

$$f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)=y_1^0,\ldots,f_{m-1}(x_1^0,\ldots,x_n^0)=y_{m-1}^0 \qquad (۱۳)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که تابع mام (۱۲a) نیز پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته است و،

---

* اگر تابع (مرکب) واقع در سمت چپ (۸)، متحد باصفر باشد، در این‌صورت، مشتق آن‌هم، نسبت به‌هر آوند دلخواه، برابر صفر می‌شود.

بالاخره، با درنظرگرفتن (۱۳) و (۹):

$$f_m(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) = \varphi(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ; f_1(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ), \dots, f_{m-1}(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)) =$$
$$= \varphi(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ; y_1^\circ, \dots, y_{m+1}^\circ) = y_m^\circ$$

قضیه، ثابت شد.

یادداشت. توجه خواننده‌را، به‌خصلت موضعی همهٔ قضیه‌های مربوط به‌وجود تابع‌های ضمنی، جلب می‌کنیم: همه‌جا صحبت از یك همسایگی نقطهٔ مورد نظر است. ولی، درهمین حدهم، این قضیه‌ها مفیدند؛ مثلاً، خواننده در فصل هفتم خواهد دید که، برای مطالعهٔ ویژگی‌های شکل‌های هندسی در نقطهٔ مفروض، کاملاً کافی است که به همسایگی مستقیم آن مراجعه شود.

۲۰۹. محاسبهٔ مشتق تابع‌های ضمنی. در جریان بحث مربوط به‌وجود تابع ضمنی، درحالت کلی، تصوری‌هم از خود روش محاسبهٔ مشتق‌های (مرتبهٔ اول) تابع ضمنی، به‌دست آوردیم؛ ولی دربارهٔ مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر، هیچ صحبتی نشد. حالا، به خصوص، به همین مسألهٔ مهم می‌پردازیم.

از ساده‌ترین حالت، یعنی وقتی که معادلهٔ (۱) مفروض باشد، آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم که در همسایگی نقطهٔ مورد بررسی، شرط‌های قضیهٔ II برقرار باشند؛ نقش اساسی، از این به بعد، به عهدهٔ $F'_y \neq 0$ است.

راه ساده‌ای، برای محاسبهٔ مشتق y'_x (اگر وجود آن، از قبل، معلوم باشد)، نشان می‌دهیم. می‌دانیم، اگر تابع ضمنی $y = f(x)$ را، در معادلهٔ (۱) بگذاریم، آن‌گاه، تساوی به اتحاد تبدیل می‌شود [۲۰۵، (۲) را ببینید]. بنابراین، اگر y را، درست همین تابع نسبت به x، درنظر بگیریم، سمت چپ برابری (۱)، $F(x, y)$، تابعی مرکب از xمی‌شود که به‌طور اتحادی، برابر صفر است. آن‌وقت، مشتق آن‌هم، نسبت به x، صفر می‌شود. اگر از این تابع، بنابه قاعدهٔ شمارهٔ ۱۸۱، مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:*

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0 \qquad (۱۴)$$

و از آن‌جا (چون $F'_y \neq 0$):

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (۱۵)$$

به رابطه‌ای رسیدیم که قبلا هم داشتیم [۲۰۶، (۳) را ببینید].

*) این نوع استدلال را، قبلاً هم داشته‌ایم. پاورقی صفحهٔ ۵۷۵ را ببینید.

حالا می‌توانیم جلوتر برویم. اگر تابع $F(x, y)$، دارای مشتق مرتبهٔ دوم پیوسته باشد، آن‌وقت، از عبارت موجود در سمت راست رابطهٔ (۱۵)، می‌توان نسبت به x، مشتق گرفت. در نتیجه، مشتق از y'_x هم وجود دارد، یعنی مشتق دوم y''_{x^2} از تابع ضمنی y. با انجام مشتق‌گیری و، هربار، قرار دادن به‌جای y'_x از رابطهٔ (۱۵)، نتیجه می‌شود:

$$y''_{x^2} = \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y}{F'^2_y} =$$

$$= \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x \cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}$$

از این‌جا دیده می‌شود که، مشتق دوم، تابعی است پیوسته نسبت به x.

اگر تابع $F(x, y)$، دارای مشتق مرتبهٔ سوم پیوسته باشد، در آن صورت، معلوم است که مشتق‌سوم‌ازتابع ضمنی، یعنی y'''_{x^3} هم وجود دارد. عبارت آن را می‌توان، مستقیماً، ازمشتق‌عبارت y''_{x^2} به‌دست‌آورد وغیره. با روش استقرای ریاضی، به‌سادگی، ثابت‌می‌شود که: وجود مشتق‌های پیوستهٔ تابع $F(x, y)$ تا مرتبهٔ kام $(k > 1)$، وجود مشتق (پیوستهٔ) مرتبهٔ kام از تابع ضمنی را، تامین می‌کند.

به‌این ترتیب، بعد از آن‌که وجود مشتق‌های متوالی از تابع ضمنی معلوم‌شد، می‌توان محاسبهٔ آن‌ها را، به‌طورساده، ازراه مشتق‌گیری پشت سرهم اتحاد (۱۴)، و با درنظرگرفتن این‌که y تابعی از x است، انجام داد. مثلا، ازنخستین مشتق‌گیری این اتحاد، نتیجه می‌شود:

$$F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x + (F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot y'_x + F'_y \cdot y''_{x^2} = 0 \qquad (۱۶)$$

از آن‌جا (و باتوجه به‌این‌که $F'_y \neq 0$):

$$y''_{x^2} = \frac{F''_{x^2} + 2F''_{xy} \cdot y'_x + F''_{y^2} \cdot y'^2_x}{F'_y}$$

که اگر به جای y'_x، مقدارش را از (۱۵) قرار دهیم، به‌عبارتی که قبلاً برای y''_{x^2} پیدا کرده بودیم، می‌رسیم و غیره.

درحالت معادلهٔ (۴) هم، که با تعداد زیادتری از متغیرها سروکار داریم، می‌توان به‌طریق مشابهی عمل کرد. دراین‌جا، فرض می‌کنیم که شرط‌های قضیهٔ III برقرار باشند. اگر y را، تابعی ضمنی بگیریم که با معادلهٔ (۴) معین می‌شود، آن‌گاه (۴) به اتحاد تبدیل می‌شود. با تثبیت مقدارهای x_2، ...، x_n و با درنظرگرفتن y به‌عنوان تابعی از x_1، ازاین اتحاد، نسبت به x_1، مشتق می‌گیریم:

$$F'_{x_1}+F'_y\cdot y'_{x_1}=0 \Rightarrow y'_{x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y}$$

و به‌همین ترتیب، نتیجه می‌شود:

$$y'_{x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_y},\ \ldots,\ y'_{x_n}=-\frac{F'_{x_n}}{F'_y}$$

اگر همهٔ مشتق‌های مرتبه‌های اول، دوم،... لازم باشند، ساده‌تر است که dy، d^2y،... را حساب کنیم. با دیفرانسیل گیری از اتحاد، به‌طور کامل، یعنی با صفر قراردادن دیفرانسیل سمت چپ آن [و ضمناً، با استفاده از تغییرناپذیری شکل دیفرانسیل اول، **۱۸۵**]، به دست می‌آید:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_2+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

به‌نحوی که

$$dy=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}dx_1-\cdots-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}dx_n$$

در عین‌حال

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

با توجه به دلخواه بودن dx_1، ...، dx_n، روشن است که

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},\ \ldots,\ \frac{\partial y}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

همان‌طور که در بالاهم، به‌دست آورده بودیم.

اگر یک‌بار دیگر دیفرانسیل بگیریم، داریم:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}dx_1+\cdots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n}dx_n+\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial y}dy\right]dx_1+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0$$

و d^2y را پیدا می‌کنیم، که ما را به‌عبارت‌هایی برای

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \ldots$$

وغیره می‌رساند. می‌بینیم که در همهٔ این‌ها، نقش اساسی به‌عهدهٔ این شرط است که

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

حالا، به‌بررسی دستگاه معادله‌های (۵) می‌پردازیم. فرض می‌کنیم درهمسایگی نقطهٔ مفروض، شرط‌های قضیهٔ IV برقرار باشند. دوباره، توجه را به‌نقشی که $J \neq 0$ به‌عهده‌دارد، معطوف می‌کنیم.

می‌دانیم که تابع‌های ضمنی y_1، ...، y_m، دارای مشتق‌های نسبی، نسبت به x_1، ...، x_n هستند. خود محاسبهٔ آن‌ها، منجر به‌مشتق‌گیری از اتحادهایی می‌شود که از (۵) ــ به‌شرطی که y_1، ...، y_m به‌عنوان تابع‌های ضمنی نامبرده درنظر گرفته‌شوند ــ به‌دست می‌آیند. مثلاً از مشتق‌گیری نسبت به x، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

و این، یك دستگاه معادله‌های خطی، نسبت به مجهول‌های $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}$، ...، $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}$، بادترمینان مخالف صفر

$$J = \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}$$

می‌باشد از آن‌جا

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, x_1)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}$$

عبارت‌های مشابهی هم، می‌توان، برای مشتق‌های y_1، ...، y_m، نسبت به x_1، ...، x_n به‌دست آورد.

اگر تابع‌های F_1، ...، F_m، دارای مشتق‌های نسبی مرتبهٔ دوم پیوسته باشند، آن‌گاه، سمت راست همهٔ رابطه‌ها، دارای مشتق‌های (پیوسته)، نسبت به همهٔ آوندها، خواهند بود و، درنتیجه، مشتق‌های (پیوسته) دوم، از تابع‌های ضمنی، وجود دارند. به‌طور کلی (و به‌سادگی قابل اثبات با روش استقرای ریاضی)، وجود مشتق‌های پیوسته تا مرتبه k ام از تابع‌های F_1، ...، F_m، به‌معنای وجود همهٔ مشتق‌های مرتبهٔ k ام برای تابع‌های ضمنی است.

محاسبه مشتق‌ها از تابع‌های ضمنی، درحالت کلی هم، با مشتق‌گیری از اتحاد (۵) نسبت به این یا آن متغیر، یا دیفرانسیل‌گیری به صورت کلی، انجام می‌گیرد. دستگاه معادله‌های خطی حاصل برای تعیین مشتق‌ها یا دیفرانسیل‌ها با دترمینان خود، همواره دارای ژاکوبین J مخالف صفر است. این ملاحظه‌ها، ضمن مثال‌ها، بیشتر روشن می‌شوند.

۲۱۰. مثال‌ها. ۱) فرض کنیم y و x، با معادله‌های زیر، به هم مربوط باشند:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

با مشتق‌گیری مرتب، نسبت به x (ضمناً، y را تابعی از x می‌گیریم)، داریم:

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2} \quad \text{یا} \quad x+yy'=xy'-y$$

و سپس

$$1+y'^2+yy''=xy''$$

و غیره. از معادلهٔ اول داریم:

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

از دومی (با توجه به مقداری که برای y' به‌دست آوردیم):

$$y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$$

و غیره.

۲) معادلهٔ زیر داده شده است:

$$F(x, y)=x^2+y^2-3axy=0$$

اگر y را تابعی ضمنی از x بگیریم. اکسترمم‌های آن را پیدا کنید.

در این‌جا داریم:

$$F'_x = ۳(x^۲ - ay),\ F'_y = ۳(y^۲ - ax)$$

با توجه به (۱۵)، برای این‌که $y'_x = ۰$ برقرار باشد، باید داشته باشیم $F'_x = ۰$. با حل توأم معادله‌های $F = ۰$ و $F'_x = ۰$، در واقع، مقدارهای نظیر x و y، به‌دست می‌آید:

$$x = ۰,\ y = ۰,\ x = a\sqrt[۳]{۲},\ y = a\sqrt[۳]{۴}$$

در نقطهٔ اول، F'_y هم برابر صفر می‌شود، به‌نحوی که ما نمی‌توانیم نظر بدهیم که، در همسایگی آن، معادلهٔ مفروض، y را به عنوان تابع یک‌ارزشی از x مشخص می‌کند یا نه. به‌این مناسبت، نقطهٔ $(۰, ۰)$ را کنار می‌گذاریم.

در نقطهٔ دوم، داریم: $F'_y = ۳a^۲\sqrt[۳]{۲} > ۰$، و می‌توان قضیهٔ II را در مورد آن، به‌کار برد. برای این‌که از وجود اکسترمم، اطمینان حاصل کنیم، $y''_{x^۲}$ را به‌ازای $x = a\sqrt[۳]{۲}$، حساب می‌کنیم. ساده‌تر از همه، این است که از (۱۶) آغاز کنیم. آن‌جا، با فرض $y'_x = ۰$ داریم:*

$$y''_{x^۲} = -\frac{F''_{x^۲}}{F'_y}$$

چون به‌ازای $x = a\sqrt[۳]{۲}$ داریم: $F''_{x^۲} = ۶x > ۰$، بنابراین $y''_{x^۲} < ۰$ و ما کزیمم وجود دارد.

۳) فرض می‌کنیم، تابع ضمنی z از x و y، با معادلهٔ زیر مشخص شده باشد:

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

به ترتیب داریم:

$$\frac{xdx}{a^۲} + \frac{ydy}{b^۲} + \frac{zdz}{c^۲} = ۰,\ dz = -\frac{c^۲x}{a^۲z}dx - \frac{c^۲y}{b^۲z}dy,$$

به‌نحوی که

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^۲x}{a^۲z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^۲y}{b^۲z}$$

---

*) این، یک عبارت کلی، برای $y''_{x^۲}$ نیست، و تنها به‌درد نقطهٔ مورد علاقهٔ ما، یعنی $(a\sqrt[۳]{۲}, a\sqrt[۳]{۴})$ می‌خورد.

و سپس

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{z d^2z}{c^2}=0$$

از آن‌جا (اگر از عبارتی که برای dz به‌دست آوردیم، استفاده کنیم):

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),\ \frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right),\ \ldots$$

۴) فرض کنیم، z به عنوان تابعی از x و y، به وسیلهٔ معادلهٔ زیر، تعریف شده باشد:

$$z=x+y.\varphi(z)$$

با فرض $1-y.\varphi'(z)\neq 0$، ثابت کنید:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z).\frac{\partial z}{\partial x}$$

داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y.\varphi'(z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y.\varphi'(z)}$$

و از آن جا، رابطهٔ مطلوب، به دست می‌آید.

۵) فرض می‌کنیم، به وسیلهٔ معادلهٔ

$$y=x.\varphi(z)+\psi(z)$$

متغیر z، به‌عنوان تابع ضمنی از x و y، تعریف شده باشد. با فرض $x.\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$، ثابت کنید، این تابع، در معادلهٔ دیفرانسیلی زیر، صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

یا

$$r\cdot q^{۲}-۲pq\cdot s+t\cdot p^{۲}=۰$$

که‌در آن، برای اختصار، فرض شده است:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}=r,\ \frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=t$$

با مشتق‌گیری مرتب، نسبت به x و نسبت به y، به دست می‌آید:

$$\varphi(z)+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot p=۰\quad\text{و}\quad[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot q=۱$$

و سپس

$$\begin{array}{l|l}
۲\varphi'(z)\cdot p+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot p^{۲}+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot r=۰ & q^{۲}\\
\varphi'(z)\cdot q+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot pq+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot s=۰ & -۲pq\\
[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot q^{۲}+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot t=۰ & p^{۲}
\end{array}$$

با جمع سه معادلهٔ اخیر، که قبلا، به ترتیب، در $q^{۲}$، $-۲pq$، $p^{۲}$ ضرب شده‌اند، به رابطهٔ مورد نظر، می‌رسیم.

۶) دستگاه

$$x+y+z+u=a,\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+u^{۲}=b^{۲},\ x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}+u^{۳}=c^{۳}$$

را، در نظر می‌گیریم، که y و z و u را، به عنوان تابع‌هایی از x، معین می‌کنند. داریم:

$$۱+y'+z'+u'=۰,\ x+yy'+zz'+uu'=۰\quad\text{و}$$

$$x^{۲}+y^{۲}y'+z^{۲}z'+u^{۲}u'=۰$$

اگر دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱\\ y & z & u\\ y^{۲} & z^{۲} & u^{۲}\end{vmatrix}=(z-y)(u-y)(u-z)$$

را مخالف صفر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y'=-\frac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)},\ldots$$

۷) فرض کنیم، متغیرهای x و y و z، با متغیرهای r و θ و φ، با رابطه‌های زیر، مربوط باشند:

$$x=r\cdot\cos\theta\cos\varphi\,,\quad y=r\cdot\sin\theta\cos\varphi\,,\quad z=r\cdot\sin\varphi$$

که در آن، $0<r<+\infty$، $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$، $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. ژاکوبین

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\varphi\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=r^2\cos\varphi>0$$

این رابطه‌ها، r و θ و φ را، به‌عنوان تابع‌هایی از x و y و z تعریف می‌کنند. برای محاسبهٔ مشتق‌های این تابع‌ها، از این رابطه‌ها، دیفرانسیل کامل می‌گیریم.

$$\cos\theta\cos\varphi dr-r\cdot\sin\theta\cos\varphi d\theta-r\cdot\cos\theta\sin\varphi d\varphi=dx$$

$$\sin\theta\cos\varphi dr+r\cdot\cos\theta\cos\varphi d\theta-r\cdot\sin\theta\sin\varphi d\varphi=dy$$

$$\sin\varphi dr+r\cdot\cos\varphi d\varphi=dz$$

از این‌جا، dr، $d\theta$ و $d\varphi$ را پیدا می‌کنیم:

$$dr=\frac{r^2\cdot\cos\theta\cos^2\varphi}{J}dx+\frac{r^2\cdot\sin\theta\cos^2\varphi}{J}dy+\frac{r^2\cdot\sin\varphi\cos\varphi}{J}dz,$$

$$d\theta=-\frac{r\cdot\sin\theta}{J}dx+\frac{r\cdot\cos\theta}{J}dy,$$

$$d\varphi=-\frac{r\cdot\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dx-\frac{r\cdot\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dy+\frac{r\cdot\cos^2\varphi}{J}dz$$

و ازهمین رابطه‌ها، می‌توان مشتق‌های مورد نظر را حساب کرد (به‌شرطی که مقدار J را، که قبلاً محاسبه کردیم، در نظر داشته باشیم):

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta\cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial z}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r\cdot\cos\varphi},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r\cdot\cos\varphi},\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\sin\theta\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\cos\varphi}{r}$$

معادله‌های فرض مساله را، می‌توان به‌سادگی، نسبت به r و θ و φ، حل کرد:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

به‌کمك این رابطه‌ها، می‌توان همهٔ مشتق‌ها را محاسبه کرد، وآن چه راکه پیدا کرده‌ایم، مورد آزمایش قرارداد.

۸) به‌عنوان آخرین مثال، درمشتق‌گیری تابع‌های ضمنی، بازهم، یك رابطه پیدا می‌کنیم، که دوباره‌تاکیدی برشباهت بین ژاکوبین دستگاه تابع‌ها ومشتق یك تابع است.

دستگاه n معادله با $2n$ متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

با فرض این‌که ژاکوبین

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

مخالف‌صفر باشد، y_1، y_2، ...، y_n را، به‌عنوان تابع‌هایی از x_1، x_2، ...، x_n درنظرمی‌گیریم که با این دستگاه معادله‌ها، تعریف شده‌اند و، در نتیجه، این معادله‌ها را، به‌اتحاد، تبدیل می‌کنند. با مشتق‌گیری ازاین اتحادها، نسبت به‌هرکدام از x_iها، نتیجه را می‌توانیم، به‌این صورت بنویسیم:

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\dots+\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$$

$$(i, j=1, 2, \dots, n)$$

دترمینانی که ازسمت چپ این برابری‌ها تشکیل می‌شود، عبارت است از

$$(-1)^n\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

و دترمینان حاصل ازقسمت‌های سمت راست این برابری‌ها، ازضرب دترمینان‌های

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}\ \text{و}\ \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

به‌دست می‌آید [۲۰۳، (۳) را ببینید]. از این‌جا، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}$$

که نظیر رابطهٔ (۱۵) است.

اگرمعادله‌ها، نسبت به x_1، x_2، ...، x_n، حل شده باشند:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

درحالت مورد بررسی، با شرط $F_i = \varphi_i - x_i$، وضع مناسبی پیش می‌آید. چون دراین جا داریم: ۰ یا ۱ $= \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$، خواه $i = j$ یا $i \neq j$ باشد، بنابراین، صورت کسر به

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

منجرمی‌شود و رابطه، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}$$

وما با این نتیجه، آشنا هستیم [۲۰۳، (۴)].

§۳. برخی کاربردهای نظریهٔ تابع‌های ضمنی

۲۱۱. اکسترمم‌های نسبی. می‌خواهیم مسالهٔ مربوط به‌اکسترمم تابع $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ از $n+m$ متغیر را بررسی کنیم، به‌شرطی که این متغیرها، به‌وسیلهٔ m معادله زیر (که‌آن‌ها را معادله‌های رابط می‌نامیم) به‌هم مربوط شده باشند:

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

ابتدا، مفهوم اکسترمم نسبی را، دقیق‌تر، بیان می‌کنیم و، سپس، روش جست وجوی آن‌را شرح می‌دهیم.

گویند، درنقطهٔ $M_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$، که در معادله‌های رابط صدق می‌کند، تابع $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$، دارای ماکزیمم (می‌نیمم) نسبی است، اگرنابرابری

$$f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$
$$(\geqslant)$$

دریك همسایگی M_0، برای همهٔ نقطه‌های $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ صادق در معادله‌های رابط، برقرار باشد.

فرض می‌کنیم که، هم f وهم تابع‌های Φ_i، درهمسایگی نقطهٔ موردنظر، دارای مشتق‌های نسبی پیوسته، نسبت به‌همهٔ آوندها، باشند. بالاخره، فرض می‌کنیم که درنقطهٔ M_0 دست‌کم یکی از دترمینان‌های مرتبهٔ mام، که از ماتریس مشتق‌های نسبی*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix} \tag{۲}$$

تشکیل شده‌اند، مخالف صفر باشد؛ مثلاً دترمینان

$$\frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix} \tag{۳}$$

دراین صورت، اگربه‌همسایگی به‌قدر کافی کوچك نقطهٔ M_0 اکتفا شود، بنابرقضیهٔ IV، دستگاه (۱)، با دستگاه زیر، هم‌ارزمی‌شود:

---

*) در این حالت گویند که ماتریس (در نقطهٔ M_0) دارای مرتبهٔ m است.

$$x_{n+1}=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ x_{n+m}=\varphi_m(x_1,\ldots,x_n) \qquad (۴)$$

که در آن، φ_1، ...، φ_m، تابع‌های ضمنی هستند که با دستگاه (۱) تعریف شده‌اند. به‌زبان دیگر، این شرط را که، مقدارمتغیرهای x_1، ...، x_n، x_{n+1}، ...، x_{n+m} در معادله‌های رابط (۱) صدق کنند، می‌توان با این‌شرط عوض کرد که: متغیرهای x_{n+1}، ...، x_{n+m}، تابع‌های (۴) از x_1، ...، x_n باشند. به این ترتیب، مسالهٔ اکسترمم نسبی، برای تابع $f(x_1,\ldots,x_{n+m})$ از $n+m$ متغیر، در نقطهٔ $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0,x_{n+1}^0,\ldots,x_{n+m}^0)$، منجر می‌شود به‌مسالهٔ اکسترمم عادی (مطلق)، برای تابع با n متغیر

$$f(x_1,\ldots,x_n,\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)) \qquad (۵)$$

در نقطهٔ $P_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$.

این ملاحظه‌ها، راه را برای پیداکردن نقطه‌ای که تابع $f(x_1,\ldots,x_{n+m})$ را به‌اکسترمم می‌رساند، بازمی‌کنند: اگر در واقع، بتوانیم معادله‌های رابط را، نسبت به‌متغیرهای x_{n+1}، ...، x_{n+m} حل کنیم وعبارت‌های صریح، برای تابع‌های (۴) را پیدا کنیم، آن‌وقت، کارمنجر به‌این می‌شود که اکسترمم مطلق را، برای تابع مرکب (۵) به‌دست آوریم. واقعیت این است که درمساله‌هایی هم که قبلاً حل کرده‌ایم [۲۰۰، ۲۰۱]، همین روش را به‌کار برده‌ایم، مثلاً، وقتی که می‌خواستیم حداقل مقدارمجموع $x+y+z+t$ را، با شرط $xyzt=c^4$ پیدا کنیم.

حالا، راه‌حل دیگری را می‌دهیم که بتوانیم نقطهٔ $M_0(x_1^0,\ldots,x_{n+m}^0)$ را، بدون این‌که به‌عبارت‌های صریح برای تابع‌های ضمنی (۴) دسترسی داشته باشیم، پیدا کنیم؛ اگرچه ازوجود چنین تابع‌هایی، دراین‌جا هم، استفاده خواهیم کرد.

به‌این‌ترتیب، فرض می‌کنیم که‌تابع $f(x_1,\ldots,x_{n+m})$ درنقطهٔ M_0 دارای‌اکسترمم نسبی یا ــ هم‌ارز آن ــ تابع مرکب (۵) درنقطهٔ P_0 دارای اکسترمم مطلق باشد. در این صورت، بنا به‌یادداشت I شمارهٔ ۱۹۶. در این نقطه، دیفرانسیل‌های آن، باید برابر صفر شوند و، ضمناً، نسبت به‌دیفرانسیل‌های متغیرهای مستقل dx_1، ...، dx_n، متحد با صفر باشند. با توجه به تغییرناپذیری شکل دیفرانسیل اول [۱۸۵]، می‌توان این شرط را چنین نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j=0 \qquad (۶)$$

که در آن، dx_{n+1}، ...، dx_{n+m}، دیفرانسیل‌های تابع‌های (۴) در نقطهٔ P_0 می‌باشند، و درعین‌حال، به عنوان مشتق‌های نسبی در نقطهٔ M_0، محاسبه شده‌اند، زیرا (بنابر قضیهٔ IV):

$$\varphi_1(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) = x_{n+1}^\circ, \dots, \varphi_m(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ) = x_{n+m}^\circ \qquad (۷)$$

البته، از (۶)، نمی‌توان، صفر شدن ضریب‌های دیفرانسیل‌ها را نتیجه گرفت، زیرا، همهٔ این دیفرانسیل‌ها، دلخواه نیستند. برای آن‌که، کار را به‌دیفرانسیل‌های دلخواه، یعنی به دیفرانسیل‌های dx_1، ...، dx_n متغیرهای مستقل، بکشانیم، کوشش می‌کنیم، در این جا، دیفرانسیل‌های dx_{n+1}، ...، dx_{n+m} متغیرهای غیرمستقل را حذف کنیم. این‌کار به‌سادگی عملی می‌شود، اگر از معادله‌های رابط (۱)، با در نظر گرفتن x_{n+1}،...، x_{n+m} به‌صورت (۴)، دیفرانسیل کامل بگیریم:*

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad (۸)$$

در این جا هم، مثل قبل، با توجه به (۷)، مشتق‌های نسبی در نقطهٔ M_0، محاسبه شده‌اند. چون، بنا به فرض، دترمینان (۳) در این نقطه، برابر صفر نیست، در نتیجه، می‌توان از این‌جا dx_{n+1}، ...، dx_{n+m} را، به‌طور خطی، برحسب dx_1، ...، dx_n بیان کرد. اگر این عبارت‌ها را در (۶) قرار دهیم، به‌یك برابری به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$A_1 dx + \dots + A_n dx_n = 0$$

که در آن، A_1، ...، A_n عبارتند از عبارت‌های گویائی نسبت به‌مشتق‌های نسبی Φ_j که در این جا، در نقطهٔ M_0 گرفته شده‌اند. چون، در این برابری، تنها با دیفرانسیل‌های dx_1، ...، dx_n متغیرهای مستقل سروکار داریم، بنابراین، در نقطهٔ M_0 خواهیم داشت:

$$A_1 = 0, \dots, A_n = 0$$

که‌همراه بامعادله‌های‌رابط، روی‌هم، $n+m$ معادله برای‌تعیین‌مجهول‌های x_1، ...، x_{n+m} به‌دست می‌آید.

البته، در این‌جا، تنها از شرط‌های لازم برای نقطهٔ اکسترمم $M_0(x_1^\circ, \dots, x_{n+m}^\circ)$ سخن گفتیم؛ ولی از همین شرط‌ها، می‌توان برای تعیین حداکثر (یا حداقل) مقدار تابع f با شرایط (۱)، استفاده کرد؛ و این به‌شرطی است که از قبل، و باتوجه به‌خصلت‌مسأله، برای ما روشن باشدکه، در داخل حوزهٔ مورد بررسی، باید نقطه‌ای وجود داشته باشدکه درآن‌جا، تابع به‌حداکثر (یا حداقل) مقدار خود می‌رسد.

---

*) درست‌تر بگوییم: ما ازآن اتحادهایی مشتق‌می‌گیریم که از معادله‌های (۱) با قرار دادن تابع‌های ضمنی (۴) به‌جای x_{n+1}، ...، x_{n+m}، به‌دست می‌آیند. درآینده هم، از این روش بیان، استفاده خواهیم کرد.

مثال‌ها را، کمی بعد، در **۲۱۴**، خواهید دید.

۲۱۲. روش ضریب‌های نامعین لاگرانژ. درطرح فوق، درواقع، تقارن بین‌متغیرها را به‌هم زدیم: بعضی از آن‌را، متغیرهای مستقل گرفتیم و بعضی دیگررا متغیرهای‌غیرمستقل، برخی از آن‌ها را حذف کردیم و برخی دیگر را نگه داشتیم. همین وضع، گاهی منجر به‌عمل‌های پیچیده‌ای می‌شود. لاگرانژ، روشی را پیشنهاد کرده‌است که، در آن، همهٔ‌متغیرها دارای یك نقش می‌باشند.

برابری‌های (۸) را، به‌ترتیب، در ضریب‌های («نامعین») λ_i $(i=1, 2, \dots, m)$ ضرب می‌کنیم و، سپس، نتیجه‌ها را، عضو به عضو، با (۶) جمع می‌کنیم. به این برابری می‌رسیم:

$$\sum_{j=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0 \qquad (۹)$$

که در آن، مثل قبل، dx_{n+1}، ...، dx_{n+m}، معرف دیفرانسیل تابع‌های ضمنی (۴) هستند (تا این جا، متغیرهای با حقوق نامساوی را حفظ کرده‌ایم)؛ مشتق‌ها، در نقطهٔ M_0، محاسبه شده‌اند.

حالا، مقدار ضریب‌های $\lambda_i=\lambda_i^0$ $(i=1, \dots, m)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب‌های دیفرانسیل‌های غیرمستقل dx_{n+1}، ...، dx_{n+m}، برابر صفر شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \qquad (۱۰)$$

$$(j=n+1, \dots, n+m)$$

این کار ممکن است، زیرا دترمینان (۳) دستگاه معادله‌های خطی، که برای تعیین λ_1، λ_2، ...، λ_m به‌دست آمده‌اند، مخالف صفر است. با این مقدارهایی که برای ضریب‌ها انتخاب کرده‌ایم، برابری (۹)، به‌این‌صورت، درمی‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0 \qquad (۹^*)$$

در این‌جا، دوباره، با دیفرانسیل‌های متغیرهای مستقل سروکارداریم و، بنابراین، ضریب‌های آن‌ها، باید برابر صفر باشند، یعنی به‌موازات (۱۰)، ضمناً، داشته باشیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \qquad (۱۰^*)$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

به‌این ترتیب، برای تعیین $n+m$ مجهول x_1، ...، x_{n+m} و m ضریب λ_1، ...، λ_m، $n+2m$ معادله داریم: m معادلهٔ رابط و $n+m$ معادلهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\cdot\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0$$

$$(j=1, 2, \dots, n+m)$$

[(۱۰) و (*۱۰) را ببینید].

معمولاً، برای این‌که نوشتن این معادله‌ها، ساده‌تر باشد، تابع کمکی زیر را وارد می‌کنند:

$$F=f+\lambda_1\Phi_1+\dots+\lambda_m\Phi_m$$

آن‌وقت، معادله‌های نامبرده را، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0 \qquad (j=1, 2, \dots, n+m) \qquad (11)$$

که، درعین‌حال، شرط‌های اکسترمم عادی، برای تابع F هم، به‌حساب می‌آیند و آن‌را، باید، تنها به عنوان روشی برای ساده‌تر نوشتن، درنظر گرفت.

روش لاگرانژ هم، منجر به شرط‌های لازم می‌شود و، می‌توان، همهٔ آن‌چه را که در آخر شمارهٔ قبل گفتیم، به‌آن، اضافه کرد.

یادداشت. دراین نظریه، نقش اصلی به‌عهدهٔ فرض مربوط به‌مرتبهٔ ماتریس (۲) است، که ما، سه‌بار از آن استفاده کردیم. برای حل مسأله به کمک یکی از این روش‌ها ــ برای این‌که مطمئن شویم که حتی یکی از نقطه‌هایی هم که تابع را به‌اکسترمم می‌رساند، فراموش نشده است ــ باید قبلاً معلوم کرد که فرض مذکور، عملاً در همهٔ نقطه‌های حوزهٔ مورد بررسی، صادق در معادله‌های رابط، برقرار است. موردهای ساده را، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲۱۳. شرط‌های کافی، برای اکسترمم نسبی. در این مورد، تنها به‌بعضی‌ملاحظه‌ها، اکتفامی کنیم. وجود و پیوستگی‌مشتق‌های‌دوم را، برای‌تابع‌های f و $\Phi_j(m)$ $(j=1, 2, \dots, m)$، مفروض می‌گیریم. حالا فرض می‌کنیم که نقطهٔ $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$، همراه باضریب‌های λ_1^0، ...، λ_m^0، در شرط‌های لازم (که در بالا مشخص کردیم)، صدق کنند.

مسألهٔ وجود اکسترمم (نسبی) در این نقطه، شبیه **۱۹۸**، بستگی به‌علامت تفاضل

$$\Delta = f(x_1, \dots, x_{n+m}) - f(x_1^\circ, \dots, x_{n+m}^\circ)$$

دارد، تنها با این قید اساسی که، نقطهٔ $(x_1, \dots, x_{n+m})$ هم، درمعادله‌های رابطهٔ (۱) یا ـ هم ارز آن ـ (۴) صدق کند. به سادگی دیده می‌شود، کـه در چنین نقطه‌هایی، می‌توان نموتابع f را، با نموتابع F (کـه در آن، همهٔ ضریب‌های λ_i را برابر λ_i° می‌گیریم)، عوض کرد:

$$\Delta = F(x_1, \dots, x_{n+m}) - F(x_1^\circ, \dots, x_{n+m}^\circ)$$

با توجه به‌این‌که، در نقطهٔ $M_\circ$، شرط‌های (۱۱) برقرارند ـ در این‌جا هم، بهتر است‌که تابع F را درنظر بگیریم ـ می‌توان این نمو را، با توجه به‌رابطهٔ تیلور، این‌طور نوشت [با ۱۹۸، (۸) مقایسه کنید]:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{jk}\Delta x_j \Delta x_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \alpha_{jk}\Delta x_j \Delta x_k\right\}$$

که در آن

$$\Delta x_j = x_j - x_j^\circ, \qquad A_{jk} = F''_{x_j x_k}(x_1^\circ, \dots, x_{n+m}^\circ)$$
$$(j,k = 1, 2, \dots, n+m)$$

و $\alpha_{jk} \to 0$، اگر $\Delta x_1 \to 0$، ...، $\Delta x_n \to 0$ (ضمناً، بقیهٔ نموهای Δx_{n+1}، ...، Δx_{n+m}، با توجه به‌پیوستگی تابع‌های (۴)، بی‌نهایت کوچك خواهند بود).

اگر همهٔ Δx_jها را، در این‌جا، به‌ترتیب، با دیفرانسیل‌های dx_j عوض کنیم، درمورد متغیرهای مستقل، هیچ چیزی را عوض نمی‌کند؛ در مورد متغیرهای غیرمستقل هم تنها کافی است، به‌خاطر این تعویض، بی‌نهایت کوچك‌هـای دیگر β_{jk} را به‌جای ضریب‌های α_{jk} بگذاریم:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{jk}dx_j dx_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \beta_{jk}dx_j dx_k\right\}$$

عبور به‌دیفرانسیل‌ها مفیداست، زیرا دیفرانسیل‌های متغیرهای مستقل وغیرمستقل، بادستگاه رابطه‌های خطی (۸)، به‌هم مربوط هستند. چون، بنا به‌فرض، دترمینان (۳)، در نقطهٔ $M_\circ$، مخالف صفر است، می‌توان، دیفرانسیل‌های غیرمستقل را، برحسب دیفرانسیل‌های مستقل، به‌طور خطی، بیان کرد. اگر مقدار آن‌ها را در Δ قـرار دهیم، به‌جای مجموع اول، شکل کوادراتیك نسبت به‌دیفرانسیل‌های dx_1، ...، dx_n به‌دست می‌آوریم.

و حالا، شبیه ۱۹۸ و ۱۹۹، می‌توان ثابت کرد که: اگر این شکل، معین و ضمناً مثبت

(منفی) باشد، آن‌گاه در نقطهٔ مورد آزمایش، ماکزیمم (می‌نیمم) نسبی خواهد بود، و اگر این شکل، نامعین باشد، اکسترمم نسبی وجود ندارد.

ضمناً، ارزش عملی این‌معیار، چندان نیست (یادداشت شماره ۲۰۰ را ببینید).

به‌مثال‌ها و مسأله‌ها بپردازیم.

۲۱۴. مثال‌ها و مسأله‌ها. ۱) می‌خواهیم اکسترمم تابع $f=x+y+z+t$ را، با شرط $\Phi=xyzt-c^4=0$، پیدا کنیم؛ حوزهٔ تغییر متغیرها، با نابرابری‌های $x>0$، $y>0$، $z>0$، $t>0$، مشخص شده است. ما قبلاً این مسأله را در ۲۰۰، ۴)، با بیرون‌آوردن t از شرط آخری، حل کردیم. حالا، اگر از این برابری، دیفرانسیل کامل بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}=0 \Rightarrow dt=-t\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}\right)$$

با حذف dt از رابطهٔ $df=dx+dy+dz+dt=0$، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)dx+\left(1-\frac{t}{y}\right)dy+\left(1-\frac{t}{z}\right)dz=0$$

که با توجه به‌دلخواه بودن dx، dy و dz، به‌سه تساوی زیر می‌رسیم:

$$1-\frac{t}{x}=0, \qquad 1-\frac{t}{y}=0, \qquad 1-\frac{t}{z}=0$$

به‌نحوی که $x=y=z=t=c$.

برای استفاده از روش لاگرانژ، درهمین‌مسأله، تابع کمکی زیر را وارد می‌کنیم*:

$$F=x+y+z+t+\lambda xyzt$$

و این شرط‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$F'_x=1+\lambda yzt=0, \ldots, F'_t=1+\lambda xyz=0$$

از آن‌جا

$$yzt=xzt=xyt=xzt \Rightarrow x=y=z=t=c$$

---

*) اگر نقش این تابع را به‌یاد بیاوریم، روشن می‌شود که جملهٔ ثابت را در Φ، بدون هیچ اشکالی، می‌توان حذف کرد.

برای این‌که از نتیجهٔ شمارهٔ پیش استفاده کنیم، به‌حساب می‌آوریم: $\lambda=-\frac{۱}{c^۳}$ و این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$F=x+y+z+t-\frac{xyzt}{c^۳}$$

دیفرانسیل دوم آن (در نقطهٔ $x=y=z=t=c$)، عبارت است از

$$d^۲F=-\frac{۲}{c}(dxdy+dxdz+dxdt+dydz+dydt+dzdt)$$

اگر از معادلهٔ رابط (باز هم در همان نقطه) دیفرانسیل بگیریم، داریم:

$$dx+dy+dz+dt=۰$$

اگر dt را از این‌جا، محاسبه و در رابطهٔ قبلی قرار دهیم، بالاخره، به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۲}{c}[dxdy+dxdz+dydz-(dx+dy+dz)^۲]=$$

$$=\frac{۱}{c}[(dx+dy+dz)^۲+dx^۲+dy^۲+dz^۲]$$

و چون این شکل، به‌روشنی معین و مثبت است، بنابراین در نقطهٔ مورد بررسی، می‌نیمم نسبی خواهد بود.

[لیکن، از این جا، نمی‌توان نتیجه گرفت که این می‌نیمم، کمترین مقدار تابع $f=x+y+z+t$ ـ برای رابطه‌ای که بین آوندهای آن وجود دارد ـ خواهد بود؛ با ۲۰۰، ۴) مقایسه کنید.]

۲) دوباره [با ۲۰۰، ۲) مقایسه کنید]، به‌تعیین حداقل و حداکثر مقدار تابع

$$u=a^۲x^۲+b^۲y^۲+c^۲z^۲-(ax^۲+by^۲+cz^۲)^۲$$

$$(a>b>c>۰)$$

می‌پردازیم، با توجه به‌رابطهٔ

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱$$

یعنی روی سطح کره‌ای که با این معادله، بیان شده است.*

برای این منظور، ابتدا با روش لاگرانژ، همهٔ اکسترمم‌های نسبی را پیدا می‌کنیم. تابع کمکی

$$F=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2)$$

منجر به‌این شرط می‌شود:

$$x[(a^2+\lambda)-2a(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$
$$y[(b^2+\lambda)-2b(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$
$$z[(c^2+\lambda)-2c(ax^2+by^2+cz^2)]=0$$

که به‌آن‌ها، باید معادله‌های رابط را هم اضافه کرد. از آن‌جا

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\pm 1\quad (u=0); \qquad (1)$$
$$x=0,\quad y=\pm 1,\quad z=0\quad (u=0); \qquad (2)$$
$$x=\pm 1,\quad y=0,\quad z=0\quad (u=0); \qquad (3)$$
$$x=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \left(u=\frac{1}{4}(b-c)^2\right); \qquad (4)$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=0,\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \left(u=\frac{1}{4}(a-c)^2\right); \qquad (5)$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad z=0\quad \left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right) \qquad (6)$$

با مقایسه مقدارهای u، به‌سادگی، جواب مسأله به‌دست‌می‌آید [با ۲۰۰، ۲) مقایسه کنید].

۳) به‌مسألهٔ مربوط به‌مناسب‌ترین مقطع سیم در شبکهٔ الکتریکی بـا اتصال موازی بپردازیم [۲۰۱، ۸)]. با حفظ نشانه‌گذاری‌هایی که در آن‌جا داشتیم، باید اکسترمم تابع

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n)=l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n$$

را، با شرط

---

*) با توجه به‌این‌که، این سطح، مجموعه‌ای بسته و کران‌دار است، وجود نقطه‌هایی بر آن، که تابع را به‌حداکثر وحداقل مقدار خود برساند، ازقضیهٔ ویرشتراس نتیجه می‌شود [یادداشت آخر شمارهٔ ۱۷۳ را ببینید].

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n)=\frac{\rho l_1 J_1}{q_1}+\frac{\rho l_2 J_2}{q_2}+\ldots+\frac{\rho l_n J_n}{q_n}=e$$

پیدا کنیم. ضمناً، لزومی ندارد که متغیرهای q_1، q_2، ...، q_n را، مثل قبل، با متغیرهای دیگری عوض کنیم، با روش‌های جدید، مسأله، به‌همین ترتیب، ساده‌تر حل می‌شود.

با دیفرانسیل گیری کامل از معادلهٔ $\Phi=0$، عبارت زیر را، برای dq_n به دست می‌آوریم:

$$dq_n=-\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left\{\frac{l_1 J_1}{q_1^2}dq_1+\ldots+\frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}dq_{n-1}\right\}$$

که با گذاشتن آن، در $df=l_1dq_1+\ldots+l_{n-1}dq_{n-1}+l_ndq_n=0$، به این نتیجه می‌رسیم:

$$\left(l_1-\frac{q_n^2}{J_n}.\frac{l_1J_1}{q_1^2}\right)dq_1+\ldots+\left(l_{n-1}-\frac{q_n^2}{J_n}.\frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right)dq_{n-1}=0$$

چون dq_1، ...، dq_{n-1} دلخواه هستند، همهٔ ضریب‌های آن‌ها باید برابر صفر شوند. از آن جا

$$\frac{q_1^2}{J_1}=\frac{q_2^2}{J_2}=\ldots=\frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}}=\frac{q_n^2}{J_n}=\lambda^2$$

و

$$q_1=\lambda\sqrt{J_1},\ q_2=\lambda\sqrt{J_2},\ \ldots,\ q_n=\lambda\sqrt{J_n} \qquad (12)$$

ضریب تناسب λ، به‌سادگی و از معادلهٔ رابط، معین می‌شود:

$$\lambda=\frac{\rho}{e}\sum_{i=1}^{n}l_i\sqrt{J_i}$$

اگر بخواهیم روش لاگرانژ را به‌کار بریم، تابع کمکی*

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n)=l_1q_1+\ldots+l_nq_n+\lambda^2\left(\frac{l_1J_1}{q_1}+\ldots+\frac{l_nJ_n}{q_n}\right)$$

را در نظر می‌گیریم و مشتق‌های آن‌را، برابر صفر قرار می‌دهیم:

---

*) برای راحتی «ضریب نامعین» را به‌صورت λ^2 می‌گیریم و ثابت ρ را، در آن، وارد می‌کنیم.

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=l_1-\frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial q_n}=l_n-\frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2}=0$$

که از آن‌جا، دوباره، (۱۲) به‌دست می‌آید، و غیره.

۴) به‌عنوان مثالی بغرنج‌تر، این مسأله را بررسی می‌کنیم: بیضوی $(a>b>c)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را، با صفحهٔ $lx+my+nz=0$ ـ که از مرکز بیضوی می‌گذرد ـ قطع کرده‌ایم. مطلوب است تعیین نیم محورهای بیضی حاصل‌ازمقطع. به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم مقدارهای اکسترمم تابع $r^2=x^2+y^2+z^2$ را پیدا کنیم، به‌شرطی که متغیرهای آن، از دو معادلهٔ رابط بالا، پیروی کنند.

اگر بخواهیم، در این‌جا، از روش حذف دیفرانسیل‌های غیرمستقل [۲۱۱] استفاده کنیم، دچار محاسبه‌های پیچیده‌ای می‌شویم. به همین مناسبت، متوسل به روش لاگرانژ می‌شویم.

برای آن‌که ثابت کنیم، مرتبهٔ ماتریس

$$\begin{pmatrix}\frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2}\\ l & m & n\end{pmatrix}$$

در همهٔ نقطه‌های فصل مشترک بیضوی با صفحه*، برابر است با ۲، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. از صفر شدن همهٔ دترمینان‌های مرتبهٔ ۲، نتیجه می‌شود که عنصرهای دو سطر بالا و پایین، متناسب‌اند. ولی، در این صورت، برابری $lx+my+nz=0$، منجر به $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ می‌شود که ممکن نیست.

با تشکیل تابع کمکی

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\mu(lx+my+nz)$$

مشتق‌های آن‌را، برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+\lambda.\frac{x}{a^2}+\mu l=0,\quad y+\lambda.\frac{y}{b^2}+\mu m=0,\quad z+\lambda.\frac{z}{c^2}+\mu n=0 \qquad (۱۳)$$

---

*) یادداشت شمارهٔ ۲۱۲ را ببینید.

با ضرب این‌رابطه‌ها، به‌ترتیب، در x و y و z وجمع آن‌ها (با توجه به‌معادله‌های‌رابط)، نتیجه می‌گیریم که $\lambda = -r^2$.

اگر، برای مشخص‌بودن وضع، فرض‌کنیم کـه هیچ کدام از عددهای l و m و n برابر صفر نیستند، آن‌گاه، از (۱۳) می‌توان دیدکه r، برابر با هیچ‌یك از عددهای a، b یا c نیست. در آن‌صورت، معادلهٔ (۱۳)، این‌طور نوشته می‌شود:

$$x = -\mu\frac{la^2}{a^2-r^2},\quad y = -\mu\frac{mb^2}{b^2-r^2},\quad z = -\mu\frac{nc^2}{c^2-r^2}$$

از این‌جا، به‌سادگی، μ و با آن، x و y و z پیدا می‌شود. ولی، می‌توان این معادله‌هارا، قبلاً، در l و m و n ضرب و سپس، آن‌ها را با هم جمع کرد و معادلهٔ زیر را به‌دست آورد:

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-r^2}=0$$

و از آن‌جا، مستقیماً، دو مقدار اکسترمم r^2 را، معین کرد.

چون، وجود مقدارهای اکسترمم، از پیش معلوم است، به‌این ترتیب، مسأله به‌طور کامل حل می‌شود.

۵) می‌خواهیم، حداکثر و حداقل مقدار شکل کوادراتیك

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)\equiv\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

را، با توجه به‌شرط زیر، پیدا کنیم:*

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\equiv x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1 \qquad (14)$$

تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)$$

باحذف x_1، x_2، ...، x_n، از شرط‌های

---

*) در این جا هم، می‌توان ملاحظه‌ای، شبیه آن‌چه در پاورقی مسألهٔ ۲) آوردیـم، یادآور شویم.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}\equiv(a_{11}-\lambda)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=0\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\equiv a_{21}\cdot x_1+(a_{22}-\lambda)\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n=0\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n}\equiv a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)\cdot x_n=0
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

به معادلهٔ درجهٔ n زیر، نسبت به λ، می‌رسیم:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n-1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix}=0\qquad(16)$$

اگر λ، یکی از ریشه‌ها باشد، آن‌گاه، مقدارهای x_1، x_2، ...، x_n، که همگی برابر صفر نباشند، می‌توانند در دستگاه معادله‌های خطی (۱۵) صدق کنند؛ با ضرب آن‌ها، در ضریب‌های مناسب می‌توان به‌برقراری شرط (۱۴) موفق شد. ولی به تعیین این مقدارها، نیازی نیست، زیرا به‌طوری که خواهیم دید، مسألهٔ دربارهٔ حداکثر و حداقل مقدارهای تابع f را، بدون آن‌ها هم، می‌توان حل کرد.

در واقع، با ضرب معادله‌های (۱۵)، به‌ترتیب، در x_1، x_2، ...، x_n، و جمع آن‌ها عضو به‌عضو، به برابری زیر می‌رسیم:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=0$$

و یا، با توجه به (۱۴):

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\lambda$$

به این ترتیب، اگر λ، در معادلهٔ (۱۶) صدق کند، آن‌گاه، مقدار تابع f، در نقطهٔ نظیر $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ هم، برابر است با λ.

به این نتیجهٔ جالب می‌رسیم که: حداکثر و حداقل مقدار تابع f، با توجه به شرط (۱۴)، همان بزرگترین و کوچکترین ریشهٔ (حقیقی)* معادلهٔ (۱۶) است.

---

*) ضمناً، می‌توان ثابت کرد که همهٔ ریشه‌های این معادله، حقیقی هستند.

۲۱۵. مفهوم استقلال تابع‌ها. این دستگاه تابع‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (۱۷)$$

که همراه با مشتق‌های نسبی خود، در یک حوزهٔ باز n بعدی $\mathcal{D}$، معین و پیوسته می باشند.

حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از آن‌ها، و مثلاً y_j، به‌طور یک ارزشی، از روی مجموعهٔ همهٔ مقدارهایی که، بقیهٔ تابع‌ها قبول می‌کنند، یعنی از روی مجموعهٔ مقدارهای

$$(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$$

معین شود. به‌زبان دقیق‌تر؛ اگر $\mathcal{E}_0$ مجموعهٔ نقطه‌های $(m-1)$ بعدی باشد که پاسخ‌گوی همهٔ انواع ممکن نقطه‌های $(x_1, \dots, x_n)$ در $\mathcal{D}$ باشد، در آن صورت گویند در $\mathcal{E}_0$، وابستگی تابعی

$$y_j = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m) \qquad (۱۸)$$

وجود دارد؛ ضمناً، اگر به‌جای همهٔ y_iها، مقدارشان را از تابع‌های (۱۷) قرار دهیم، این برابری، به یک اتحاد نسبت به xها در $\mathcal{D}$، تبدیل می‌شود.* درچنین حالتی می گویند، در حوزهٔ $\mathcal{D}$، تابع y_j وابسته است. ضمناً، برای این‌که امکان محاسبهٔ دیفرانسیلی وجود داشته باشد، این شرط را هم در تعریف وارد می کنیم که، تابع‌ها همراه با مشتق‌های نسبی خود، در یک حوزه باز $\mathcal{E}$ فضای $(m-1)$ بعدی شامل مجموعهٔ $\mathcal{E}_0$، معین و پیوسته باشد.

به‌خصوص، اگر یکی از تابع‌های (۱۷)، y_j، منجر به مقدار ثابت بشود، روشن‌است که این تابع، وابسته بـه دیگران خواهد بود: در این‌جا می‌توان، به‌طور ساده فرض کرد: $\varphi = \text{const}$. اگر یکی از تابع‌های y_1، y_2، ...، y_m وابسته به‌بقیه باشد، به‌طور کلی، این تابع‌ها را وابسته در حوزهٔ $\mathcal{D}$ می‌نامند.

مثال‌ها. ۱) اگر فرض شود:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \end{cases}$$

*) در واقع، xها، جزو آوندهای مستقیم تابع φ نیستند.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که در هر فضای n بعدی، اتحاد زیر برقرار است:

$$y_۲ = y_۱^۲ - ۲y_۳$$

۲) به‌همین ترتیب، برای تابع‌های

$$\begin{cases} y_۱ = x_۱x_۲ - x_۳ \\ y_۲ = x_۱x_۳ + x_۲ \\ y_۳ = (x_۱^۲+۱)(x_۲^۲+x_۳^۲) + (x_۱^۲-۱)x_۲x_۳ - x_۱(x_۲^۲-x_۳)^۲ \end{cases}$$

به‌طور اتحادی (درفضای سه بعدی) داریم:

$$y_۳ = y_۱^۲ - y_۱y_۲ + y_۲^۲$$

همهٔ این‌ها، تابع‌های وابسته (غیرمستقل) هستند.

اگر، نه درحوزهٔ $\mathcal{D}$ و نه درهیچ حوزهٔ جزئی واقع در آن، اتحادی به‌صورت (۱۸) وجود نداشته باشد، آن وقت، تابع‌های $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n را مستقل، در حوزهٔ $\mathcal{D}$، گویند.

برای این‌که بتوانیم به‌پرسش مربوط به استقلال تابع‌ها، پاسخ بدهیم، کار به‌بررسی به اصطلاح ماتریس ژاکوبی می‌رسد که ازمشتق‌های نسبی این تابع‌ها، نسبت به همهٔ متغیرهای مستقل، تشکیل شده است:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۱}{\partial x_۲} & \dots & \frac{\partial y_۱}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۲}{\partial x_۲} & \dots & \frac{\partial y_۲}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_m}{\partial x_۲} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

$n \geqslant m$ فرض می‌کنیم و، قبل از همه، این قضیه را می‌آوریم.

قضیهٔ I. اگر، دست‌کم یکی ازدترمینان‌های مرتبهٔ mام تشکیل‌شده از عنصرهای ماتریس (۱۹)، مخالف صفر در حوزهٔ $\mathcal{D}$ باشد، آن‌گاه در این حوزه، تابع‌های $y_۱$، $y_۲$، ...، y_m مستقل‌اند.

اثبات. فرض می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (۲۰)$$

اگر دترمینان دیگری، غیر ازاین دترمینان، مخالف صفر باشد، می‌توان با عوض‌کردن شماره‌گذاری متغیرها، مساله را به حالت (۲۰) کشانید.

قضیه را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، یکی از تابع‌ها، و مثلاً y_m، قابل بیان، برحسب بقیه باشد یعنی

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) \qquad (۲۱)$$

دست‌کم در یک بخش $\mathcal{D}_0$ از حوزهٔ $\mathcal{D}$.

ازاین اتحاد، نسبت به‌هرکدام از متغیرهای x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ مشتق‌می‌گیریم، رشته اتحادهای زیر را (در $\mathcal{D}$) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\cdot\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}$$

می‌بینیم که عنصرهای سطر آخر دترمینان (۲۰) ازمجموع عنصرهای نظیر $(m-1)$ سطر اول به‌دست می‌آیند، به‌شرطی‌که قبلاً، عنصرهای این سطر را، به ترتیب، در $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}$، ...، $\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$ ضرب کرده باشیم؛ و روشن است که چنین دترمینانی، برابر صفر می‌شود، که متناقض با شرط قضیه است. این تناقض، ناممکن‌بودن برابری (۲۱) را ثابت می‌کند.

۲۱۶. مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی. به‌حالت کلی می‌پردازیم و این تعریف را می‌آوریم: بالاترین‌مرتبهٔ دترمینان‌های تشکیل شده ازعنصرهای ماتریس(۱۹) راکه در$\mathcal{D}$، متحد باصفر نباشد، مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی (۱۹) (در حوزهٔ $\mathcal{D}$) گویند. البته، ممکن است پیش آید که همهٔ عنصرهای ماتریس (۱۹)، متحد با صفر باشند، دراین صورت، می‌گویند، مرتبهٔماتریس ۰ است؛ ولی این حالت، جالب نیست، زیرا، در این جا، خیلی ساده، همهٔ تابع‌های y_1، y_2، ...، y_m تبدیل به مقدار ثابت می‌شوند [۱۸۳]. اگر مرتبهٔ ماتریس (۱۹) برابر $\mu \geqslant 1$ باشد، دست‌کم یک دترمینان مرتبهٔ μام وجود دارد، که ازعنصرهای ماتریس تشکیل

شده است (حتماً با فرض $m \geqslant \mu$ و $n \geqslant \mu$) و، در $\mathcal{D}$، متحد با صفر نیست و، در این‌صورت همهٔ دترمینان‌های با مرتبهٔ بالاتر از μ (اگر چنین دترمینان‌هایی، وجود داشته باشد)، به‌طور اتحادی برابر صفر می‌شوند. گویند. مرتبهٔ μ ماتریس، در یك حوزه حاصل می‌شود، اگر دترمینان مذکور مرتبهٔ μ در همین نقطهٔ، مخالف صفر باشد.

قضیهٔ II. فرض می‌کنیم، مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی، در حوزهٔ $\mathcal{D}$، برابر $\mu \geqslant 1$ باشد و در نقطهٔ

$$M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

ازاین حوزه، این مرتبه حاصل شود؛ آن‌وقت، دریك همسایگی $\mathcal{D}_0$ نقطهٔ نامبرده، μ عدد از m تابع ما (درست همان‌هایی‌که، مشتق‌آن‌ها، در دترمینان مرتبهٔ μام وجود دارند و در نقطهٔ M_0، مخالف صفرند)، مستقل وبقیه وابسته به‌آن‌ها خواهند بود.

اثبات. بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض‌کرد که دترمینان زیر، درنقطهٔ M_0، مخالف صفر است:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_\mu)}{D(x_1, \ldots, x_\mu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} \qquad (۲۲)$$

باتوجه به‌پیوستگی مشتق‌های نسبی، همین ویژگی درهمسایگی نقطهٔ مفروض هم وجودخواهدداشت‌و، بنابراین، بنابرقضیهٔ I، تابع‌های y_1، y_2، ...، y_μ، دراین همسایگی، مستقل خواهند بود.

مقدارهای‌این تابع‌ها را درنقطهٔ M_0، با y_1^0، y_2^0، ...، y_μ^0 نشان می‌دهیم. براساس قضیهٔ IV شمارهٔ ۲۰۸، دریك مکعب مستطیل $(n+\mu)$ بعدی

$$\mathcal{M}_0 = (x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; \ldots; x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n;$$
$$y_1^0 - \Delta_1, y_1^0 + \Delta_1; \ldots; y_\mu^0 - \Delta_\mu, y_\mu^0 + \Delta_\mu) \qquad (۲۳)$$

μتای اول از معادله‌های (۱۷)،

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_1 &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_\mu(x_1, \dots, x_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) - y_\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (۲۴)$$

x_1، x_2، ...، x_μ را، به‌عنوان تابع‌هایی یك‌ارزشی از بقیهٔ متغیرهای y_1، ...، y_μ، $x_{\mu+1}$، ...، x_n، که در این معادله‌ها موجودند، معین می‌کنند:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_\mu &= \varphi_\mu(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (۲۵)$$

دستگاه‌های معادله‌های (۲۴) و (۲۵)، در حوزهٔ مذکور، کاملاً هم‌ارزند، یعنی، همان مقدارهائی از متغیرهای x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_n که در (۲۴) صدق کنند، در (۲۵) هم صدق می‌کنند و برعکس. از همان قضیه‌ای که بر آن تکیه داریم، نتیجه می‌شود که اگر به‌جای x_1، x_2، ...، x_μ در (۲۴)، تابع‌های (۲۵) را بگذاریم، به اتحادهایی نسبت به y_1، ...، y_μ، $x_{\mu+1}$، ...، x_n می‌رسیم. ولی، در این‌جا، مطلب دیگری مهم است: اگر به‌جای y_1، ...، y_μ در (۲۵)، تابع‌های f_1، f_2، ...، f_μ را جای‌گزین کنیم، آن‌گاه، به اتحادهایی نسبت به متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n، دست‌کم در یك همسایگی نقطهٔ $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$، می‌رسیم. این همسایگی را، کافی است، این طور انتخاب کنیم:

$$\mathcal{D}_0 = (x_1^0 - \delta_1', x_1^0 + \delta_1'; x_2^0 - \delta_2', x_2^0 + \delta_2'; \dots; x_n^0 - \delta_n', x_n^0 + \delta_n')$$

به‌نحوی که داشته باشیم:

$$0 < \delta_1' \leqslant \delta_1, \quad 0 < \delta_2' \leqslant \delta_2, \dots, 0 < \delta_n' \leqslant \delta_n$$

و برای نقطه‌های آن، مقدارهای y_1، y_2، ...، y_μ، که از (۲۴) معین می‌شوند، یعنی مقدارهای f_1، f_2، ...، f_μ، تفاوتی کمتر از Δ_1، Δ_2، ...، Δ_μ، با y_1^0، y_2^0، ...، y_μ^0 داشته باشند.*

---

*) این را، با توجه به پیوستگی تابع‌های f_1، f_2، ...، f_μ، که در نقطهٔ M_0، مقدارهای y_1^0، y_2^0، ...، y_μ^0 را انتخاب می‌کنند، می‌توان انجام داد.

در واقع، در این صورت، نقطهٔ $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ در $\mathcal{M}_0$ واقع می‌شود و همراه با تساوی (۲۴)، تساوی (۲۵) هم برقرار خواهد بود.

حالا (باشرط $m > \mu$)، یکی از دیگر تابع‌های (۱۷) را، به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم، مثلاً $y_{\mu+1}$، و ثابت می‌کنیم که این تابع، به μ تابع اولی $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ بستگی دارد. اگر در برابری $y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \dots, x_n)$، تابع‌های (۲۵) را به‌جای $x_1, \dots, x_\mu$ بگذاریم. آن‌گاه، $y_{\mu+1}$ به صورت تابعی (مرکب) از $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$ درمی‌آید:

$$y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(\varphi_1(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n), \dots$$
$$\dots, \varphi_\mu(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots x_n); x_{\mu+1}, \dots, x_n) \equiv$$
$$\equiv F_{\mu+1}(y_1, \dots, y_\mu; x_{\mu+1}, \dots, x_n) \qquad (۲۶)$$

با توجه به آن چه گفتیم، اگر در این برابری، به‌جای $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ و $y_{\mu+1}$، به‌ترتیب، تابع‌های $f_1, f_2, \dots, f_\mu$ و $f_{\mu+1}$ را قرار دهیم، آن وقت، به‌یک اتحاد نسبت به xها، در حوزهٔ $\mathcal{D}_0$، می‌رسیم.

برای آن که به‌وابستگی تابع $y_{\mu+1}$ از تابع‌های $y_1, y_2, \dots, y_\mu$، اطمینان پیدا کنیم، باید ثابت کنیم که تابع $F_{\mu+1}$، در واقع شامل آوندهای $x_{\mu+1}, \dots, x_n$ نیست. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که اتحادهای زیر، نسبت به $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$، برقرار است:

$$\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+2}} = 0, \dots, \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0$$

[با شمارهٔ **۱۸۳** مقایسه کنید]. به‌عنوان نمونه، به‌برابری اول می‌پردازیم. بقیه را هم، شبیه آن، می‌توان ثابت کرد.

از معادله‌های (۲۴) نسبت به $x_{\mu+1}$ مشتق می‌گیریم (با در نظر گرفتن این که $x_1, \dots, x_\mu$، تابع‌هایی از $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$، به‌صورت (۲۵) هستند). به‌این برابری‌ها می‌رسیم:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}}=0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_2}{\partial x_{\mu+1}}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\cdots+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(۲۷)$$

که نسبت به کمیت‌های زیر، خطی است:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}},\ \ldots,\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}$$

از این تساوی خطی (که تعدادآن‌ها، برابر μ است)، به‌عنوان نتیجه، تساوی خطی $(\mu+1)$ام به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}}+\cdots+\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}+\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}=0\qquad(۲۷^*)$$

زیرا، دترمینان مرتبهٔ $(\mu+1)$ام، که تشکیل شده است ازضریب‌های کمیت‌های مذکور، و ازجمله‌های آزاد، درتمامی $(\mu+1)$ برابری (۲۷) و (*۲۷)، یعنی دترمینان

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{\mu+1}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}}
\end{vmatrix}$$

متحد با صفراست (آخر، مرتبهٔ ماتریس (۱۹)، برابر μ است!)، ولی سمت چپ برابری (*۲۷)، بنابه خود تعریف (۲۶) از $F_{\mu+1}$، عبارت است ازمشتق $\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}$. به‌این ترتیب، باتوجه به (*۲۷)، این مشتق، در واقع، برابرصفر است.

بنابراین، می‌توان در تابع $F_{\mu+1}$، آوندهای $x_{\mu-1}$، ...، x_n را حذف کرد: $y_{\mu+1}$، تنها بستگی به y_1، ...، y_μ دارد. واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

درمثال ۱) شمارهٔ **۲۱۵**، ماتریس ژاکوبی، به‌این صورت است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ x_2+x_3+\cdots+x_n & x_1+x_3+\cdots+x_n & \cdots & x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \end{pmatrix}$$

اگر به‌عنصرهای سطرسوم، به‌ترتیب، نصف عنصرهای سطردوم را اضافه کنیم، درآن‌صورت، درسطرسوم هم، مثل سطراول، به‌عنصرهای برابر می‌رسیم. ازاین جا، روشن می‌شود که همهٔ دترمینان‌های مرتبهٔ سوم، برابرصفرند. مرتبهٔ ماتریس. برابراست با ۲ و، در واقع، دوتابع ازسه‌تابع، مستقل است وسومی، وابسته به‌این دوتاست.

شبیه این بحث را، درمورد مثال ۲) شمارهٔ **۲۱۵** هم، می‌توان انجام داد.

درخاتمه یادآوری می‌کنیم که، ممکن است حالتی پیش‌آید که دربخشی ازحوزهٔ مورد بررسی، یك بستگی بین‌تابع‌ها وجود داشته باشد و دربخش دیگری ازحوزه، بستگی دیگری پیدا شود ویا تابع‌ها مستقل باشند ونظیراین‌ها.

۳) مثلاً، فرض کنیم، تابع‌های y_1 و y_2 ازدومتغیرمستقل x_1 و x_2، برصفحهٔ x_1x_2، با برابری‌های زیرتعریف شوند:

$$y_1=\begin{cases} x_1^3x_2^2 & (x_1 \geqslant 0), \\ 0 & (x_1<0), \end{cases} \qquad y_2=\begin{cases} x_1^2x_2^3 & (x_2 \geqslant 0) \\ 0 & (x_2<0) \end{cases}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این تابع‌ها همراه با مشتق‌های خود، در تمامی صفحه پیوسته‌اند.

دراین حالت، مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی، تنها برای ربع اول مختصات، برابراست‌با ۲، برای ربع‌های دوم وچهارم برابراست با واحد و، بالاخره، برای ربع سوم برابر است با صفر. تنها در ربع اول مختصات، تابع‌ها، مستقل‌اند.

§۴. تغییرمتغیرها

۲۱۷. تابع با یك متغیر. هدف این بند، این است که تصوری دربارهٔ تغییرمتغیرها به‌دست دهیم. به‌همین مناسبت، لزومی نمی‌بینیم که درهمهٔ ریزه‌کاری‌های مطلب وارد شویم (اگرچه، هیچ مشکلی دراین راه وجود ندارد).

خیلی ازموضوع‌های مربوط به‌این بند را، زودترهم می‌توانستیم طرح کنیم، ولی مناسبت‌تر دیدیم که همهٔ مطلب مربوط به‌تغییر متغیر را، یك‌جا و باهم بیاوریم.

فرض کنیم،عبارت

$$W = F(x, y, y'_x, y''_x, \dots)$$

داده شده باشد، که شامل متغیرمستقل x، تابع آن y و یك رشته مشتق‌های y نسبت به x، تا مرتبه‌ای، باشد. می‌خواهیم، عبارت مشابهی برحسب متغیرمستقل جدید t وتابع‌آن u پیدا کنیم، به شرطی که بدانیم، متغیرهای قدیم x وy، با رابطه‌های معینی، به‌این متغیرهای جدید، مربوط‌شده‌اند (به‌این رابطه‌ها، رابطه‌های تبدیل می‌گویند). در واقع، می‌خواهیم W را به‌صورت تابعی از t، u ومشتق‌های u نسبت به t درآوریم.

انگیزهٔ این تغییرمتغیرها، یا مربوط به‌جای خاصی است که متغیرهای t و u درمسالهٔ مورد بررسی دارند، ویا به‌خاطرساده‌ترشدن عبارت W در اثر این تغییرمتغیر.

ابتدا به‌حالتی می‌پردازیم که تنها متغیرمستقل، تعویض می‌شود و دستور تبدیلی که، مستقیماً، x را به‌متغیرجدید t مربوط می‌کند، مفروض باشد.

فرض کنیم، دستور تبدیل، نسبت بهx، حل شده باشد:

$$x = \varphi(t) \qquad (۱)$$

اگرy، تابعی ازxباشد،درضمن،باواسطهٔx، تابعی‌از t خواهدبود. قبلاً،در**۱۲۱**، رابطه‌هایی داشتیم که مشتق‌های y نسبت بهx را، برحسب مشتق‌های x و y نسبت به t، بیان می‌کرد:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad y''_{x^2} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^3_t}, \\ y'''_{x^3} &= \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{x'^5_t}, \dots \end{aligned}\right\} \qquad (۲)$$

چون x'_t، x''_{t^2}، x'''_{t^3}، ... را می‌توان‌تابع‌های معلومی ازt به‌حساب آورد (این‌ها، از (۱) وبامشتق‌گیری به‌دست‌می‌آیند)، تنها این‌مطلب می‌ماندکه در W، به‌جای y'_x، y''_{x^2}، ...، این عبارت‌ها را برحسب t، y'_t، y''_{t^2}، ... بنویسیم.

اگردستور تبدیل، به‌صورتی حل نشده نسبت به x، داده‌شده‌باشد:

$$\Phi(x, t) = 0 \qquad (۳)$$

بازهم مسأله، اساساً، به‌همان‌صورت حل‌می‌شود، تنها، مشتق‌های x'_t، x''_{t^2}، ... را باید از

روی قاعده‌های مشتق‌گیری تابع‌های ضمنی، محاسبه کرد.*

درحالت کلی، وقتی که هردومتغیرعوض می‌شوند، فرض می‌کنیم، دستورهای تبدیل، نسبت به‌متغیرهای قدیم، حل شده باشند:

$$x=\varphi(t,u),\ y=\psi(t,u) \qquad (۴)$$

اگر y، با یك رابطهٔ تابعی به x مربوط باشد، درآن صورت، u هم وابسته به t می‌شود، و آن وقت، بنابه (۴)، x و y تابع‌های‌مرکبی از t خواهند بود. از روی قاعدهٔ مشتق‌گیری تابع‌های مرکب، داریم:

$$x'_t=\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t,\ y'_t=\psi'_t+\psi'_u\cdot u'_t,$$

$$x''_{tt}=\varphi''_{tt}+۲\varphi''_{tu}\cdot u'_t+\varphi''_{uu}\cdot u'_t+\varphi'_u\cdot u''_{tt},\ y''_{tt}=\psi''_{tt}+\dots+\psi'_u\cdot u''_{tt},\ \dots$$

توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که منظور از x'_t، y'_t وغیره، مشتق‌های «کامل» x و y نسبت به t هستند، یعنی با به‌حساب‌آوردن بستگی u نسبت به t؛ درحالی که φ'_t و ψ'_t و...، به‌معنای مشتق نسبت به t هستند، به‌این معنا که t در φ و ψ، تنها به‌عنوان یکی ازدو آوند به‌حساب می‌آید.

باقراردادن این عبارت‌ها، در رابطه‌های (۲)، عبارت مشتق‌های y نسبت به x را، برحسب t و u ومشتق‌های u نسبت به t به‌دست می‌آوریم.

اگر رابطه‌های تبدیل، نسبت به x و y، حل نشده باشند:

$$\Phi(x,y,t,u)=۰,\quad \Psi(x,y,t,u)=۰ \qquad (۵)$$

باید مشتق‌های x'_t، y'_t، x''_{tt}، y''_{tt}، ... را، از روی قاعده‌های مشتق‌گیری تابع‌های ضمنی، محاسبه کرد. مثلاً، با مشتق‌گیری از (۵) نسبت به t (ضمناً، نه‌تنها x و y، بلکه u هم، مثل تابعی از t، درنظر گرفته می‌شود)، معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi'_x x'_t+\Phi'_y y'_t+\Phi'_t+\Phi'_u u'_t=۰,\ \Psi'_x x'_t+\Psi'_y y'_t+\Psi'_t+\Psi'_u u'_t=۰$$

که از آن‌ها، x'_t و y'_t پیدا می‌شوند وغیره.

درحالت خاصی که، رابطه‌های تبدیل، نسبت به‌متغیرهای جدید، حل شده باشند:

$$t=\alpha(x,y),\ u=\beta(x,y) \qquad (۶)$$

می‌توان، ازهمان روش کلی، استفاده کرد. مثلاً، ازمشتق‌گیری رابطه‌های (۶)، نسبت به t

---

*) ضمناً، ممکن است، عبارت نهایی W، باز هم، شامل x باشد، که در این صورت، باید آن را، به‌کمك (۳)، حذف کرد.

(ضمناً، x و y و u را، تابع‌هایی از t به‌حساب می‌آوریم)، داریم:

$$۱ = \alpha'_x x'_t + \alpha'_y y'_t,\quad u'_t = \beta'_x x'_t + \beta'_y y'_t$$

از آن‌جا

$$x'_t = \frac{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x},\qquad y'_t = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\alpha'_x \beta'_y - \alpha'_y \beta'_x}$$

و بالاخره

$$y'_x = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}$$

ولی، دراین‌حالت، بهتراست، به‌این‌ترتیب عمل کنیم: عکس حالت عبور ازمتغیرهای t و u، به‌متغیرهای x و y را درنظرمی‌گیریم. از رابطه‌های (۶) (باتوجه به‌این‌که، y تابعی است از x)، نسبت به x مشتق می‌گیریم. نتیجه می‌شود:

$$t'_x = \alpha'_x + \alpha'_y y'_x,\quad u'_x = \beta'_x + \beta'_y y'_x$$

به‌طوری که

$$u'_t = \frac{u'_x}{t'_x} = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'_x}{\alpha'_x + \alpha'_y y'_x} \qquad (۷)$$

که از آن جا، برای y_x، همان عبارت بالا، به‌دست می‌آید.

دراین جا هم، باید بین مشتق‌های t'_x و u'_x با α'_x و β'_x فرق گذاشت: اولی‌ها به‌معنای مشتق‌های «کامل» نسبت به x، با درنظرگرفتن وابستگی y به x، می‌باشند. درحالی که دومی‌ها، تنها نسبت به x، به عنوان یکی از آوندهای تابع‌های α و β، به حساب می‌آیند.

یادآوری می‌کنیم که، عبور ازمتغیرهای x و y، به‌متغیرهای t و u از روی رابطه‌های (۶) را می‌توان، از لحاظ هندسی، همچون یک تبدیل نقطه‌ای صفحه (یا بخشی از آن) تعبیر کرد: اگر x و y را، مختصات نقطهٔ M از صفحه، و t و u را مختصات نقطه‌ای مثل P درنظر بگیریم، دراین‌صورت، تبدیل مفروض، نقطهٔ M را به‌نقطهٔ P تبدیل می‌کند. حالا، منحنی $\mathcal{K}$ برصفحه، به‌معادلهٔ $y = f(x)$ را درنظرمی‌گیریم؛ این رابطهٔ تابعی بین x و y نظیر یک بستگی بین t و u، $u = g(t)$، می‌باشد که، به‌نوبهٔ خود، منحنی $\mathcal{L}$ را، برصفحه، مشخص می‌کند. بنابراین، تبدیل مورد نظر، منحنی $\mathcal{K}$ را به‌منحنی $\mathcal{L}$ منجرمی‌کند. اگردر

نقطهٔ M از منحنی اول، مماسی با ضریب زاویهٔ y'_x رسم کنیم، آن‌گاه در نقطهٔ P از منحنی دوم، مماسی با ضریب زاویهٔ u'_t خواهیم داشت، که از روی رابطه‌های (۷) معین می‌شود. به‌این ترتیب، از روی مختصات M بر منحنی $\mathcal{H}$ وضریب زاویهٔ مماس در M، به‌طوریک ازشی، هم مختصات نقطهٔ نظیر P روی منحنی تبدیل شدهٔ $\mathcal{L}$، وهم ضریب زاویهٔ مماس در P، معین می‌شود. به‌همین مناسبت، اگر از نقطهٔ M، دومنحنی بگذرند که دراین نقطه برهم مماس باشند، منحنی‌های تبدیل شده هم، در نقطهٔ P، بریکدیگر مماس خواهند بود. این تبدیل نقطه‌ای، صفحهٔ مماس را حفظ می‌کند [درشمارهٔ بعد، مثال ۵) را ببینید].

۲۱۸. مثال‌ها. ۱) فرض کنیم معادلهٔ $x^2y''_{x^2}+xy'_x+y=0$ مفروض باشد، آن را با فرض $x=e^t$، تبدیل کنید.

بنا به رابطه‌های (۲) داریم:

$$y'_x=e^{-t}\cdot y'_t,\quad y''_{x^2}=e^{-2t}\cdot(y''_{t^2}-y'_t)$$

ومعادله، به‌صورت بسیارساده‌ای، درمی‌آید:

$$y''_{t^2}+y=0$$

۲) عبارت زیر را، با فرض $x=t-y$، تبدیل کنید:

$$W=\frac{y''_{x^2}-y'_x(1+y'_x)^2}{(1+y'_x)^3}$$

از روی طرح کلی، این تبدیل به‌شرطی صورت می‌گیرد که فرض کنیم $x=t-u$ و $y=u$. با توجه به رابطه‌های (۲):

$$W=\frac{x'_ty''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t-y'_t(x'_t+y'_t)^2}{(x'_t+y'_t)^3}$$

ازطرف‌دیگر، از رابطهٔ تبدیل، به‌دست می‌آید: $x'_t=1-y'_t$، که اگر در W قراردهیم، چنین می‌شود:

$$W=y''_{t^2}-y'_t$$

۳) تبدیل نقش متغیرها. فرض کنیم، نقش متغیرمستقل x و تابع آن، y، با هم عوض شوند؛ با توجه به‌طرح کلی، این تبدیل، وقتی انجام می‌شود که فرض کنیم: $x=u$، $y=t$. مساله این است که، می‌خواهیم مشتق‌های y نسبت به x را، برحسب مشتق‌های x نسبت به y، بیان کنیم.

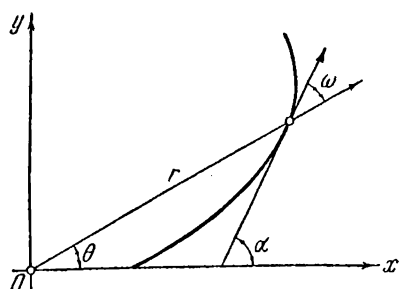
دوباره، به‌رابطه‌های (۲)، با تبدیل t به y، متوسل می‌شویم. اگرتوجه داشته باشیم

که $y'_y = ۱$ $(y''_{y^۲} = y'''_{y^۳} = \ldots = ۰)$، بلافاصله، نتیجه می‌شود:

$$y'_x = \frac{۱}{x'_y},\quad y''_{x^۲} = -\frac{x''_{y^۲}}{x'^{۳}_y},\quad y'''_{x^۳} = \frac{۳x''^{۲}_{y^۲} - x'_y x'''_{y^۳}}{x'^{۵}_y},\ldots$$

مثلاً، اگر عبارت $W = y'_x y'''_{x^۳} - ۳y''^{۲}_{x^۲}$ را، برای این تبدیل، در نظر بگیریم، به‌عبارت $W = -\frac{x'''_{y^۳}}{x'^{۵}_y}$ می‌رسیم.

۴) عبور به مختصات قطبی. اگر x و y را، به‌عنوان مختصات قائم نقطه، در نظر بگیریم، آن‌گاه، معادلهٔ $y = f(x)$، معرف یك منحنی است. اغلب، عبور به مختصات قطبی r و θ، و بیان منحنی با معادلهٔ قطبی آن $r = g(\theta)$، کار را ساده‌تر می‌کند. طبیعی است که، در این صورت، باید اجزای هندسی گوناگون منحنی را، که برحسب x، y، y'_x، $y''_{x^۲}$، ... داده شده‌اند، به‌عبارت‌های نظیر آن‌ها، برحسب θ، r، r'_θ، $r''_{\theta^۲}$ و ... تبدیل کرد.



شکل ۱۱۴

همان‌طور که می‌دانیم، رابطه‌های تبدیل، در این حالت، به‌صورت $x = r\cdot\cos\theta$ و $y = r\cdot\sin\theta$ است. با مشتق گیری نسبت به θ (ضمناً، در نظر داشته باشیم که r تابع θ است)، داریم:

$$x'_\theta = r'_\theta\cdot\cos\theta - r\sin\theta,\quad y'_\theta = r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta,$$

$$x''_{\theta^۲} = r''_{\theta^۲}\cos\theta - ۲r'_\theta\sin\theta - r\cos\theta,$$

$$y''_{\theta^۲} = r''_{\theta^۲}\sin\theta + ۲r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\ ,\ldots$$

که از این جا، بنابر رابطه‌های (۲) (با گذشتن θ به‌جای t)، به‌دست می‌آید:

$$y'_x = \frac{r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta},\quad y''_{x^۲} = \frac{r^۲ + ۲r'^{۲}_\theta - rr''_{\theta^۲}}{(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)^۳},\ldots$$

به‌این ترتیب، مثلاً، ضریب زاویهٔ مماس، چنین می‌شود:

$$tg\alpha = y'_x = \frac{r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta}$$

وتانژانت زاویهٔ ω، بین مماس وامتداد شعاع‌حامل (شکل ۱۱۴):

$$tg\omega = tg(\alpha - \theta) = \frac{tg\alpha - tg\theta}{1 + tg\alpha \cdot tg\theta} = \frac{xy'_x - y}{x + yy'_x}$$

حالا، با رابطهٔ سادهٔ زیر بیان می‌شود:

$$tg\omega = \frac{r}{r'_\theta}$$

باتوجه به این نتیجه، روشن می‌شود که اگرمعادلهٔ منحنی، به‌صورت قطبی داده شده باشد، بهتراست که وضع مماس را، با زاویهٔ ω معین کنیم.

این عبارت را هم، درنظرمی‌گیریم:

$$R = \frac{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}$$

که، به‌طوری که بعداً [درشمارهٔ **۲۵۱**] خواهیم دید، عنصرهندسی مهمی از منحنی («شعاع انحنا») می‌باشد. اگرمقدارهایی راکه، دربالا، برای y'_x و y''_x پیداکرده‌ایم، در این رابطه قراردهیم، پس ازساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2_\theta - 2r''_{\theta^2}}$$

۵) تبدیل لژاندر. تغییرمتغیرها را می‌توان به‌این ترتیب، تعمیم دادکه فرض‌کنیم، در رابطه‌های تبدیل، مشتق‌ها هم وجود داشته باشند. به‌مثالی از این نوع، اکتفا می‌کنیم:

$$t = y'_x, \quad u = x \cdot y'_x - y$$

این نوع تبدیل، به تبدیل لژاندر، معروف است.

از رابطهٔ تبدیل دوم، باتوجه به‌این‌که u، با واسطهٔ t، تابعی است از x (بستگی t به x، از رابطهٔ اول حاصل می‌شود)، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$u'_t \cdot y''_{x^2} = y'_x + xy''_{x^2} - y'_x = xy''_{x^2}$$

از این‌جا، (با فرض $y''_{x^2} \neq 0$)، به‌دست می‌آید: $x = u'_t$. به‌این ترتیب، اگر هردو رابطهٔ تبدیل را به‌حساب بیاوریم، داریم:

$$x = u'_t, \quad y = t.u'_t - u$$

که متقابل‌بودن تبدیل‌ها را، می‌توان نتیجه گرفت: t، u و u'_t، برحسب x، y و y'_x، به‌همان صورتی بیان می‌شوند، که آخری‌ها برحسب اولی‌ها قابل بیان‌اند.

اگر از رابطهٔ $x = u'_t$، نسبت به x، مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$u''_{t^2} \cdot y''_{x^2} = 1 \Rightarrow y''_{x^2} = \frac{1}{u''_{t^2}}$$

و از مشتق‌گیری بعدی، به‌دست می‌آید:

$$u'''_{t^3} \cdot y''^2_{x^2} + u''_{t^2} \cdot y'''_{x^3} = 0$$

به‌نحوی که

$$y'''_{x^3} = -\frac{u'''_{t^3}}{u''^3_{t^2}}$$

و همین‌طور تا آخر.

یادآوری می‌کنیم که اگر تبدیل لژاندر را به‌عنوان تبدیل صفحه، تعبیر هندسی کنیم، این تبدیل به‌هیچ وجه، تبدیل نقطه‌ای نخواهد بود. برای تعیین مختصات t و u نقطهٔ P، داشتن مختصات x و y نقطهٔ M کافی نیست و باید ضریب زاویهٔ y'_x مماس دراین نقطه برمنحنی موردبررسی $y = f(x)$ را نیز داشته‌باشیم. با وجوداین، منحنی به‌منحنی تبدیل می‌شود و تماس هم حفظ می‌شود*.

۲۱۹. تابع‌های با چند متغیر. تغییر متغیرهای مستقل. حالا، به‌مسألهٔ تبدیل‌عبارت

$$W = F\left(x, y, \ldots, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots\right)$$

می‌پردازیم که، علاوه برمتغیرهای مستقل x، y، ...، شامل تابع آن‌ها z، و همچنین‌مشتق‌های نسبی z نسبت به‌آن‌ها، تا مرتبهٔ معینی، می‌باشد.

در این‌جا هم، به انگیزهٔ ساده‌ترشدن رابطه‌ها، می‌توان بـه متغیرهای جدیدی عبور

---

*) این‌گونه تبدیل‌ها، که تماس را حفظ می‌کنند، نقش‌مهمی دربخش‌های مختلف هندسه‌و آنالیز به‌عهده دارند، و آن‌هارا تبدیل‌های مماسی می‌نامند. تبدیل‌های نقطه‌ای و تبدیل‌های لژاندر، تنها حالت‌های خاصی، از این‌گونه تبدیل‌ها هستند.

کرد، که به‌کمك رابطه‌های تبدیل، با قدیمی‌ها مربوط شده‌اند. اگر متغیرهای جدید را با t، u، ...، و تابع آن‌ها را با v نشان دهیم، آن‌وقت، مسألهٔ ما این است که W را بر حسب t، u، ...، v و مشتق‌های v نسبت به آوندهایش، بیان کنیم. روشن و کافی است، بررسی را نسبت به مشتق‌های قدیمی $\frac{\partial z}{\partial x}$، $\frac{\partial z}{\partial y}$، ...، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، ...، انجام داد. به خاطر سادگی نوشته‌ها، تعداد متغیرهای مستقل را، برابر ۲ می‌گیریم: قدیمی‌ها x و y و جدیدها t و u.

در این‌جا هم، از حالتی آغاز می‌کنیم که تنها متغیرهای مستقل، تعویض می‌شوند و رابطه‌های تبدیل، مستقیماً، متغیرهای قدیم x و y را، به متغیرهای t و u، مربوط می‌کنند.

فرض می‌کنیم، رابطه‌های تبدیل، نسبت به متغیرهای قدیم، حل شده باشند.

$$x=\varphi(t,u),\ y=\psi(t,u) \qquad (۸)$$

با درنظرگرفتن z، به‌عنوان تابع مرکب از t و u، باواسطهٔ x و y، روی قاعده‌های مشتق‌گیری تابع‌های مرکب، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (۹)$$

به‌این‌ترتیب، برای تعیین مشتق‌های قدیم $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، با یك دستگاه معادله‌های خطی، سروکارداریم؛ ازاین‌جا، مشتق‌های قدیم، به‌صورت خطی، برحسب جدیدی‌ها، بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=C\frac{\partial z}{\partial t}+D\frac{\partial z}{\partial u} \qquad (۱۰)$$

ضمناً، توجه به‌این مطلب مهم است که، ضریب‌های A، B، C و D از مشتق‌های تابع‌های φ و ψ موجود در رابطه‌های (۸) تشکیل شده‌اند، ولی اصلاً بستگی به z ندارند.

ازهمین‌جا، معلوم می‌شود که می‌توان رابطه‌های (۱۰) را، برای مشتق‌های $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ (به جای z) به‌کار برد. با این طریق، مثلاً، برای $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+B\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=$$

$$=A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}+\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+$$

$$+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t du}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

با به کار بردن (۱۰) برای مشتق‌های مرتبهٔ دوم (به جای z)، می‌توان عبارت مشتق سوم را به‌دست آورد و غیره.

اگر رابطه‌های تبدیل، نسبت به متغیرهای جدید، حل شده باشند:

$$t=\alpha(x, y),\ u=\beta(x, y)$$

بهتر است بـه‌روش معکوس متوسل شویم، یعنی z را، به‌عنوان تابعی مرکب از x و y، با واسطهٔ t و u، درنظر بگیریم و ازآن، نسبت به متغیرهای قدیم، مشتق بگیریم، که در نتیجه، ما را، به رابطه‌ای، شبیه (۱۰) می‌رساند:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u} \qquad (۱۱)$$

و این‌بار، ضریب‌های

$$A=\frac{\partial t}{\partial x},\ B=\frac{\partial u}{\partial x},\ C=\frac{\partial t}{\partial y},\ D=\frac{\partial u}{\partial y}$$

تابع‌هایی از x و y می‌شوند که، ضمناً، مستقل از z هستند.

با استفادهٔ متوالی از رابطه‌های (۱۱)، در این‌جاهم می‌توان، عبارت مشتق‌های بعدی را به‌دست آورد. مثلاً*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial t}+B\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)+B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}+A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}\right)+B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}+B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$$

---

* همان نکته‌ای را که در مورد تابع با یك متغیر گفتیم، در این‌جا هم باید تکرار کنیم: ←

بالاخره، در حالت کلی، و با رابطه‌های تبدیل غیرمشخص

$$\Phi(x, y, t, u) = 0, \Psi(x, y, t, u) = 0 \qquad (۱۲)$$

می‌توان ــ چه با روش مستقیم و چه با روش معکوس ــ محاسبهٔ مشتق‌های نسبی

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u} \text{ یا } \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

از روی قاعده‌های مشتق گیری تابع‌های ضمنی، انجام داد.

۲۲۰. روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌ها. حالا، روش دیگری، برای بیان مشتق‌های قدیم برحسب جدیدی‌ها می‌آوریم، که به خصوص، اگر در W، به‌جای مشتق‌های جداگانه، همهٔ مشتق‌های مرتبهٔ مفروض وجود داشته باشد، کار را ساده‌تر می‌کند.؛ و این، روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌های کامل است. این روش را هم، بسته به‌این‌که t و u یا x و y متغیرهای مستقل باشند، به‌دو صورت می‌توان فرض کرد.

ابتدا فرض می‌کنیم که t و u مستقل باشند؛ همهٔ دیفرانسیل‌ها، نسبت به این متغیرها (روش مستقیم) گرفته می‌شوند. بادیفرانسیل گیری کامل، از رابطه‌های تبدیل (۱۲)، می‌توان dx و dy را، به‌طور خطی، برحسب dt و du بیان کرد.

$$dx = \alpha dt + \beta du, dy = \gamma dt + \delta du \qquad (۱۳)$$

سپس، بادیفرانسیل گیری ازاین رابطه‌ها، d^2x و d^2y را، به‌صورت چندجمله‌ای‌های همگن مرتبهٔ دوم، نسبت به dt و du درمی‌آوریم:

$$d^2x = \varepsilon dt^2 + \zeta dt du + \eta du^2, d^2y = \theta dt^2 + \iota dt dx + \chi du^2 \qquad (۱۴)$$

و غیره. ضریب‌های α، β، ...، χ، تابع‌های معلومی از x، y، t و u هستند.

حالا (بااستفاده ازتغییرناپذیری شکل دیفرانسیل)، dz را به‌صورت دوگانه می‌دهیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial u} du \qquad (۱۵)$$

اگر به‌جای dx و dy، عبارت‌های (۱۳) آن‌ها را بگذاریم، و ضریب‌های dt و du را،

← چون بیان مشتق‌های قدیم برحسب جدیدی‌ها، شامل x و y است، پس ازگذاشتن این عبارت‌ها در W، ممکن است باز هم لازم باشد، x و y را، به‌کمک رابطه‌های تبدیل، حذف کنیم خواننده، به‌سادگی، مشابه این مطلب را، در حالت‌های بعدی هم، پیدا خواهدکرد.

در دو طرف تساوی، برابر قرار دهیم،* به‌این معادله‌های خطی می‌رسیم:

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\gamma\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t},\ \beta\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}$$

که از آن‌ها، مشتق‌های $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ معین می‌شوند.

به همین ترتیب، می‌توان d^2z را، به‌صورت دوگانه، ارائه داد (با یادآوری این نکته که، متغیرهای مستقل، نه x و y، بلکه t و u هستند):

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}dtdu+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 \qquad (۱۶)$$

به‌جای dx، dy، d^2x، d^2y، مقدارشان را از (۱۳) و (۱۴) قرار می‌دهیم و ضریب‌های dt^2، $dtdu$ و du^2 را، در دو طرف، برابر می‌کنیم.** از آن‌جا، سه معادله، برای تعیین $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (چون $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ معین شده‌اند) به‌دست می‌آید و غیره.

روش معکوس، درعمل، بسیار ساده‌است. در این‌جا، متغیرهای مستقل عبارتنداز x و y به‌نحوی که همهٔ دیفرانسیل‌ها، این‌بار، نسبت به این متغیرها، گرفته می‌شوند.

اگر از رابطه‌های تبدیل (۱۲)، پشت سرهم، دیفرانسیل بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$dt=adx+bdy,\ du=cdx+d\cdot dy \qquad (۱۷)$$

$$d^2t=edx^2+fdxdy+gdy^2,\ d^2u=hdx^2+idxdy+jdy^2 \qquad (۱۸)$$

وغیره. در این‌جاهم، ضریب‌های a، b، ...، i، j، تابع‌های معلومی از x، y، t و u هستند.

اگر در (۱۵)، به‌جای dt و du، مقدار آن‌ها را از (۱۷) بگذاریم و ضریب‌های dx و dy را، در دو طرف، برابر قرار دهیم، مستقیماً، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial t}+c\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=b\frac{\partial z}{\partial t}+d\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

---

*) یادآوری می‌کنیم که برابری $Adt+Bdu=A'dt+B'du$، برای dt و du نامشخص، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $A=A'$ ، $B=B'$.

**) برابری $Adt^2+Bdtdu+Cdu^2=A'dt^2+B'dtdu+C'du^2$، برای dt و du دلخواه، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $A=A'$، $B=B'$، $C=C'$.

و در این‌حالت، به‌جای (۱۶)، خواهیم داشت:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{dy^2}dy^2=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u}dtdu+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial z}{\partial t}d^2t+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u$$

بادرنظرگرفتن عبارت‌های (۱۷) و (۱۸) وبرابرکردن ضریب‌های dx^2، $dxdy$ و dy^2، در دو طـرف تساوی، مستقیماً، به‌محاسبهٔ مشتق‌های $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ می‌رسیم وغیره.

۲۲۱. حالت کلی تغییر متغیرها. بالاخره، به‌حالت کلی، وقتی کـه، هم متغیرهای مستقل و هم تابع‌ها عوض می‌شوند، می‌پردازیم. فـرض کنیم، رابطه‌های تبدیل، نسبت به متغیرهای قدیم، حل‌شده باشند:

$$x=\varphi(t,u,v),\quad y=\psi(t,u,v),\quad z=\chi(t,u,v) \qquad (۱۹)$$

اگر z تابع x و y باشد: $z=f(x,y)$، بـه جای x و y و z، مقدارهای آن‌ها را برحسب t و u و v، می‌گذاریم، تابستگی بین متغیرهای اخیر را به‌دست آوریم، به‌طوری که v، تابعی از t و u باشد.

اگر t و u را، متغیرهای مستقل (روش مستقیم) و z را تابعی از آن‌ها، با واسطهٔ x و y، بگیریم، مثل قبل، برابری‌های (۹) و، از آن‌جا، (۱۰) به‌دست می‌آید. ولی، دراین‌جا، منظور از $\frac{dx}{dt}$، ...، $\frac{dz}{du}$ مشتق‌های نسبی «کامـل» از x و y و z، نسبت به t یا u در نظر گرفته شده است، که از (۱۹)، و با توجه به‌این‌کـه خود v تابعی است از t و u به‌دست آمده‌اند.

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}$$

ضریب‌های A، B، C، D، نه تنها شامل t و u و v، بلکه مشتق‌های $\frac{\partial v}{\partial t}$، $\frac{\partial v}{\partial u}$ هـم هستنـد؛ آخری‌ها، شکلی گویا دارند. با استفادهٔ متوالی از رابطه‌های (۱۰)، در این‌جا هم، منجر به عبارت‌هایی، برای مشتق دوم می‌شود، و غیره.

اگر، رابطه‌های تبدیل، نسبت به متغیرهای جدید باشند:

$$t=\alpha(x, y, z), \quad u=\beta(x, y, z), \quad v=\gamma(x, y, z) \qquad (۲۰)$$

معمولاً، بـه روش معکوس متوسل می‌شوند، یعنی x، y را متغیرهـای مستقل بـه حساب می‌آورند. داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

به‌جای $\frac{\partial t}{\partial x}$، ...، $\frac{\partial v}{\partial y}$، مقدارهای آن‌ها را از راه مشتق گرفتن از رابـطه‌های (۲۰)، نسبت به x ونسبت به y، قرارمی‌دهیم (باتوجه به‌این‌که، z تابعی از x و y است):

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \ \ldots, \ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

به‌این ترتیب، نسبت به $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، معادله‌های خطی به‌دست می‌آیـدکه، بـه‌کمك آن‌ها، این مشتق‌ها، برحسب x، y، z، $\frac{\partial v}{\partial t}$ ، $\frac{\partial v}{\partial u}$، بیان می‌شوند.

محاسبهٔ مشتق‌های بعدی، ساده‌تر ازهمه، به‌این ترتیب، انجام می‌شود. ازعبارت‌حاصل برای $\frac{\partial z}{\partial x}$ (یا $\frac{\partial z}{\partial y}$)، مجدداً نسبت به x (یا y)ـبا درنظرگرفتن $\frac{\partial v}{\partial t}$ و $\frac{\partial v}{\partial u}$ بـه عنـوان تابعی از x و y با واسطهٔ t و u ــ مشتق می‌گیریم، وغیره.

وقتی‌که رابطه‌های تبدیل، به‌صورت کلی باشند:

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z, t, u, v)=0, \ B(x, y, z\ t, u, v)=0 \\ C(x, y, z, t, u, v)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (۲۱)$$

می‌توان هرکدام از روش‌ها، رابا استفاده ازقاعدهٔ مشتق‌گیری تابع‌های ضمنی، به‌کاربرد.

بـرای حل مسالهٔ کلـی تغییرمتغیر، از روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌های‌کامل هم، می‌توان استفاده‌کرد. ما به‌شرح حالتی اکتفا می‌کنیم کـه متغیرهای قدیم x و y، متغیرمستقل باشند (روش معکوس)، به‌نحوی‌که همهٔ دیفرانسیل‌ها، نسبت به‌این متغیرها، گرفته شوند.

از رابطه‌های (۲۱) آغازمی‌کنیم ، پشت سرهم، این عبارت‌ها به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} dt &= a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \\ du &= b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz \\ dv &= c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz \end{aligned}\right\} \qquad (۲۲)$$

$$\left.\begin{aligned} d^2 t &= d_{11} dx^2 + d_{12} dx dy + d_{13} dy^2 + d_{14} dx dz + \\ &+ d_{15} dy dz + d_{16} dz^2 + a_3 d^2 z \\ d^2 u &= e_1 dx^2 + \cdots + e_6 dz^2 + b^3 d^2 z \\ d^2 v &= f_1 dx^2 + \cdots + f_6 dz^2 + c_3 d^2 z \end{aligned}\right\} \qquad (۲$$

اگر در برابری

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial u} \partial u$$

به‌جای dt، du و dv، مقدارهای آن‌ها را، از (۲۲) قرار دهیم، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz =$$

$$= \frac{\partial v}{dt}(a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) + \frac{\partial v}{\partial u}(b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz)$$

از آن‌جا

$$dz = A dx + B dy \qquad (۲۴)$$

که در آن، A و B، به‌صورتی گویا، شامل مشتق‌های $\frac{\partial v}{\partial t}$ و $\frac{\partial v}{\partial u}$ می‌باشند. اگر آن را، با رابطهٔ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

حالا، این برابری را، در نظر می‌گیریم (t و u، متغیرهای مستقل هستند):

$$d^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u} dt du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial v}{\partial t} d^2 t + \frac{\partial v}{\partial u} d^2 u$$

اگر در این جا، dt، du، d^2t، d^2u و d^2v را از (۲۲) و (۲۳) و، سپس، dz را از (۲۴) انتخاب کنیم، از برابری حاصل، d^2z به‌دست می‌آید:

$$d^2z = C dx^2 + 2D dx dy + E dy^2$$

که در آن، C، D و E، به‌صورتی گویا، شامل مشتق‌های $\frac{\partial v}{\partial t}$، $\frac{\partial v}{\partial u}$، $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$، $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial u}$ و $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ می‌باشند. اگر آن را، با رابطهٔ

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = C, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = D, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = E$$

وغیره.

در این‌جا هم، می‌توان، مسألهٔ تغییر متغیرها را، تعبیر هندسی کرد. اگر متغیرهای (x, y, z) و (t, u, v) را، مانند مختصات دو نقطهٔ M و P از فضا، در نظر بگیریم، آن‌گاه، رابطه‌های تبدیل، مثلاً در شکل (۲۰)، به‌هر نقطهٔ M، یک نقطهٔ P را نسبت می‌دهند؛ یعنی معرف یک تبدیل نقطه‌ای از فضا (یا بخشی از آن)، می‌باشند. بستگی بین x و y و z، پاسخ‌گوی بستگی بین t و u و v است، به‌نحوی که هر سطح $\mathcal{S}$، به‌سطح دیگری مثل $\mathcal{T}$ تبدیل می‌شود.

دیدیم که با مقدارهای x، y، z، $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، به‌طور یک‌ارزشی، مقدارهای t، u، v، $\frac{\partial v}{\partial t}$ و $\frac{\partial v}{\partial u}$ معین می‌شوند. با یادآوری معادلهٔ صفحهٔ مماس [۱۸۰، (۶)]

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y)$$

به‌سادگی نتیجه می‌شود که، دو سطح $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ مماس در M، در تبدیل موردنظر، متناظر با دو سطح $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ هستند که، به‌نوبهٔ خود، در نقطهٔ P برهم مماس‌اند. تبدیل نقطه‌ای فضا، تماس را حفظ می‌کند [مثال ۷ شمارهٔ بعد را ببینید].

۲۲۲. مثال‌ها. ۱) عبور به مختصات قطبی. فرض کنیم. z تابع نقطه‌های صفحه باشد: $z = f(M)$. معمولاً، وضع نقطه، با مختصات قائم آن (x, y) تعیین می‌شود، به‌نحوی که

z، تابعی‌است ازمتغیرهای x و y. ولی، اغلب‌راحت‌تراست‌که وضع نقطه را، بامختصات قطبی r و θ مشخص‌کنیم،که دراین صورت، لزوم تبدیل به‌متغیرهای جدید پیش می‌آید. این عبور را، با روش‌های گوناگون، می‌توان انجام داد.

«روش مستقیم: r و θ را، متغیرهای‌مستقیم می‌گیریم. با آغاز از رابطه‌های تبدیل

$$x=r\cdot\cos\theta,\quad y=r\cdot\sin\theta$$

به‌صورت رابطه‌های (۱۰)، داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

ازآن‌جا

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}\qquad(۲۵)$$

به‌طوری‌که، دراین جا، عبارت‌های $\cos\theta$، $-\frac{\sin\theta}{r}$، $\sin\theta$ و $\frac{\cos\theta}{r}$، نقش ضریب‌های A، B، C و D را به‌عهده دارند. سپس

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)-$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

وغیره.

روش معکوس. x و y را، متغیرهای مستقل می گیریم. برای آن که بتوانیم از رابطه‌های (۱۱) استفاده کنیم، باید از مشتق‌های $\frac{\partial r}{\partial x}$، $\frac{\partial \theta}{\partial x}$، $\frac{\partial r}{\partial y}$، $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ اطلاع داشته باشیم. این‌ها را، می‌توان، با حل معادله‌هایی که متغیرهای قدیم را با متغیرهای جدید مربوط می کنند ــ نسبت به متغیرهای جدید ــ به‌دست آورد. ولی، ضمناً، می‌توان از روش مشتق گیری تابع‌های ضمنی، بدون حل معادله‌ها، استفاده کرد. اگر از رابطه‌های تبدیل، نسبت به x و نسبت به y، مشتق بگیریم، با در نظر گرفتن r و θ به‌عنوان تابع‌هایی از x و y، به‌دست می آید:

$$1 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad 0 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

و

$$0 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y},\quad 1 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

از آن‌جا

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

و از روی رابطه‌های (۱۱)، به‌عبارت‌های (۲۵) می‌رسیم وغیره.

روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌ها. متغیرهای مستقل را، مثل حالت اخیر، x و y می گیریم. از رابطه‌های تبدیل، دیفرانسیل کامل می گیریم:

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

از آن‌جا

$$dr = \cos\theta dx + \sin\theta dy,\quad d\theta = \frac{-\sin\theta dx + \cos\theta dy}{r}$$

به‌نحوی که

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta =$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)dx + \left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)dy$$

که دوباره، به‌عبارت (۲۵) منجر می‌شود.

با دیفرانسیل گیری مجدد، از رابطه‌های dr و $d\theta$، به‌دست می آید:

$$d^2r = -\sin\theta d\theta dx + \cos\theta d\theta dy =$$

$$= \frac{\sin^2\theta dx^2 - 2\sin\theta\cos\theta dx dy + \cos^2\theta dy^2}{r},$$

$$d^2\theta = \frac{-r(\cos\theta dx + \sin\theta dy)d\theta - (\cos\theta dy - \sin\theta dx)dr}{r^2} =$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta dx^2 - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)dx dy - 2\sin\theta\cos\theta dy^2}{r^2}$$

آن‌وقت، برای d^2z خواهیم داشت:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}dr\,d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}d\theta^2 + \frac{\partial z}{\partial r}d^2r + \frac{\partial z}{\partial\theta}d^2\theta =$$

$$= \Big(\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} +$$

$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)dx^2 + 2(\dots)dx dy + (\dots)dy^2$$

از آن‌جا، برای مشتق‌های دوم $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، ...، همان عبارت‌های قبلی پیدا می‌شود.

برای نمونه، این عبارت‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$W_1 = \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{zy}\Big)^2,\quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

به‌کمك رابطه‌هایی که پیدا کردیم، این عبارت‌ها، به‌این صورت درمی آیند:

$$W_1 = \Big(\frac{\partial z}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)^2,\quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

۲) عبور به مختصات کروی. نقشی که درصفحه به‌عهدهٔ مختصات قطبی است، درفضا، برعهدهٔ مختصات به اصطلاح کروی ρ و φ و θ قرارمی گیرد، که با مختصات قائم x، y، z، با رابطه‌های زیر، به‌هم مربوط می‌شوند:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z = \rho\cos\varphi$$

فرض کنیم که می‌خواهیم عبارت‌های زیر را، به‌متغیرهای ρ و φ و θ تبدیل کنیم:

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad W_2=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

که در آن، u عبارت است از یک تابع نقطه‌ای در فضا.

اگر تبدیل را به‌دو طریق انجام دهیم: ابتدا با فرض $x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$ (و z، بدون تغییر) و سپس، $z=\rho\cos\varphi$، $r=\rho\sin\varphi$ (و θ، بدون تغییر)، در آن صورت، می‌توان از نتیجه‌گیری‌های مثال ۱)، استفاده کرد.

مثلاً، برای عبارت دوم، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$W_2=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

عبارت درون پرانتز، براساس همان مثال ۱)، این طور نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

و بالاخره

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

که با درنظر گرفتن همهٔ این‌ها، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$W_2=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}+\frac{\cot g^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

و به‌همین ترتیب:

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$$

۳) ثابت کنید که عبارت‌های W_1 و W_2، ضمن هر تبدیل مختصات قائم، به‌مختصات قائم دیگر، شکل خود را حفظ می‌کنند:

$$x'=a_1x+b_1y+c_1z,\ y'=a_2x+b_2y+c_2z,\ z'=a_3x+b_3y+c_3z$$

که در آن‌ها، ضریب‌های a، b، c، در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$a_ia_j+b_ib_j+c_ic_j=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \qquad (۲۶)$$

روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌ها. اگر x و y و z را، متغیرهای مستقل به حساب آوریم، داریم:

$$dx'=a_1dx+b_1dy+c_1dz,\quad d^2x'=0$$
$$dy'=a_2dx+b_2dy+c_2dz,\quad d^2y'=0$$
$$dz'=a_3dx+b_3dy+c_3dz,\quad d^2z'=0$$

آن‌گاه

$$du=\frac{\partial u}{\partial x'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)+\frac{\partial u}{\partial y'}(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+$$
$$\frac{\partial u}{\partial z'}(a_3dx+b_3dy+c_3dz)$$

از آن جا

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_1\frac{\partial u}{\partial x'}+a_2\frac{\partial u}{\partial y'}+a_3\frac{\partial u}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=b_1\frac{\partial u}{\partial x'}+b_2\frac{\partial u}{\partial y'}+b_3\frac{\partial u}{\partial z'},\ \frac{\partial u}{\partial z}=c_1\frac{\partial u}{\partial x'}+c_2\frac{\partial u}{\partial y'}+c_3\frac{\partial u}{\partial z'}$$

که با مجذور کردن و جمع آن‌ها، بنا به (۲۶)، نتیجه می‌شود:

$$W_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2$$

و سپس

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x'^2}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)^2+$$
$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x'\partial y'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+\cdots$$

عبارت $W_۲$، عبارت است ازمجموع ضریب‌هـای $dx^۲$، $dy^۲$ و $dz^۲$ و، بـه‌کمك (۲۶)، بدون اشکال، ثابت می‌شود:

$$W_۲=\frac{\partial^۲u}{\partial x'^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial y'^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial z'^۲}$$

۴) معادلهٔ

$$x^۲\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}+y^۲\frac{\partial^۲w}{\partial y^۲}+z^۲\frac{\partial^۲w}{\partial z^۲}+yz\frac{\partial^۲w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^۲w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^۲w}{\partial x\partial y}=۰$$

را، از روی رابطه‌های $x=uv$، $y=vt$، $z=tu$، به‌متغیرهای جدید، تبدیل کنید.

روش مستقیم. با در نظر گرفتن t، u و v، به‌عنوان متغیرهای مستقل، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}u,\ \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}v+\frac{\partial w}{\partial z}t,\ \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}t$$

ازآن جا

$$x\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{۱}{۲}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{۱}{۲}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{۱}{۲}v\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{۱}{۲}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{۱}{۲}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{۱}{۲}v\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$z\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{۱}{۲}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{۱}{۲}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{۱}{۲}v\frac{\partial w}{\partial v}$$

سپس

$$x^۲\frac{\partial^۲w}{\partial x^۲}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}-w\right)=$$

$$=x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{۱}{۲}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{۱}{۲}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{۱}{۲}v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)=$$

$$=\frac{۱}{۴}t^۲\frac{\partial^۲w}{\partial t^۲}+\frac{۱}{۴}u^۲\frac{\partial^۲w}{\partial u^۲}+\frac{۱}{۴}v^۲\frac{\partial^۲w}{\partial v^۲}+\frac{۱}{۲}uv\frac{\partial^۲w}{\partial u\partial v}-$$

$$-\frac{۱}{۲}vt\frac{\partial^۲w}{\partial v\partial t}-\frac{۱}{۲}tu\frac{\partial^۲w}{\partial t\partial u}+\frac{۳}{۴}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{۱}{۴}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{۱}{۴}v\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$yz\frac{\partial^۲w}{\partial y\partial z}=z\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial w}{\partial y}\right)=z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{۱}{۲}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{۱}{۲}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{۱}{۲}v\frac{\partial w}{\partial v}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۴}t^۲\frac{\partial^۲w}{\partial t^۲}-\frac{۱}{۴}u^۲\frac{\partial^۲w}{\partial u^۲}-\frac{۱}{۴}v^۲\frac{\partial^۲w}{\partial v^۲}+\frac{۱}{۲}uv\frac{\partial^۲w}{\partial u\partial v}+$$

$$+\frac{۱}{۴}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{۱}{۴}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{۱}{۴}v\frac{\partial w}{\partial v}$$

وغیره. اگر جمله‌های متشابه را جمع کنیم (وازضریب‌های عددی بگذریم)، تبدیل شدهٔ معادله را، به‌صورت زیر، به‌دست می‌آوریم:

$$t^۲\frac{\partial^۲w}{\partial t^۲}+u^۲\frac{\partial^۲w}{\partial u^۲}+v^۲\frac{\partial^۲w}{\partial v^۲}=۰$$

تا این‌جا، به‌مثال‌هایی پرداختیم که تنها، با تغییرمتغیرهای مستقل سروکارداشتند. حالا، مثال‌هایی می‌آوریم که شامل تغییرتابع‌ها هم، باشند.

۵) معادلهٔ $x^۲\frac{\partial z}{\partial x}+y^۲\frac{\partial z}{\partial y}=z^۲$ را، با فرض‌های زیر، تبدیل کنید:

$$x=t\,,\ y=\frac{t}{۱+tu}\,,\ z=\frac{t}{۱+tv}$$

روش مستقیم. متغیرهای مستقل، عبارتند از t و u. از رابطهٔ سوم، نسبت به t و نسبت به u، با درنظر گرفتن z و v به‌عنوان تابع‌هایی از t و u (اولی با واسطهٔ x و y)، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{۱}{(۱+tu)^۲}=\frac{۱-t^۲\frac{\partial v}{\partial t}}{(۱+tv)^۲}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{-t^۲}{(۱+tu)^۲}=-\frac{-t^۲}{(۱+tv)^۲}\frac{\partial v}{\partial u}$$

از آن جا

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{(۱+tv)^۲}\left(۱-t^۲\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial u}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(۱+tu)^۲\partial v}{(۱+tv)^۲\partial u},$$

معادلهٔ تبدیل شده، پس از ساده کردن، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

همین مسأله را، با روش دیگری هم، حل می‌کنیم.

روش معکوس. به‌کمک رابطه‌های تبدیل، متغیرهای جدید را، برحسب متغیرهای قدیم، بیان می‌کنیم:

$$t=x,\ u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ v=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

و x و y را، متغیرهای مستقل به‌حساب می‌آوریم. از رابطهٔ سوم، نسبت به x و نسبت به y، مشتق می‌گیریم (v، با واسطهٔ t و u، به‌آن‌ها بستگی دارد). داریم:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{x^2},\quad -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{y^2},$$

یا

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial v}{\partial u}\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial v}{\partial u},\ldots$$

۶) عبارت

$$W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

را به‌متغیرهای $t=x+y$، $u=\frac{y}{x}$، $v=\frac{z}{x}$ تبدیل کنید.

روش محاسبهٔ دیفرانسیل‌ها. x و y، متغیرهای مستقل‌اند. از رابطه‌های تبدیل، دیفرانسیل می‌گیریم:

$$dt=dx+dy,\ du=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy,\ dv=-\frac{z}{x^2}dx+\frac{1}{x}dz$$

اگر v را مانند تابعی از x و y، با واسطهٔ t و u، درنظر بگیریم، دیفرانسیل dv این‌طور نوشته می‌شود:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial u}du=\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)$$

با مقایسهٔ دو عبارت dv، نتیجه می‌شود:

$$dz=\frac{z}{x}dx+x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx+dy\right)$$

حالا، به‌دیفرانسیل‌های دوم، از متغیرهای جدید، می‌پردازیم:

$$d^2t=0,\qquad d^2u=\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dxdy,$$

$$d^2v=-\frac{2}{x^2}dxdz+\frac{2z}{x^3}dx^2+\frac{1}{x}d^2z$$

از طرف دیگر

$$d^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt_2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial u}dtdu+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial v}{\partial t}d^2t+\frac{\partial v}{\partial u}d^2u=$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)^2+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dxdy\right)$$

اگر، دو عبارتی را که برای d^2v به‌دست آوردیم، برابر قرار دهیم و dz را، با عبارت حاصل در بالا، تعویض کنیم، به‌این برابری، برای d^2z می‌رسیم:

$$d^2z=$$

$$=\frac{2dx}{x}\left[\frac{z}{x}dx+x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx+dy\right)\right]-\frac{2z}{x^2}dx^2+$$

$$+x\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)^2+\frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dxdy\right)\Bigg]$$

از این‌جا، می‌توان مشتق‌های $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ را، به عنوان ضریب‌های dx^2، $2dxdy$، dy^2، تعیین کرد. ولی نتیجهٔ لازم را، می‌توان ساده‌تر به‌دست آورد؛ با توجه به‌این‌که d^2z، با اختیار $dx = 1$ و $dy = -1$ به W تبدیل می‌شود. ازاین راه، خواهیم داشت:

$$W = \frac{(x+y)^2}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{(1+u)^3}{t} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$$

۷) تبدیل لژاندر. شبیه ۵)، **۲۱۸**، در این‌جا هم، تبدیل لژاندر را، به عنوان مثالی برای تبدیل کلی‌تر می‌آوریم، یعنی حالتی که، رابطه‌های بین متغیرهای قدیم وجدید، شامل مشتق‌ها هم باشند. فرض می‌کنیم:

$$t = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad u = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad v = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$$

با در نظر گرفتن z، به‌عنوان تابعی معین از x و y: $z = f(x,y)$، آن‌را، طوری فرض می‌کنیم که داشته باشیم:

$$J = \frac{D(t,u)}{D(x,y)} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \neq 0 \qquad (۲۷)$$

از رابطهٔ سوم‌تبدیل، نسبت به x و نسبت به y، مشتق می‌گیریم (ضمناً v را همچون تابعی از x و y، با واسطهٔ t و u، به‌حساب می‌آوریم)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

از آن‌جا

$$x = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad y = \frac{\partial v}{\partial u}, \quad \text{(و در نتیجه)}: z = t\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial u} - v \qquad (۲۸)$$

یعنی، تبدیل دارای خصلت دوجانبه است.

اگر از دو رابطهٔ اول (۲۸)، ابتدا نسبت به x و سپس نسبت به y، مشتق بگیریم،

به‌معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$۱=\frac{\partial^۲v}{\partial t^۲}\frac{\partial^۲z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲v}{\partial t\partial u}\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y},\qquad ۰=\frac{\partial^۲v}{\partial t\partial u}\frac{\partial^۲z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲v}{\partial u^۲}\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}$$

و

$$۰=\frac{\partial^۲v}{\partial t^۲}\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^۲v}{\partial t\partial u}\frac{\partial^۲z}{\partial y^۲},\qquad ۱=\frac{\partial^۲v}{\partial t\partial u}\frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^۲v}{\partial u^۲}\frac{\partial^۲z}{\partial y^۲}$$

از آن‌جا که [۲۰۳، (۴)]:

$$I=\frac{\partial^۲v}{\partial t^۲}\cdot\frac{\partial^۲v}{\partial u^۲}-\left(\frac{\partial^۲v}{\partial t\,\partial u}\right)^۲=\frac{D(x,y)}{D(t,u)}=\frac{۱}{J}\neq ۰$$

بنابراین، از این معادله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^۲z}{\partial x^۲}=\frac{\dfrac{\partial^۲v}{\partial u^۲}}{I},\qquad \frac{\partial^۲z}{\partial x\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial^۲v}{\partial t\partial u}}{I},\qquad \frac{\partial^۲z}{\partial y^۲}=\frac{\dfrac{\partial^۲v}{\partial t^۲}}{I}$$

اگر x، y، z و t، u، v، به‌عنوان مختصات نقطه‌هایی از فضا در نظر گرفته شود، آن‌وقت، تبدیل لژاندر را می‌توان مانند تبدیل فضا (ولی، نه‌نقطه‌ای) به‌حساب آورد. در این تبدیل، سطحی که با رابطهٔ بین z و x، y معین می‌شود، به سطحی تبدیل می‌شود که رابطهٔ بین v و t، u، معرف آن است، زیرا t، u، v، $\dfrac{\partial v}{\partial u}$، $\dfrac{\partial v}{\partial t}$، تنها بستگی به x، y، z، $\dfrac{\partial z}{\partial x}$، $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ دارند. بنابراین، تبدیل لژاندر، تماس را حفظ می‌کند.*

۸) تبدیل لژاندر را، به‌سادگی، می‌توان، برای حالت فضائی با تعداد دلخواه بعدها، تعمیم داد. فرض کنیم که z تابعی از $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n باشد و، ضمناً، فرض کنیم:

$$t_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\ (i=۱,۲,\dots,n),\qquad v=\sum_{i=۱}^{n}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}-z$$

در این‌جا، v تابع جدید از متغیرهای جدید $t_۱$، $t_۲$، ...، t_n می‌باشد.

---

* پاورقی مربوط به‌انتهای شمارهٔ **۲۱۸** (صفحهٔ ۶۱۴) را، در این‌جا هم، می‌توان تکرار کرد.

در این‌جا نیز، فرض می‌کنیم که دترمینان

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است.

از رابطه‌ای که v را معین می‌کند، نسبت به x_k مشتق می‌گیریم (ضمناً، باید v را تابعی از x_1، ...، x_n، با واسطهٔ t_1، ...، t_n، دانست):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial t_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

از این‌جا، با توجه به $J \neq 0$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

به‌این ترتیب، همچنین

$$z = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v$$

به‌طوری که در حالت کلی‌هم، تبدیل دارای خصلت دوجانبه است.

۹) در پایان، مثالی را می‌آوریم، که ویژگی خاصی دارد. فرض کنیم

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n;\ x_1, \ldots, x_n)$$

تابعی از $2n$ متغیر و همگن از مرتبهٔ دوم، نسبت به متغیرهای x_1، ...، x_n باشد. با فرض این که

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \cdots \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \cdots \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_2} \cdots \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است، فرض می‌کنیم:

$$t_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

و t_1، ...، t_n را، به‌عنوان متغیرهای مستقل جدید، بـه‌جای x_1، ...، x_n وارد می‌کنیم. در این‌صورت، تابع φ، به‌تابعی مثل

$$\psi(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n)$$

تبدیل می‌شود. ثابت کنید:

$$\text{(a)}\ \frac{\partial\psi}{\partial t_i}=x_i, \quad \text{(b)}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_i}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (i=1, \ldots, n)$$

از $\psi=\varphi$، بادرنظر گرفتن ψ، به‌عنوان تابعی‌از x_1، ...، x_n (با واسطهٔ t_1، ...، t_n) نسبت به x_k، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial t_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k} \quad (k=1, \ldots, n)$$

از طرف دیگر، مشتق $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$، نسبت به متغیرهـای x_1، ...، x_n، تابعی است همگن از مرتبهٔ اول. در این‌صورت، بنابه رابطهٔ اولر [۱۸۸]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_i} \quad (k=1, \ldots, n)$$

با مقایسهٔ دو مقدار حاصل، برای $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$، و با توجه به $H\neq 0$، درستی رابطهٔ (a) را نتیجه می‌گیریم.

اگر نسبت به u_i مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial t_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial u_i}$$

ولی $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$، به‌روشنی، تابعی است همگن از مرتبهٔ دوم، نسبت به‌متغیرهای x_1، ...، x_n. اگر دوباره از رابطهٔ اولر استفاده کنیم، می‌بینیم که برای مجموع آخر داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right) x_i = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$$

که از آن‌جا، رابطهٔ (b) نتیجه می‌شود.

MATH75.IR

فصل هفتم

کاربرد محاسبهٔ دیفرانسیلی در هندسه

§۱. نمایش تحلیلی منحنی‌ها و سطح‌ها

۲۲۳. منحنی‌ها بر صفحه (در دستگاه مختصات قائم). در این فصل، دربارهٔ برخی از کاربردهای مفهوم‌ها، حقیقت‌ها و روش‌هایی که برای محاسبهٔ دیفرانسیلی آموخته‌ایم، در هندسه، بحث می‌کنیم. [با بعضی از این کاربردها، قبلاً هم، در شماره‌های ۹۱، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۸ و ۱۸۰، برخورد داشتیم].

بی‌فایده نمی‌دانیم که، قبلاً، امکان‌های مختلفی را، که برای نمایش تحلیلی منحنی‌ها و سطح‌ها وجود دارد، به‌یادخواننده بیاوریم: §۱، به‌این‌موضوع اختصاص داده شده‌است. از پیش قید می‌کنیم که، تابع‌های مورد مطالعهٔ ما در این فصل، معمولاً، پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته، نسبت به آوندهای خود، فرض می‌شوند. درصورت لزوم، وجود و پیوستگی مشتق‌های بعدی را هم، به‌شرط‌های خود، اضافه خواهیم کرد.

از منحنی‌های مسطح، آغاز می‌کنیم، ضمناً، مبنای کار خود را، بریك دستگاه مختصات قائم Oxy قرار می‌هیم.

قبلاً هم، بارها، معادله‌ای به‌صورت

$$y=f(x) \text{ یا } x=g(y) \qquad (۱)$$

را بررسی کرده‌ایم و منحنی‌های نظیر آن‌ها را، مورد مطالعه قرار داده‌ایم [۴۷، ۹۱، ۱۴۶ و ...]. وقتی که‌منحنی به‌این‌صورت مشخص شده باشد، یعنی وقتی که یکی از مختصات نقطهٔ متغیر آن، بـه صورت تابعی صریح (و یك ارزشی) از مختص دیگر آن داده شده بـاشد، می‌گوییم که منحنی، به‌صورتی صریح مشخص شده است (یا نمایش داده شده است). این نوع‌منحنی، هم ساده است و هم عینی، و به‌طوری که خواهیم دید، هر نوع دیگری ازبیان تحلیلی منحنی را می‌توان، به مفهومی، به همین بیان درآورد.

در ارتباط با نظریهٔ تابع‌های ضمنی، برای ما این امکان پیش آمد که دربارهٔ فرض

ضمنی منحنی‌ها نیز صحبت کنیم، یعنی دربارهٔ نمایش یك منحنی، که با معادله‌ای به‌صورت زیر مشخص شده است:

$$F(x, y) = 0 \qquad (۲)$$

که‌نسبت به‌x یا نسبت به y، حل‌نشده است [۲۰۵ و ...]. چنین معادله‌ای‌را، معادلهٔ‌ضمنی منحنی گویند.

از قضیه‌های مربوط بـه‌تابع‌های ضمنی [۲۰۵، ۲۰۶] نتیجه می‌شود، اگر در نقطهٔ (x_0, y_0) از منحنی، شرط

$$F'_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{یا} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

برقرار باشد، دست‌کم در همسایگی این نقطه، منحنی را می‌توان، به یکی از صورت‌های (۱)، نمایش‌داد (ضمناً، تابع‌های f یا g، همراه با مشتق‌های خود، پیوسته‌اند).

به‌این ترتیب، تنها درچنان‌نقطهٔ (x_0, y_0) ازمنحنی، نمی‌توان منحنی را،درهمسایگی این نقطه، به‌صورت صریح (این و یا آن صورت) بیان‌کرد، که در آن‌جا، دوشرط

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \; F'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (۳)$$

با هم، برقرار باشد. به‌چنین نقطه‌هایی ــ که در معادله‌های (۳) صدق می‌کنند ــ نقطه‌های خاص گویند.

بعداً [۲۳۶]، به مسالهٔ مربوط به رفتار منحنی (۲)، در نزدیکـی نقطه‌های خاص، خواهیم پرداخت، ولی معمولاً، نقطه‌های خاص را از بررسی خارج می‌کنیم و، منحنی را، تنها درهمسایگی نقطه‌های معمولی (یعنی نقطه‌های غیرخاص) آن، مطالعه خواهیم‌کرد.

بالاخره، بازهم دربحث‌های قبلی، به‌این مورداشاره‌کرده‌ایم‌که، معادله‌های‌به‌صورت

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \qquad (۴)$$

هم، که معرف بستگی مختصات نقطه به پارامتر t هستند، وضع منحنی را برصفحه، مشخص می‌کنند [به‌عنوان مثال، ۱۰۶ را ببینید]. این‌گونه معادله‌ها را پاراهتری می‌نامند و معرف نمایش پاراهتری منحنی هستند.

نقطهٔ (x_0, y_0) را، که متناظر با $t = t_0$ پارامتر است، درنظرمی‌گیریم وفرض‌می‌کنیم که به‌ازای $t = t_0$ داشته باشیم $\varphi'(t_0) \neq 0$، آن‌گاه، درنزدیکی این مقدار t، علامت‌مشتق $x'_t = \varphi'(t)$ ــ بنا به پیوستگی ــ تغییرنخواهدکرد و تابع $x = \varphi(t)$ یکنوا می‌شود [۱۳۲]. با توجه به این شرط‌ها، بنا به ۸۳ و ۹۴، می‌توان t را همچون تابعی یك ارزشی از x در نظر گرفت: $t = \theta(x)$، که پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته است. با قرار دادن این‌تابع

به‌جای t، درعبارت y، بستگی y به x، مستقیماً، به‌دست می‌آید:

$$y=\psi(\theta(x))=f(x)$$

که در آن، بازهم، تابع f همراه با مشتق‌های خود، پیوسته است. به‌این‌ترتیب، دست‌کم بخشی از منحنی را که به‌نقطهٔ مفروض متصل است، می‌توانیم بامعادله‌ای صریح بیان کنیم. به‌همین‌ترتیب، اگر داشته باشیم: $\varphi'(t_0)=0$ ولی $\psi'(t_0)\neq 0$، می‌توان به‌نتیجهٔ مشابهی رسید، تنها بااین تفاوت که، معادلهٔ صریح به‌صورت دیگری به‌دست می‌آید: $x=g(y)$.

تنها درحالتی که، به‌طور همزمان، داشته باشیم:

$$x'_t=\varphi'(t_0)=0,\quad y'_t=\psi'(t_0)=0 \qquad (5)$$

ممکن است در همسایگی نقطهٔ مفروض، نتوان به معادله‌ای صریح رسید. چنین نقطه‌ای را، خاص می‌نامیم.

در شمارهٔ **۲۳۷**، به اختصار، شکل منحنی (۴) را، در نزدیکی نقطهٔ خاص، مطالعه خواهیم کرد، ولی، به‌طورمعمول، درآن‌جاهم، بررسی‌ما، روی نقطه‌های عادی خواهدبود.

ذکر این نکته مهم است، که همهٔ آن‌چه دربارهٔ نقطهٔ عادی (x_0, y_0) گفته شد، یعنی نقطه‌ای که برای آن برابری‌های (۵) برقرار نباشد، باز هم فرض می‌شود که این نقطه، تنها به ازای یك مقدار پارامتر $t=t_0$ به‌دست می‌آید (یعنی، به اصطلاح، نقطه‌ای ساده است). اگربرعکس، نقطهٔ (x_0, y_0)، تکراری و، مثلاً، متناظر دو مقدار مختلف $t=t_0$ و $t=t_1$ باشد، درآن‌صورت، در این‌نقطه، در حالت کلی، دوشاخهٔ منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند: یکی ازمنحنی‌ها، بامقدارهای t نزدیك به t_0 معین می‌شود و دیگری با مقدارهای t، نزدیك به t_1. با وجود این، در این حالت، نمی‌توان تمامی منحنی را در همسایگی نقطهٔ مفروض، بامعادله‌ای صریح نشان داد. به این ترتیب، نقطه‌های تکراری را هم باید، اساساً، جزو نقطه‌های خاص به حساب آورد.*

ازآن‌چه گفتیم، نتیجه بگیریم. ما تلاش نکردیم، خصلت هندسی مفهوم منحنی را توضیح بدهیم: برای‌ما، منحنی عبارت‌است ازمکان هندسی نقطه‌هایی که، به‌صورت‌تحلیلی

---

*) حالتی وجود دارد که نقطه‌ای دوبار به‌دست می‌آید، ولی با وجود این، تکراری به‌حساب نمی‌آید، این حالت، وقتی پیش می‌آید که، این نقطه، متناظر بادو مقدار انتهایی پارامتر باشد، جائی که، درآن، منحنی به‌هم می‌پیوندد. مثلاً در دایرهٔ

$$x=a.\cos\theta,\quad y=a.\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

چنین نقطه‌ای با مقدارهای $\theta=0$ و $\theta=2\pi$، معین می‌شود.

در رابطه‌های (۱)، (۲) یا (۴) ـ بافرض پیوستگی تابع‌های موردنظر و مشتق‌های آن‌ها ـ صدق می‌کنند. درست است که سیمای شکل‌های هندسی، در حالت‌های مختلفی که با معادله‌هایی با شیوه‌های گوناگون داده شده است، ممکن است، به کلی باهم فرق داشته باشند، ولی، دست‌کم درهمسایگی نقطه‌های عادی (و درحالت پارامتری، درهمسایگی نقطه‌های ساده)، همهٔ آن‌ها، با شکل‌های ساده‌ای شباهت دارند، که با معادله‌های به صورت (۱)، مشخص شده‌اند.

۲۲۴. مثال‌ها، به‌بررسی منحنی‌هایی می‌پردازیم که، بیش از همه، به‌آن‌ها برخورد می‌کنیم (اغلب آن‌ها را، خواننده، از هندسهٔ تحلیلی می‌شناسد).

۱) منحنی زنجیری (شکل ۴۱). معادلهٔ آن، چنین است:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

تعادل یك نخ‌وزین (زنجیر، سیم وچیزی مشابه‌آن‌ها) که انعطاف‌پذیر باشد و، بدون کشش، از دو انتهای خودآویزان شده باشد، شکل این منحنی را مجسم می‌کند.

شکل منحنی، در نزدیکی راس A (شکل‌را ببینید)، یادآور سهمی است ولی، بادور شدن از راس، منحنی با شیب تندتر، متوجه بی‌نهایت می‌شود. پاره خط $OA=a$، به‌طور دقیق‌تر، شکل آن را معین می‌کند: هرچه a کوچکتر باشد، به‌همان اندازه شیب منحنی تندتر است. وضعی از منحنی، که در شکل داده شده است، به‌هیچ‌وجه، حتمی نیست، ولی، این امکان را به‌وجود می‌آورد که معادلهٔ منحنی را، به‌ساده‌ترین صورت خود، بدهیم.

۲) بیضی، وقتی که نسبت به‌محورهای متقارن باشد، به‌این معادلهٔ است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

با توجه به این‌که مجموع مجذورهای $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{b}$ برابراست باواحد، طبیعی است که‌می‌توانیم آن‌هارا، به‌ترتیب، برابر کسینوس وسینوس یك زاویهٔ t بگیریم. ازاین‌راه، به معادله‌های پارامتری عادی، برای بیضی، می‌رسیم:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

وقتی که متغیر t، از ۰ تا 2π، تغییر کند، بیضی، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، باآغاز از انتهای $A(a, 0)$ محور بزرگتر، رسم می‌شود.

می‌شد ازعبارت دیگری‌استفاده کرد که، مجموع مجذورهای آن‌ها، برابر واحد باشد. مثلاً فرض کرد:

$$x=a.\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad y=b.\frac{2u}{1+u^2}$$

که در آن، u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. از آن‌جا که، وقتی $u\to\pm\infty$ به‌دست می‌آید: $x\to -a$ و $y\to 0$، بنابراین، می‌توان فرض کرد که نقطهٔ $A'(-a,0)$، به‌ازای $u=\pm\infty$ پیدا می‌شود.

به‌همین ترتیب، در مورد هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

با به‌خاطر آوردن رابطه‌های مربوط به‌کسینوس و سینوس هیپربولیك، می‌توان فرض کرد:

$$x=a.\mathrm{ch}t,\quad y=b.\mathrm{sh}t\quad(-\infty<t<+\infty)$$

همین منحنی را، با معادله‌های زیرهم، می‌توان نشان داد:

$$x=a\frac{1+u^2}{1-u^2},\quad y=b\frac{2u}{1-u^2}\quad(-\infty<u<+\infty;\ u\neq\pm1)$$

به خواننده توصیه می‌شود که، در دو حالت، حرکت نقطه را برروی منحنی، وقتی که پارامتر تغییر می‌کند، دنبال کند

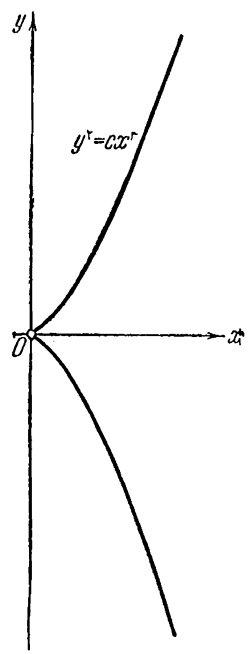
۳) سهمی نیمه مکعبی. (شکل ۱۱۵).

$$y^2-cx^3=0\quad(c>0)$$

در این‌جا، نقطهٔ مبداء $(0,0)$، یك نقطهٔ خاص است. اگر معادله را نسبت به y حل کنیم، معادلهٔ صریح دو شاخهٔ متقارن منحنی به‌دست می‌آید:

$$y=\pm\sqrt{cx^3}=\pm\sqrt{c}.x^{\frac{3}{2}}$$

چون به‌ازای $x=0$، برای هردو معادله داریم: $y'=0$، بنابراین هر دو شاخه، در مبداء مختصات، بر محور x مماس‌اند و، در آن‌جا، نقطهٔ راس مانندی، وجود دارد [نقطهٔ برگشت، **۲۳۶** را ببینید].



شکل ۱۱۵

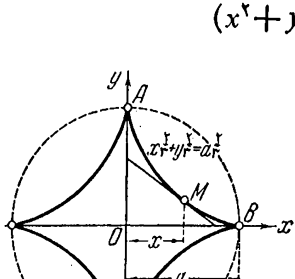
۴) آستروئید (شکل ۱۱۶)

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}} \qquad (a>۰)$$

معادله، به‌صورتی که‌داده شده است،، برای بررسی، کاملاً، مناسب نیست: در هر کدام از نقطه‌های $(۰\ ،\pm a)$ و $(\pm a\ ،۰)$، یکی از مشتق‌های نسبی سمت چپ معادله، به‌سمت ∞ میل می‌کند. ضمناً، بدون هیچ زحمتی، می‌توان معادله را از حالت گنگ بیرون آورد و به این‌صورت نوشت:

$$(x^۲+y^۲-a^۲)^۳+۲۷a^۲x^۲y^۲=۰$$

که در آن، نقطه‌های نامبرده، به‌صورت نقطه‌های خاص درمی‌آیند.



شکل ۱۱۶

از معادلهٔ منحنی دیده می‌شود که منحنی، در درون دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ قرار دارد و، نسبت به‌هردومحور، متقارن است. به‌این دلیل، کافی است که تنها درمورد ربع اول بحث کنیم. اگر معادله را نسبت به y، حل کنیم:

$$y=(a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$$

و مشتق آن‌را به‌دست آوریم:

$$y'=-(a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}\cdot x^{-\frac{۱}{۳}}$$

می‌بینیم که به‌ازای $x=۰$، مماس قائم و، به ازای $x=a$، مماس افقی دارد. از این‌جا، نتیجه می‌گیریم که، در هر چهار نقطهٔ خاص، نقطهٔ راس مانند (نقطهٔ برگشت) داریم.

اگر بخواهیم نمایش پارامتری آستروئید (منحنی ستاره‌ای) را به‌دست آوریم، ازاین نکته استفاده می‌کنیم که ــ بنابر معادلهٔ منحنی ــ باید مجموع مجذورهای دو عبارت $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ و $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ برابر واحد شود. بنابراین، اگر این دو عبارت را، به ترتیب، با $cost$ و $sint$ نشان دهیم، به چنین معادلهٔ پارامتری می‌رسیم:

$$x=acos^۳t,\ y=asin^۳t \quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

از آن‌جا که مشتق‌های

$$x'_t=-۳acos^۲tsint \text{ و } y'_t=۳asin^۲tcost$$

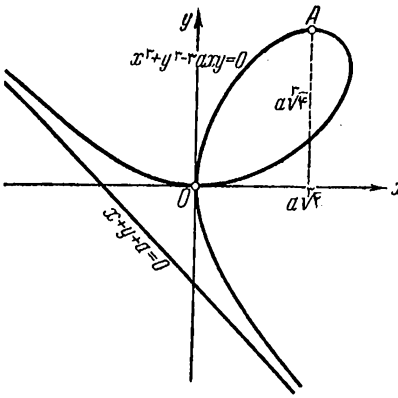
هردو، به‌ازای $t=۰(۲\pi)$، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، برابر صفر می‌شوند، بنابراین، این مقدارهای پارامتر نظیر همان نقطه‌های خاصی می‌شوند، که قبلاً از آن‌ها یاد کردیم.

۵) برگ دکارتی (شکل ۱۱۷)

$$x^3+y^3-3axy=0^* \quad (a>0)$$

مبداء مختصات $(0,0)$، نقطهٔ خاص است در این نقطه منحنی خودش را قطع می‌کند. منحنی دارای مجانب $x+y+a=0$ است: هم به ازای $x\to+\infty$ و هم به ازای $x\to-\infty$.

برای این که این مطلب را بفهمیم، معادله را، جمله به جمله، بر x^3 تقسیم می‌کنیم:



شکل ۱۱۷

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3=3a.\frac{y}{x}.\frac{1}{x}-1$$

از این‌جا، قبل از هر چیز می‌توان نتیجه گرفت که، به ازای $|x|>3a$، مقدار $\left|\frac{y}{x}\right|$ محدود می‌ماند و، آن‌وقت، روشن است که به‌ازای $x\to\pm\infty$، نسبت $\frac{y}{x}$ به سمت -1 میل می‌کند. از طرف دیگر، از معادله داریم:

$$y+x=\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}=\frac{3a.\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

به‌طوری که به‌ازای $x\to\pm\infty$، خواهیم داشت $y+x\to-a$. و به‌این ترتیب، برای مجانب، همان معادله، به‌دست می‌آید [۱۴۸].

با واردکردن نسبت $t=\frac{y}{x}$، به عنوان پارامتر، و گذاشتن $y=tx$ در معادله، به‌سادگی، نمایش پارامتری منحنی به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\ y=\frac{3at^2}{t^3+1} \qquad (-\infty<t<+\infty;\ t\neq-1)$$

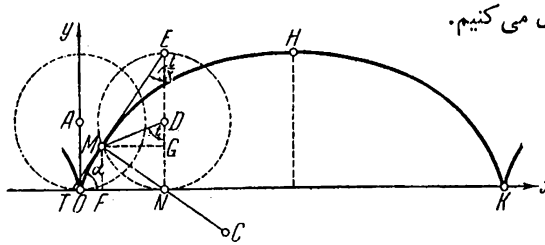
---

*) مثال ۲)، ۲۱۰ را ببینید. نقطهٔ $A(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$، نظیر ماکزیمم y (y، به‌عنوان تابعی از x) روی شکل دیده می‌شود.

وقتی $t \to \pm\infty$، هر دو مختص به سمت ۰ میل می‌کنند. نقطهٔ مبداء (۰ ،۰) را، هم به‌ازای $t = 0$ و هم به‌ازای $t = \pm\infty$، می‌توان به‌دست آورد. وقتی t، از $\infty-$ تا $1-$ تغییر کند، نقطهٔ (x, y)، با آغاز از مبداء، درطول شاخهٔ راست تا بی‌نهایت، دور می‌شود، وقتی t از $1-$ تا ۰ تغییر کند، این نقطه، در طول شاخهٔ چپ، از بی‌نهایت، به‌سمت مبداء می‌رود. بالاخره، وقتی t از ۰ تا $\infty+$ تغییر کند، نقطه (درجهت خلاف حرکت‌عقربه‌های ساعت)، حلقه را می‌پیماید.

۲۲۵. منحنی‌هایی‌که سرچشمهٔ مکانیکی دارند. مثال‌ها را ادامه می‌دهیم و به بررسی برخی از منحنی‌ها می‌پردازیم‌که سرچشمهٔ مکانیکی دارنـد و از راه غلتیدن بعضی منحنی بر بعضی دیگر، به‌دست می‌آیند.

۶) سیکلوئید (چرخ زاد). فرض‌کنیم، دایره‌ای به‌شعاع a و به‌مرکز A، روی‌خـط راست ox، بدون لغزش می‌غلتد (شکل۱۱۸). منحنی که، ضمن‌این غلتیدن، به‌وسیلهٔ یك‌نقطهٔ معین‌از دایره، رسم می‌شود، سیکلوئید نام‌دارد مثلاً، مسیر نقطهٔ o را، وقتی‌که دایره‌یك‌دور کامل بچرخد، دنبال می‌کنیم.



شکل ۱۱۸

دایرهٔ‌چرخنده را، در وضع‌تازه‌ای، در نظرمی‌گیریم. نقطهٔ تماس باox، نقطهٔ‌دیگری مثل N است؛ به این ترتیب، نقطه تماس، به‌اندازهٔ فاصلهٔ ON، روی خط، منتقل شده‌است. درهمین زمان، نقطهٔ O، به موضع M جا به‌جا شده و مسیر NM را بر محیط دایره پیموده است. ازآن‌جا که، غلت، بدون لغزش، انجام می‌شود، این مسیرها برابرند:

$$\overset{\frown}{NM} = ON$$

حالا، اگر زاویهٔ $t = \widehat{NDM}$ را به‌عنوان پارامتر، درنظربگیریم (که وضع نقطه‌را مشخص می‌کند)؛ اگر شعاع DM را به اندازهٔ این زاویه برگشت دهیم، بـه وضع اولیهٔ خود، که به‌صورت قائم AO بود، برمی‌گردد. بنابراین، مختصات x و y نقطهٔ M، به این ترتیب، بیان می‌شوند:

$$x = OF = ON - FN = \overset{\frown}{NM} - MG = at - a\sin t,$$

$$y = FM = NG = ND - GD = a - a\cos t$$

به‌این‌ترتیب، معادله‌های پارامتری سیکلوئید، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

وقتی‌که t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، یک منحنی به‌دست می‌آیدکه شامل مجموعه‌ای نامتناهی از شاخه‌هایی است‌که درشکل ۱۱۸ نشان داده شده است.

چون، مشتق‌های

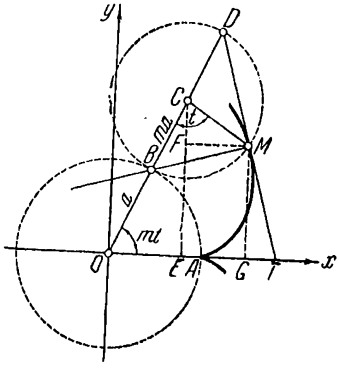
$$x'_t = a(1 - \cos t),\ y'_t = a\sin t$$

به‌طورهم‌زمان، به‌ازای $t = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) برابرصفرمی‌شوند، بنابراین، این مقدارها، متناظرند با نقطه‌های خاص منحنی. ولی [۱۰۶، (۱۰)]

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$$

به‌نحوی‌که به‌ازای $t \to \pm 0$ (یا به‌ازای $x \to \pm 0$)، مشتق y'_x به‌سمت $\pm\infty$ میل خواهدکرد و، روشن است،که در نقطه مبداء (مثل سایر نقطه‌های خاص)، مماس بر منحنی، قائم است: در این‌جا، نقطهٔ راس مانند (نقطهٔ برگشت یا بازگشت، **۲۳۷**] وجود دارد.

۷) اپی سیکلوئید و هیپوسیکلوئید (برون چرخ‌زاد و درون چرخ‌زاد). اگر دایره‌ای، بدون لغزش، از بیرون، روی دایرهٔ دیگری بغلتد، آن‌گاه، منحنی را،که به وسیلهٔ یک نقطه از دایرهٔ متحرک رسم می‌شود، اپی‌سیکلوئید (برون چرخ‌زاد) گویند. درحالتی‌که دایره‌ای از درون، روی دایرهٔ دیگر بغلتد، با یک هیپوسیکلوئید (درون چرخ‌زاد)، سروکار خواهیم داشت. سعی می‌کنیم، معادلهٔ منحنی را، درحالت اول، پیدا کنیم.



شکل ۱۱۹

مبداء مختصات را، درمرکز O دایرهٔ ثابت، اختیار می‌کنیم و محور x را از نقطه A (نقطهٔ تماس دو دایره) می‌گذرانیم (شکل ۱۱۹). وقتی که دایرهٔ متحرک، در وضع جدیدی‌که در شکل نشان داده شده است، قرار گیرد، نقطهٔ A به نقطهٔ M می‌رسد. می‌خواهیم، مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنیم.

شعاع دایرهٔ ثابت را a، و شعاع دایرهٔ متحرک را ma می‌گیریم. برای پارامتر،

$t=\widehat{MCB}$، زاویهٔ بین شعاع CM، که مرکز دایرهٔ متحرك را به نقطه مورد بررسی واقع برمحیط آن می‌پیوندد، وشعاع CB که ازنقطهٔ تماس دو دایره می‌گذرد، انتخاب‌می‌کنیم. فرض می‌کنیم که، درآغاز حرکت، این زاویه برابرصفرباشد.

قبل ازهمه، روشن کنیم، که نبودن لغزش، دراین‌جا، به چه معناست! باید کمان $\widehat{AB}$ برروی دایرهٔ ثابت ــ که از نقطهٔ تماس می‌گذرد ــ برابر باشد با کمان$\widehat{MB}$ روی دایـرهٔ متحرك ــ که بازهم از نقطهٔ تماس می‌گذرد:

$$a\cdot\widehat{AOB}=ma\cdot\widehat{MCB}=mat\Rightarrow\widehat{AOB}=mt$$

حالا، مختصات x و y نقطهٔ M را، برحسب t، پیدا می‌کنیم. داریم:

$$x=OG=OE+FM=(a+ma)\cos mt+ma\cdot\sin\widehat{FCM}$$

ولی

$$\widehat{FCM}=\widehat{BCM}-OCE\text{ و }\widehat{OCE}=\frac{\pi}{۲}-mt$$

به نحوی که

$$\widehat{FCM}=(۱+m)t-\frac{\pi}{۲}\text{ و }\sin\widehat{FCM}=-\cos(۱+m)t$$

و سرانجام

$$x=a[(۱+m)\cos mt-m\cos(۱+m)t]$$

و به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$y=a[(۱+m)\sin mt-m\sin(۱+m)t]$$

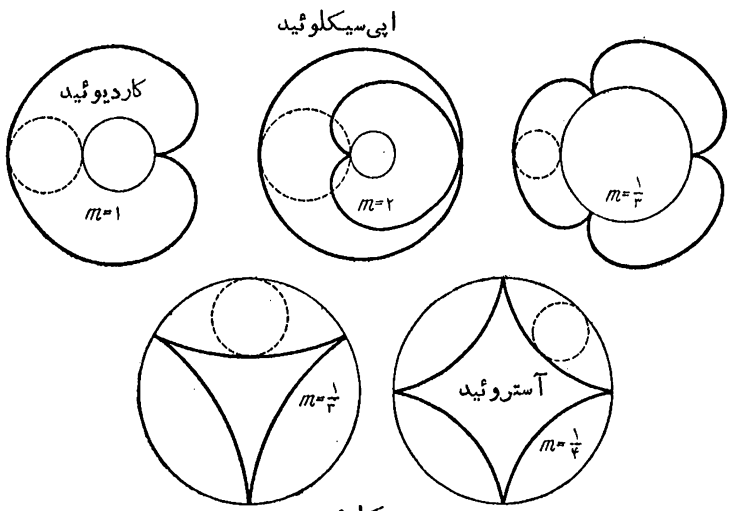
این معادلـه‌ها، معرف اپی‌سیکلوئید، به‌صورت پارامتری هستند.

وقتی، دایرهٔ متحرك، دوباره، به‌همان نقطهٔ تماس ابتدای حرکت بادایرهٔ ثابت، برسد (یعنی به‌ازای $t=۲\pi$)، نقطهٔ M، یك شاخهٔ منحنی را، به‌اتمام می‌رساند، و با غلت‌هـای بعدی، شاخه‌های بعدی را ــ که‌مشابه همان شاخهٔ اول هستند ــ، رسم می‌کند.

مشتق‌های

$$x'_t=-m(m+۱)a[\sin mt-\sin(۱+m)t]$$

$$y'_t=m(m+۱)a[\cos mt-\cos(۱+m)t]$$



شکل ۱۲۰

به‌ازای $t=۲k\pi$ $(k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$، به طور هم‌زمان، برابر ۰ می‌شوند، یعنی وقتی که نقطهٔ موردنظر (بر دایرهٔ متحرك)، به‌نقطهٔ تماس تبدیل شود، نقطهٔ نظیر منحنی، یك نقطهٔ خاص (نقطهٔ برگشت) است.

درحالت هیپوسیکلوئید، با روش مشابهی، می‌توان به‌این‌معادله‌های پارامتری‌رسید:

$$x=a[(۱-m)\cos mt+m\cos(۱-m)t]$$

$$y=a[-(۱-m)\sin mt+m\sin(۱-m)t]$$

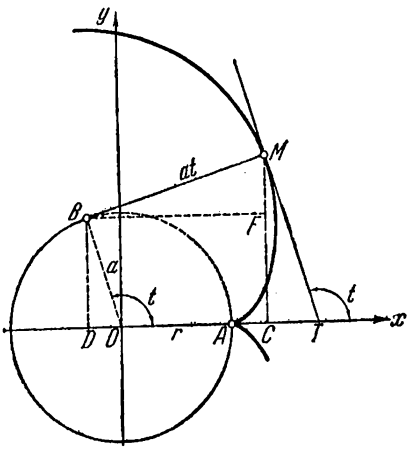
دراین‌جا نیز، m عبارت است ازنسبت شعاع دایرهٔ متحرك به‌شعاع دایرهٔ ثابت. به‌سادگی دیده می‌شود که، این‌معادله‌ها را می‌توان ازمعادله‌های اپی‌سیکلوئید، با تبدیل m به $m-۱$، به‌دست آورد.

در شکل ۱۲۰، اپی‌سیکلوئیدهای نظیر $m=۱, ۲, \frac{۱}{۳}$، و هیپوسیکلوئیدهای نظیر $m=\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}$، رسم شده‌اند. در شکل آخر، خواننده، آستروئید را می‌شناسد.*

۸) گستردهٔ دایره. دورمحیط دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع a، نخی رادرجهت‌عقربه‌های ساعت پیچیده‌ایم. فرض کنید که انتهای نخ، در نقطهٔ A، تمام شده باشد. نخ را شروع

*) اگر در معادله‌های هیپوسیکلوئید، $m=\frac{۱}{۴}$ بگیریم و t را به $۴t$ — تبدیل کنیم، همان معادله‌ای به‌دست می‌آیدکه در ۴) داده‌ایم.

به‌بازکردن می‌کنیم (طبعاً، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)؛ و فرض می‌کنیم که نخ همیشه کشیده باشد، یعنی یك پاره‌خط مستقیم را تشکیل دهد. منحنی را که انتهای نخ رسم‌می‌کند، گستردهٔ دایره نامند [**۲۵۴ و ۲۵۶** را ببینید].



شکل ۱۲۱

مبداء مختصات‌را درمرکز O می‌گیریم (شکل ۱۲۱) ومحور x را از A می‌گذرانیم. وقتی‌که قسمت AB نخ را بازکنیم، خود نخ به‌صورت BM در می‌آید، که در نقطهٔ B بر دایره مماس است و خود نقطهٔ A، به‌نقطهٔ M منتقل می‌شود. بنابراین $\widehat{AB}=BM$. زاویهٔ $t=\widehat{AOB}$ را، که بین‌شعاع‌های OA و OB قرار دارد، بـه‌عنوان پـارامتر، انتخاب می‌کنیم. مختصات x و y نقطهٔ M، به‌این ترتیب، بیان می‌شود:

$$x=DC-DO=BF-DO=BM\cdot\sin\widehat{BMC}-OB\cdot\cos\widehat{DOB}$$

ولی $BM=\widehat{AB}=at$ و زاویه‌های $\widehat{BMC}$ و $\widehat{DOB}$ برابرند با $\pi-t$ و بنابراین

$$x=at\sin(\pi-t)-a\cos(\pi-t)=a(t\cdot\sin t+\cos t)$$

سپس

$$y=CM=CF+FM=DB+FM=OB\cdot\sin\widehat{DOB}+BM\cdot\cos\widehat{BMC}=$$

$$=a(\sin t-t\cdot\cos t)$$

به‌این ترتیب، منحنی، با معادله‌های پارامتری زیر، نشان داده می‌شود:

$$x=a(t\sin t+\cos t),\qquad y=a(\sin t-t\cos t)$$

تنها نقطهٔ خاص، نظیر مقدار $t=0$ است‌که، به‌ازای آن، هر دو مشتق

$$x'_t=at\cos t,\qquad y'_t=at\sin t$$

برابر با صفر می‌شوند.

به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، ثابت‌کندکه، اگرخط‌راستی (بدون‌لغزش) روی‌دایره‌ای

بغلتد، مسیر هر نقطه از آن، همین منحنی خواهد بود.

۲۲۶. منحنی‌های واقع بر صفحه (درمختصات قطبی). مثال‌ها. در بسیاری از موردها، اگر معادله‌های قطبی منحنی‌ها یعنی بستگی بین مختصات قطبی r و θ از نقطهٔ دلخواه منحنی‌ها، معلوم باشد، کاربررسی آن‌ها، ساده‌تر می‌شود؛ زاویهٔ قطبی θ را، از محور قطبی به حساب می‌آوریم و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، مثبت می‌گیریم. شعاع حامل قطبی r، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در حالت اول، در جهتی قرار می‌گیرد، که زاویهٔ θ آن‌را معین می‌کند و در حالت دوم، در جهت خلاف آن.

مثل مورد مختصات قائم، در این‌جا هم، بستگی بین r و θ، می‌تواند به‌شکل صریح، ضمنی یا پارامتری داده شود. ما، در اساس، به‌حالت ساده‌ای اکتفا می‌کنیم که منحنی با معادله‌ای صریح، به‌صورت $r=f(\theta)$، داده شده باشد.

اگر به مختصات قائم برویم، طبق معمول، قطب بر مبداء و محور قطبی بر محور x قرار می‌گیرد و معادله‌های

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cdot\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta=f(\theta)\cdot\sin\theta$$

نمایش پارامتری منحنی را به‌دست می‌دهند. زاویهٔ قطبی θ، در این جا، نقش پارامتر را به‌عهده دارد [در این‌جا، تابع حاصل از θ، همراه با f، پیوسته‌اند و دارای مشتق‌های پیوسته می‌باشند].

رابطه‌های

$$x'_\theta=r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta$$

$$y'_\theta=r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta$$

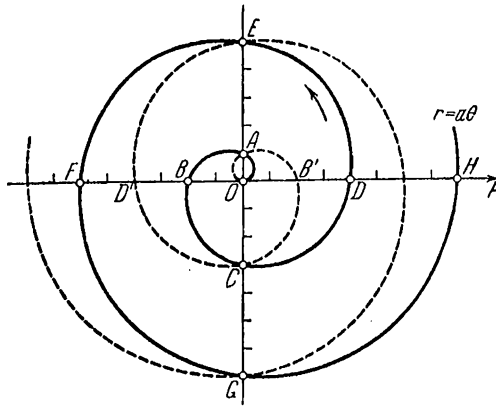
نشان می‌دهند که، نقطهٔ خاص (به‌مفهومی که در شمارهٔ **۲۲۳** دیدیم)، تنها در حالتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $r=r'_\theta=0$.

بپردازیم به‌مثال‌ها.

۱) پیچ ارشمیدس: $r=a\theta$ (شکل ۱۲۲).

منحنی را می‌توان مانند مسیر نقطه‌ای در نظر گرفت که، به‌طور یکنوا، روی شعاع گذرنده بر قطب حرکت می‌کند و، در عین حال، این شعاع هم، به طور یکنوا، دور قطب می‌چرخد.

برای این‌که، نقطه‌های A، B، C، D، ... از منحنی را پیدا کنیم، ابتدا $OA=a\cdot\frac{\pi}{2}$



شکل ۱۲۲

را روی قائم جدا می‌کنیم و، سپس $OB=2OA$، $OC=3OA$، $OD=4OA$، ... را جدا می‌کنیم، زیرا، نظیر زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$، $2\frac{\pi}{2}$، $3\frac{\pi}{2}$، $4\frac{\pi}{2}$ و غیره هستند. وقتی‌که زاویهٔ θ را از ۰ تا ∞ تغییر دهیم، مجموعهٔ بی‌نهایت پیچ $OABCD$، $DEFGH$، ... از منحنی به‌دست می‌آید. فاصلهٔ هر دو پیچ مجاور، اگر روی شعاع محاسبه شود، برابر است با $2\pi a$.

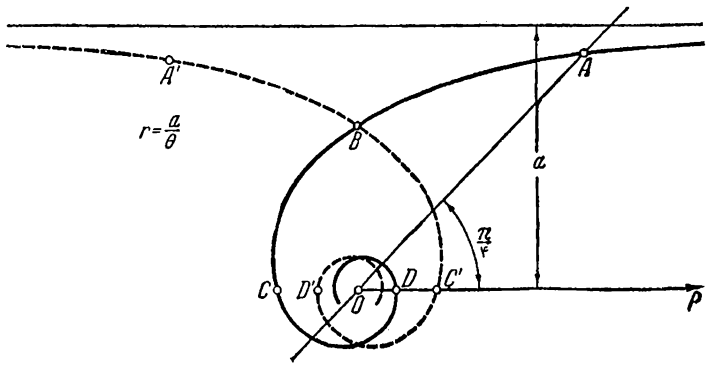
می‌توان، به θ، مقدارهای منفی از ۰ تا $-\infty$ را داد. در این‌صورت، قسمت دوم منحنی $OAB'CD'$، ... به‌دست می‌آید، که روی شکل، به‌صورت خط‌چین نشان داده شده است. این قسمت منحنی، قرینهٔ قسمت اول، نسبت به‌خط قائم است.

یادآوری می‌کنیم که معادلهٔ $r=a\theta+b$ هم، معرف پیچ ارشمیدس است: اگر محور قطبی را، به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=-\frac{b}{a}$ دوران دهیم، این معادله، به صورت $r=a\theta$ درمی‌آید.

۲) پیچ هذلولی: $r=\frac{a}{\theta}$ (شکل ۱۲۳).

با ترقی زاویهٔ θ تا بی‌نهایت، شعاع حامل به سمت صفر میل کند و نقطهٔ منحنی، به‌سمت قطب می‌رود (هرگز به‌آن نمی‌رسد)؛ درچنین وضعی، قطب را، نقطهٔ مجانبی منحنی می‌نامند. منحنی، بی‌نهایت بار، دور قطب می‌چرخد.

اگر بر شعاع $\theta=\frac{\pi}{4}$، پاره‌خط $OA=\frac{4a}{\pi}$ را جدا کنیم، و نقطه‌های $OB=\frac{1}{2}OA$، $OC=\frac{1}{2}OB$، $OD=\frac{1}{2}OC$، ... را انتخاب کنیم، آن‌گاه نقطه‌های A، B، C، D، ...، به‌روشنی،



شکل ۱۲۳

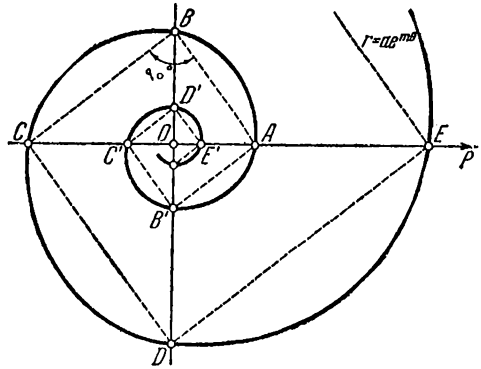
بر منحنی قرار دارند.

زاویهٔ θ می‌تواند مقدارهای منفی را هم اختیار کند. وقتی θ از ۰ تا $-\infty$ تغییر کند، همان‌طور که در حالت پیچ ارشمیدس دیدیم، بخش دوم منحنی ...$A'B'C'D'$، که قرینهٔ اولی است، به‌دست می‌آید (که روی شکل، با خط‌چین، نشان داده شده است).

برای این‌که شکل منحنی را در بی‌نهایت، دقیق‌تر کنیم، فاصلهٔ قائم نقطهٔ منحنی را تا محور قطبی $y = r\sin\theta = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$، مورد بررسی قرار می‌دهیم. وقتی که $r \to \pm\infty$ و یا ــ هم‌ارز آن ــ وقتی $\theta \to \pm 0$، داریم: $y = a$ حد. به‌این ترتیب، خطی که به‌موازات محور قطبی، و به‌فاصلهٔ a از آن، رسم شود، مجانب منحنی است.

۳) پیچ لگاریتمی $r = a \cdot e^{m\theta}$ (شکل ۱۱۴).

اگر زاویهٔ θ به تصاعد حسابی، ترقی (یا تنزل) کند، آن‌گاه، r به تصاعد هندسی،



شکل ۱۲۴

ترقی (یا تنزل) خواهد کرد. برمحور قطبی، پاره‌خط $OA=a$، و روی قائم برآن، پاره‌خط $OB=a.e^{m\frac{\pi}{2}}$ را جدا می‌کنیم. هر دو نقطهٔ A و B، به‌منحنی ما تعلق دارند. اکنون اگر خط شکستهٔ راست‌گوشهٔ $ABCDE\ldots$ را بسازیم، از تشابه مثلث‌ها، بدون زحمت، نتیجه می‌شود که پاره‌خطهای OA، OB، OC، OD، OF، ... یك تصاعد هندسی، با قدر نسبت $e^{m\frac{\pi}{2}}$ تشکیل می‌دهند، زیرا زاویه‌های نظیر، عبارتند از ۰، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$۲، $\frac{\pi}{2}$۳، ...؛ بنابراین، روشن است که همهٔ نقطه‌های C، D، E، ... نیز بر منحنی موردنظر قرار دارند.

وقتی θ از ۰ تا $+\infty$ ترقی کند، نقطه، بی‌نهایت بار دور قطب می‌چرخد، به‌نحوی که نقطه به‌سرعت از قطب دور می‌شود و به‌سمت بی‌نهایت می‌رود؛ فاصلهٔ بین پیچ‌های منحنی هم، با یکدیگر برابر نیستند. زاویهٔ θ، مقدارهای منفی را هم، می‌تواند اختیار کند. وقتی θ به‌سمت $-\infty$ می‌رود، شعاع حامل r به‌سمت صفرمیل می‌کند. منحنی بی‌نهایت‌بار، دورقطب می‌چرخد ودائماً به‌آن نزدیك‌ترمی‌شود (ولی هرگز به‌آن نمی‌رسد، بخش $A'B'C'D'E'\ldots$ را در شکل ۱۲۴ ببینید). قطب، نقطهٔ مجانبی منحنی است.

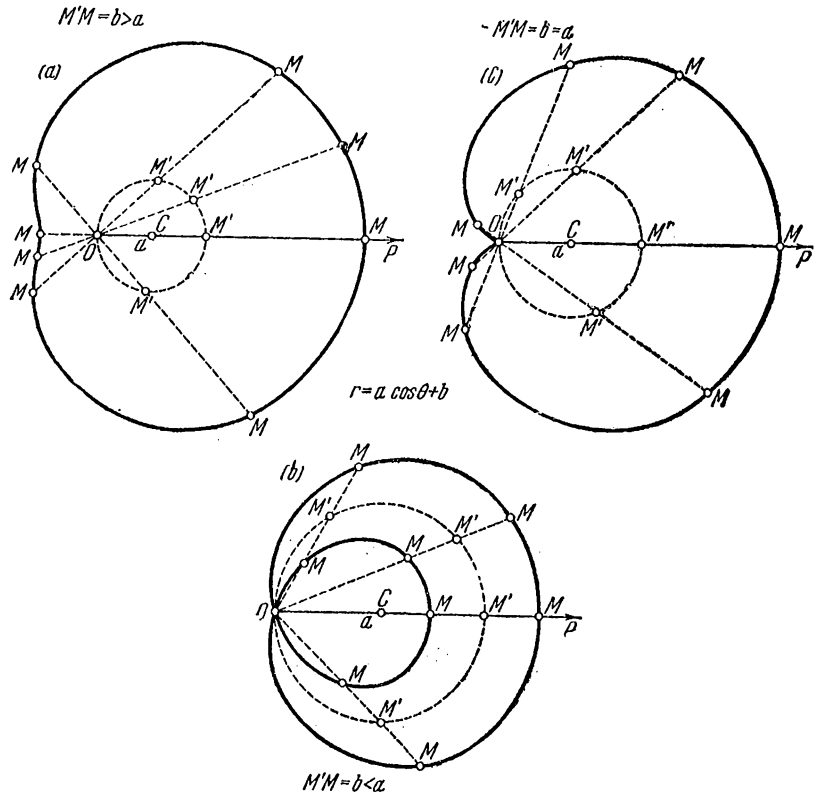
به‌این نکته هم توجه کنیم که، با دوران محور قطبی دور قطب، می‌توان ضریب a را حذف کرد و معادلهٔ پیچ لگاریتمی را، به‌صورت سادهٔ $r=e^{m\theta}$ نوشت.

۴) حلزون $r=a\cos\theta+b$ (شکل ۱۲۵).

پیدایش این‌گونه منحنی‌ها را، می‌توان این‌طور تصورکرد. دایره‌ای به‌قطر a درنظر می‌گیریم. اگر قطب θ را بر محیط دایره انتخاب کنیم و محور قطبی را از مرکز C بگذرانیم، برای هر نقطهٔ غیرمشخص M' از محیط دایره، به‌روشنی داریم: $r=a.\cos\theta$، و این، معادلهٔ قطبی دایره است. اگر در این‌جا، θ را از ۰ تا 2π تغییر دهیم، نقطهٔ متغیر دوبار دایره را (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت)، دور می‌زند.

اکنون اگر همهٔ شعاع‌های حامل OM' دایره را، به‌اندازهٔ پاره‌خط $M'M=b$ ($b>0$) امتداد دهیم، از نقطه‌های M، که به این طریق ساخته می‌شود، منحنی جدیدی به‌دست می‌آیدکه نام کلی حلزون را بر خود دارد. معادلهٔ این‌گونه منحنی‌ها، درمختصات قطبی، عبارت است از $r=a.\cos\theta+b$.

ساده‌ترین حالت، موقعی است که $b>a$ باشد، زیرا در این‌صورت، شعاع حامل همیشه مثبت است و منحنی، قطب را، در همهٔ جانب‌ها، دور می‌زند (شکل a–۱۲۵). در حالت $b<a$، منحنی از قطب می‌گذرد و با بریدن خودش، گرهی درونی، مثل شکل b – ۱۲۵ تشکیل می‌دهد. برای این‌که زاویهٔ θ را، در لحظه‌ای که نقطهٔ متغیر از قطب



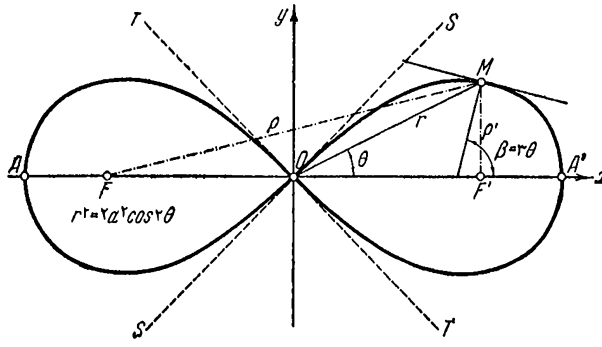
شکل ۱۲۵

می گذرد، پیدا کنیم، درمعادلهٔ منحنی فرض‌می‌کنیم $r=0$؛ به‌معادلهٔ $\cos\theta=-\frac{b}{a}$ می‌رسیم که، بی‌تردید دارای ریشه است (زیرا $b<a$).

شکل بینابینی منحنی، که متناظر با حالت $b=a$ است، بسیار جالب است. دراین حالت، قطب برمنحنی قراردارد و گره وجودندارد. (برای $\theta=\pi$)؛ این‌حالت منحنی، در شکل ۱۲۵ c داده شده‌است. بلافاصله معلوم‌می‌شود که این منحنی، همان کاردیوئیداست، که به‌عنوان حالت‌خاصی از اپی‌سیکلوئید (شکل ۱۲۰) مورد بررسی قرار داده‌ایم. تایید این مطلب را، به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

۵) لمینسکات برنولی: $r^2=2a^2\cdot\cos 2\theta$ (شکل ۱۲۶).

این منحنی را، می‌توان مکان هندسی نقطهٔ M دانست که برای آن، حاصلضرب فاصله‌های $\rho=FM$ و $\rho'=F'M$ ـ فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ مفروض F و F'



شکل ۱۲۶

به‌فاصلهٔ $۲a$ ــ برابر مقدار ثابت $a^۲$ باشد.*

با توجه به‌شکل، از مثلث‌های OMF و OMF' داریم:

$$\rho^۲=r^۲+a^۲+۲ar\cos\theta, \qquad \rho'^۲=r^۲+a^۲-۲ar\cos\theta$$

به‌نحوی که بنابر تعریف

$$\rho^۲\rho'^۲=(r^۲+a^۲)^۲-۴r^۲a^۲\cos^۲\theta=a^۴$$

که از آن‌جا، بعد از تبدیل‌های مقدماتی، نتیجه می‌شود:

$$r^۲=۲a^۲\cos۲\theta$$

که همان معادلهٔ لمینسکات، در مختصات قطبی، می‌باشد.

چون سمت چپ این معادله ــ و همراه با آن، سمت راست معادله ــ نمی‌تواند مقدارهای منفی را اختیار کند، زاویهٔ θ می‌تواند در چنان بازه‌هائی تغییر کند که، به‌ازای آن‌ها، $\cos\theta \geqslant ۰$ باشد. این بازه‌ها، چنین‌اند:

$$\left(۰, \frac{\pi}{۴}\right), \qquad \left(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}\right), \qquad \left(\frac{۷\pi}{۴}, ۲\pi\right)$$

تمامی منحنی، در درون دو زاویهٔ قائم بین خط‌های SS و TT قرار دارد، که تحت زاویه‌های $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$، نسبت به‌محور قطبی، کشیده شده‌اند (شکل را ببینید). این منحنی، در

---

*) با رابطه‌ای که بین فاصلهٔ FF' و مقدار ثابت حاصل‌ضرب $\rho\rho'$ وجود دارد، معلوم است که نقطهٔ O، وسط پاره‌خط FF' متعلق به منحنی است $(\rho=\rho'=a)$. ولی اگر داشته باشیم $\rho\rho'=b^۲$، که در آن $b\neq a$، آن‌وقت، وضع به‌صورت دیگری درمی‌آید که آن‌را بیضی کاسینی گویند.

قطب، خودش را قطع می‌کند که نظیر $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$، $\frac{۷\pi}{۴}$ برای θ است.

اگر، به‌مختصات قائم برویم، به‌سادگی، این معادلهٔ ضمنی، برای لمینسکات، به‌دست می‌آید:

$$(x^۲+y^۲)^۲=۲a^۲(x^۲-y^۲)$$

۲۲۷. سطح و منحنی در فضا. این‌جا در نظر نداریم، به‌طور جدی، وارد بحث کاربرد محاسبهٔ دیفرانسیلی در هندسهٔ فضائی بشویم و این کار را به‌عهدهٔ دورهٔ اختصاصی هندسهٔ دیفرانسیلی می‌گذاریم. به‌همین مناسبت، در این‌جا، تنها به‌شکل‌هایی از هندسهٔ فضائی می‌پردازیم که برای بخش‌های آیندهٔ همین درس آنالیز، مورد لزوم‌اند.

یک‌بار دیگر هم یادآوری کنیم که، مثل قبل، همهٔ تابع‌های مورد بررسی ما، پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته، نسبت به‌آوندهای خود، هستند.

از دستگاه محورهای مختصات قائم $Oxyz$ آغاز می‌کنیم. سطح فضائی ممکن‌است با معادله‌ای بیان شود که رابطهٔ بین مختصات نقطهٔ جاری آن‌را داده باشد:

$$z=f(x, y) \qquad (۶)$$

[مثلاً، ۱۶۰ را ببینید]. چنین معادله‌ای، و هم معادله‌های شبیه آن $x=g(y, z)$ و $y=h(x, z)$ را، معادله‌های صریح سطح می‌نامیم.

طریقه‌های دیگری هم که برای مشخص کردن سطح وجود دارد، به‌مفهوم معینی، به‌همین حالت ساده منجر می‌شوند.

پیش می‌آید که سطح، با معادله‌ای به‌صورت

$$F(x, y, z)=۰ \qquad (۷)$$

بیان می‌شود، که نسبت به‌یکی از مختصات‌های خود، حل نشده‌است. اگر در نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$، دست‌کم، یکی از مشتق‌های نسبی $F'_x(x_۰, y_۰, z_۰)$، $F'_y(x_۰, y_۰, z_۰)$ و $F'_z(x_۰, y_۰, z_۰)$، مخالف صفر باشد، در همسایگی این نقطه، می‌توان سطح را به‌صورت یکی از نوع‌های معادلهٔ صریح درآورد. در واقع، اگر مثلاً $F'_z(x_۰, y_۰, z_۰)\neq ۰$ باشد، آن‌گاه، از روی قضیهٔ III شمارهٔ ۲۰۸، دست کم در همسایگی نقطهٔ مورد بررسی معادله، z را به‌عنوان تابع یک‌ارزشی از x و y، $z=f(x, y)$ معین می‌کند (که ضمناً، همراه با مشتق‌های خود نسبت به‌هر دو آوند، پیوسته است).

به این ترتیب، تنها در نقطه‌های خاص سطح، ممکن است استثنا وجود داشته باشد

و، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0$$

معادلهٔ

$$F(x, y) = 0 \qquad (۸)$$

که شامل یکی از مختص‌ها نیست، می‌تواند به‌عنوان معادلهٔ یك سطح تعبیر شود. این معادله، روی صفحهٔ xy، یك منحنی می‌سازد؛ اگر روی این منحنی، به‌عنوان منحنی‌هادی، یك سطح استوانه‌ای بسازیم که مولدهای آن، موازی محور z باشند، در آن‌صورت، همهٔ نقطه‌های این‌سطح، وتنها آن‌ها، در معادلهٔ (۸) صدق می‌کنند (زیرا، z در آن وجود ندارد و، بنابراین، موجب هیچ محدودیتی نمی‌شود).

معادله‌های به‌صورت $G(y, z) = 0$ و $H(z, x) = 0$ را هم، می‌توان به ترتیب مشابهی تعبیر کرد.

حالا، به منحنی‌های فضائی می‌پردازیم. ساده‌ترین طریق بیان منحنی در فضا، آن است که دومختص، ومثلاً y و z، به‌صورت تابع‌هایی از مختص سوم x، داده شده باشند:

$$y = f(x), \qquad z = g(x) \qquad (۹)$$

و این، شبیه معادلهٔ منحنی، به صورت صریح آن، در صفحه است. در این جا، وقتی که معادله‌های یك منحنی فضائی، به‌صورت (۹) داده شده باشد، آن‌ها را، معادله‌های صریح منحنی گویند.

شبیه‌حالت منحنی مسطح، در مورد منحنی‌های فضائی هم، می‌توان اساساً، همهٔ گونه‌های دیگر نمایش تحلیلی منحنی فضائی را، به‌صورت صریح درآورد.

هر یك ازمعادله‌های (۹) را می‌توان، به‌عنوان تصویرمنحنی ماربریکی ازصفحه‌های مختصات ــ به‌ترتیب، بر xy و xz ــ ویا به عنوان استوانهٔ تصویرکننده [(۸) را ببینید]، با مولدهای موازی محور z یا محور y، تعبیرکرد.

به‌صورت کلی‌تر، می‌توان منحنی فضائی را، به‌عنوان فصل مشترك دو سطح، در نظر گرفت. اگر هرکدام از این سطح‌ها، به‌وسیلهٔ یکی از معادله‌های زیر، بیان شوند:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0 \qquad (۱۰)$$

آن‌وقت، دو معادله روی‌هم، نمایش تحلیلی منحنی فصل مشترك آن‌ها را به دست می‌دهند. معادله‌های (۱۰)، معادله‌های ضمنی منحنی، نامیده می‌شوند.

ماتریس مشتق‌های نسبی از تابع‌های F و G را، تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

فرض کنیم، یکی از دترمینان‌های این ماتریس، مثلاً

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

در نقطهٔ مورد بررسی، مخالف صفر باشد. آن‌گاه، بر اساس قضیهٔ IV شمارهٔ ۲۰۸، در همسایگی این نقطه، می‌توان معادله‌های (۱۰) را، با معادله‌های گونهٔ (۹) عوض کرد (ضمناً، تابع‌های موجود در این معادله‌ها، همراه با مشتق‌های خود، پیوسته‌اند).

به‌این ترتیب، تنها در همسایگی نقطه‌هایی، نمی‌توان معادله‌ها را به‌صورت صریح درآورد که، در آن‌جا، هر سه دترمینان ماتریس (۱۱)، به طور هم‌زمان، برابر صفر شوند (نقطهٔ خاص).

۲۲۸. نمایش پارامتری. در پایان، به‌نمایش پارامتری سطح‌ها و منحنی‌ها در فضا می‌پردازیم و، ضمناً، این‌بار، از منحنی‌ها، آغاز می‌کنیم.

شبیه آن‌چه در مورد صفحه دیدیم، مختصات نقطهٔ متغیر منحنی فضائی را، می‌توان به‌عنوان تابعی از یك متغیر کمکی t ــ پارامتر ــ در نظر گرفت.

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t) \qquad (۱۲)$$

وقتی که t تغییر کند، نقطه‌ای که مختصات آن با این معادله‌ها داده شده است، منحنی موردنظر را می‌پیماید (در حالت معادله‌های صریح (۹)، خود x، نقش پارامتر را به‌عهده دارد).

اگر در نقطه‌ای از منحنی مفروض، لااقل یکی از مشتق‌های x'_t، y'_t، z'_t مخالف صفر باشد، آن‌گاه ــ همان‌طور که در حالت منحنی مستوی دیدیم ــ به‌سادگی می‌توان، در همسایگی این نقطه، از صورت پارامتری به‌صورت صریح عبور کرد. تنها در همسایگی نقطهٔ خاص ــ جائی که همهٔ این مشتق‌ها، برابر صفرند، نمی‌توان چنین امکانی را تضمین کرد.

شبیه حالت منحنی‌های مستوی، باید نقطه‌های موسوم به تکراری را هم، در شمار نقطه‌های خاص به حساب آورد: نقطهٔ تکراری، یعنی نقطه‌ای که به‌ازای دو یا چند مقدار پارامتر به‌دست آید.*

می‌رویم به‌سراغ نمایش پارامتری سطح‌ها.

---

*) پاروقی صفحهٔ ۶۳۹ را ببینید.

در این‌جا، برای این‌که موضع نقطه را بر سطح مشخص کنیم، به‌دو پارامتر نیاز داریم (در حالتی که با معادله‌های صریح (۶) سر و کار داشتیم، نقش این پارامترها، به‌عهدهٔ x و y بود). معادله‌های

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v) \qquad (۱۳)$$

را مفروض می‌گیریم، که در آن‌ها، (u,v) در حوزهٔ بسته Δ تغییر می‌کند. ماتریس

$$\begin{pmatrix}\varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v\end{pmatrix} \qquad (۱۴)$$

را تشکیل می‌دهیم و فرض می‌کنیم که، به‌ازای $u=u_0$ و $v=v_0$، دست‌کم یکی از دترمینان‌های این ماتریس، مخالف صفر باشد؛ مثلاً دترمینان

$$\begin{vmatrix}\varphi'_u & \psi'_u\\ \varphi'_v & \psi'_v\end{vmatrix}\neq 0$$

در این‌صورت، با درآوردن دو معادلهٔ اول از معادله‌های (۱۳)، به‌صورت

$$\varphi(u,v)-x=0,\quad \psi(u,v)-y=0$$

بر اساس قضیهٔ IV شمارهٔ ۲۰۸، می‌توان حکم کرد که، این دستگاه دومعادلهٔ چهارمجهولی u، v، x، y (به‌شرطی که به‌مقدارهایی از آن‌ها که به مقدارهای موردنظر ما نزدیک‌اند، اکتفا کنیم)، متغیرهای u و v را، به‌عنوان تابع‌های یك ارزشی از x و y تعریف می‌کنند:

$$u=g(x,y),\quad v=h(x,y)$$

که همراه بامشتق‌های خود، پیوسته‌اند. بالاخره، با گذاشتن این مقدارهای u و v درمعادلهٔ سوم (۱۳)، به‌نمایش معمولی سطح، با معادله‌های صریح، می‌رسیم:

$$z=\chi(g(x,y),h(x,y))=f(x,y)$$

که در آن، f، تابعی پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته است.

تنها در آن حالت که، هر سه دترمینان ماتریس (۱۴)، به‌طور هم‌زمان، برابر صفر شوند (که نقطهٔ نظیر آن‌را روی سطح، نقطهٔ خاص می‌گویند)، ممکن است چنین نمایشی عملی نباشد.

برای خواننده روشن است که، در رابطه بانمایش پارامتری سطح، می‌توان بامفهوم نقطه‌های ساده و تکراری هم برخورد کرد: اولی، تنها به‌ازای یك دستگاه مقدارهای

پارامترهای (u, v) به‌دست می‌آید، و دومی، دست‌کم به‌ازای دو دستگاه.*

به‌معادله‌های پارامتری (۱۳) سطح برمی‌گردیم. مقدار یکی از پارامترها را تثبیت می‌کنیم، مثلاً فرض می‌کنیم $u = u_0$. آن‌وقت معلوم است که معادله‌های یك منحنی به‌دست می‌آید:

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi[u_0, v)$$

که همهٔ نقطه‌های آن، بر سطح قرار دارند. با تغییر مقدار u_0، خانوادهٔ کاملی از این «منحنی‌های (u)» را به‌دست می‌آوریم. به‌همین ترتیب، می‌توان با تثبیت $v = v_0$ نیز، منحنی‌هایی از سطح را به‌دست آورد:

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0)$$

از این «منحنی‌های (v)» نیز، خانواده‌ای کامل تشکیل می‌شود.

از آن‌جا که u و v را، می‌توان به‌عنوان مختصات نقطه‌ها بر سطح در نظر گرفت، این‌منحنی‌ها را، منحنی‌های مختصاتی سطح می‌نامند، اگر نقطهٔ‌سطح، ساده باشد، یعنی تنها به ازای یك دستگاه مقدارهای پارامترهای (u, v) حاصل شود، آن گاه، از این نقطه، یك منحنی مختصاتی از هر خانواده می‌گذرد.

با توجه به‌شیوه‌های تحلیلی گونا گونی‌که برای نمایش سطح‌ها [(۶)،(۷)و(۱۳)] و منحنی‌های فضائی [(۹)، (۱۰) و (۱۲)] وجود دارد، می‌توانیم آن‌چه را که در آخر شمارهٔ **۲۲۳** گفته‌ایم، در این‌جا هم تکرار کنیم. درهمسایگی نقطه‌های معمولی (و ساده)، کار به‌حالت عینی صریح، منجر می‌شود.

۲۲۹. مثال‌ها. ۱) منحنی وی ویانی. فصل مشترك سطح کروی و سطح استوانه‌ای قائم، که هادی‌آن دایره‌ای با قطر برابر شعاع کره باشد، چنین نامیده می‌شود (شکل ۱۲۷). شعاع کره را R می‌گیریم. اگر محورها را، به‌گونه‌ای‌که در شکل می‌بینیم، قرار دهیم، در آن‌صورت، معادله‌های کره و استوانه، به‌ترتیب، چنین‌اند:

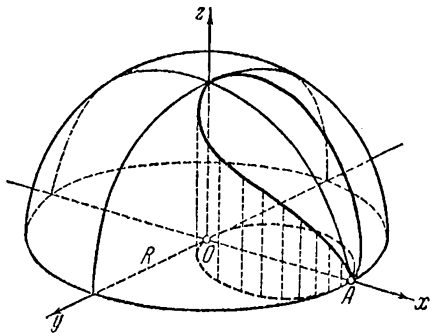
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = Rx$$

که روی‌هم آن‌ها، منحنی ما را مشخص می‌کند.

---

*) یادآوری کنیم که در حالت سطح بسته (یعنی، سطحی‌که دارای کناره نیست، مثل کره)، نقطه‌های آن نمی‌توانند در تناظر یك ارزشی متقابل با نقطه‌های حوزهٔ Δ بر صفحهٔ uv، باشند. دراین حالت، وجود نقطه‌های تکراری، به‌ازای هرمقدار ازپارامترها، ناگزیراست.



شکل ۱۲۷

منحنی شبیه هشت لاتینی خمیده است و در نقطهٔ $(R, 0, 0)$ خودش‌را قطع می‌کند، به‌نحوی که این نقطه، یك نقطهٔ خاص است. این موضوع را بررسی می‌کنیم. ماتریس

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-R & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

این دترمینان‌ها را می‌دهد:

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz, \quad \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x-R \end{vmatrix} = 4xz-2Rz, \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-R & 2y \end{vmatrix} = 2Ry$$

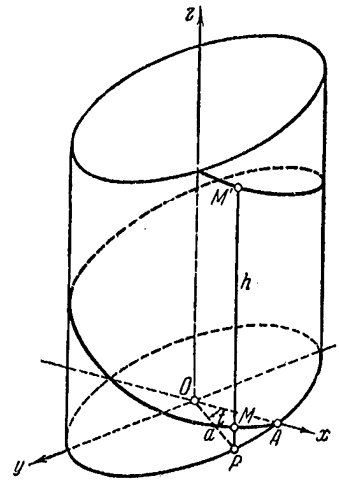
و می‌بینیم که هر سه دترمینان، در نقطهٔ $(R, 0, 0)$، با هم، برابر صفر می‌شوند.

منحنی وی ویانی (Viviani) را می‌توان، به‌صورت پارامتری‌هم درآورد؛ مثلاً به‌این ترتیب:

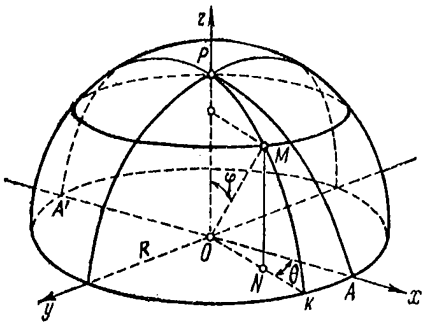
$$x = R\cdot\sin^2 t, \quad y = R\cdot\sin t\cos t, \quad z = R\cos t$$

در واقع، خیلی‌ساده می‌توان تحقیق کرد که این‌عبارت‌ها، به‌طور اتحادی، در معادلهٔ‌ضمنی منحنی صدق می‌کنند، و مثلاً وقتی‌که t از ۰ تا 2π تغییر کند، تمامی منحنی رسم می‌شود. نقطهٔ $(R, 0, 0)$، دوبار، به‌ازای $t = \frac{\pi}{2}$ و $t = \frac{3\pi}{2}$، به‌دست می‌آید، یعنی، همان‌طور که انتظار می‌رفت، یك نقطهٔ تکراری است.

۲) حالت‌هایی وجود دارد که نمایش پارامتری، به‌طور طبیعی، از خود پیدایش منحنی، حاصل می‌شود. به‌عنوان مثال، منحنی مارپیچی را در نظر می‌گیریم که، به‌ترتیب زیر، می‌توان آن‌را به‌دست آورد. فرض کنیم، نقطهٔ M، که درآغاز در نقطهٔ A قرار دارد (شکل ۱۲۸)، به‌طور یکنواخت، دور محور Oz (و مثلاً، در جهت حرکت عقربه‌های



شکل ۱۲۸



شکل ۱۲۹

ساعت) دوران کند و، درعین‌حال، در حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت، موازی این محور، شرکت داشته باشد (مثلاً، درجهت مثبت). مسیر نقطهٔ M، منحنی مارپیچی نامیده‌می‌شود. به‌عنوان پارامتری که وضع نقطهٔ M را مشخص می‌کند، می‌توان زاویهٔ t را درنظر گرفت، که بین محور x و OP (تصویر پاره‌خط OM) قرار گرفته است. مختصات x و y نقطهٔ M، همان مختصات نقطهٔ P است، به‌نحوی که $x=a\cdot cost$، $y=a\cdot sint$، که در آن، a عبارت است از شعاع دایره‌ای که به‌وسیلهٔ نقطهٔ P پیموده می‌شود. متغیر قائم z، متناسب با زاویهٔ گردش t ترقی می‌کند (زیرا، حرکت مستقیم‌الخط و دورانی، هر دو، به‌طور یکنواخت، انجام می‌گیرد)، یعنی $z=ct$. به‌این ترتیب، معادله‌های پارامتری منحنی مارپیچی، چنین است:

$$x=a\cdot cost,\quad y=a\cdot sint,\quad z=ct \qquad (۱۵)$$

منحنی مارپیچی حاصل را چپ پیچ گویند؛ به‌ازای دستگاه محورهای مختصات راست، همین معادله‌ها، معرف منحنی مارپیچ راست پیچ هستند.

در معادله‌های (۱۵)، می‌توان به‌سادگی t را حذف کرد: t را از معادلهٔ آخر پیدا می‌کنیم ودر دو معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$x=a\cdot cos\frac{z}{c},\quad y=a\cdot sin\frac{z}{c}$$

۳) سطح کروی به‌شعاع R ومرکز مبداء مختصات را درنظرمی گیریم (شکل ۱۲۹). معادلهٔ این سطح، همان‌طور که می‌دانیم چنین است:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

اگر بخواهیم نمایش پارامتری معمولی آن‌را پیدا کنیم، مقطع «استوائی» AKA' آن را رسم می‌کنیم، و از «قطب‌های» P و P' و نقطهٔ موردنظر M، «نصف‌النهار» $PMKP'$ را می‌گذرانیم. موضع نقطهٔ M بر کره را، می‌توان به‌وسیلهٔ زاویه‌های $\varphi = \widehat{POM}$ و $\theta = \widehat{AOK}$ مشخص کرد. داریم: $z = NM = R\cdot\cos\varphi$، سپس، $ON = R\cdot\sin\varphi$. x و y (چه‌برای M وچه‌برای N)، برحسب ON، این‌طور بیان می‌شوند: $x = ON\cdot\cos\theta$ و $y = ON\cdot\sin\theta$. با جمع‌بندی همهٔ این نتیجه‌ها، بالاخره، معادله‌های پارامتری سطح کروی، چنین می‌شود:

$$x = R\cdot\sin\varphi\cos\theta$$

$$y = R\cdot\cos\varphi\sin\theta$$

$$z = R\cdot\cos\varphi$$

ضمناً کافی است، زاویهٔ φ را از ۰ تا π و زاویهٔ θ را از ۰ تا 2π تغییر دهیم.

ولی، رابطهٔ بین نقطه‌های سطح کروی ونقطه‌های مستطیل $[0, \pi; 0, 2\pi]$، از صفحهٔ $\varphi\theta$، متقابلاً، یک‌ارزشی نیست.* مقدارهای $\theta = 0$ و $\theta = 2\pi$، به یک نقطه از سطح، منجر می‌شوند و، به‌جز آن، به ازای $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$)، برای هر مقدار دلخواه θ، تنها یک نقطه ـ قطب P (P') ـ به‌دست می‌آید.

اگر به‌جای φ، زاویه $\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi$ را درنظر بگیریم و λ را از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ و θ را بین $-\pi$ و π تغییر دهیم، به‌مختصات جغرافیایی معمولی می‌رسیم: عرض و طول.

برای ماتریس مشتق‌های نسبی

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

همهٔ دترمینان‌های

$$R^2\cdot\sin^2\varphi\cos\theta,\ R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\ R^2\sin\varphi\cos\varphi$$

به‌ازای $\varphi = 0$ و $\varphi = \pi$، باهم، برابر صفر می‌شوند، ولی روشن است که دو «قطب»، تنها در این نمایش تحلیلی کره، به‌حالت خاص درمی‌آیند.

به‌سادگی دیده می‌شود که یک‌خانوادهٔ منحنی‌های مختصاتی بر کره، از نصف‌النهارها ($\theta = \text{const.}$)، و خانوادهٔ دیگر از دایره‌های مداری ($\varphi = \text{const.}$) تشکیل می‌شود.

---

*) پاورقی صفحهٔ ۶۵۹ را ببینید.

۴) مثال قبل را، می‌توان، به‌این‌صورت تعمیم داد. فرض می‌کنیم در صفحهٔ xz، منحنی (مولد)، با معادله‌های پارامتری زیر داده شده باشد:

$$x=\varphi(u),\ z=\psi(u) \qquad (۱۶)$$

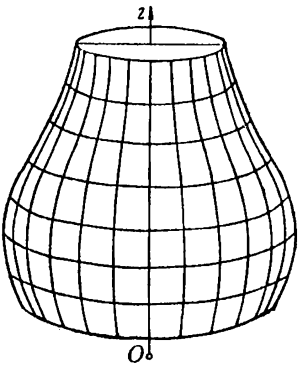
ضمناً $\varphi(u)\geqslant 0$. این منحنی را، به‌عنوان یك جسم صلب، دور محور Oz، دوران می‌دهیم (شکل ۱۳۰). اگر زاویهٔ دوران را با v نشان دهیم، معادله‌های سطح دوار حاصل، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x=\varphi(u)\cdot\cos v,\ y=\varphi(u)\cdot\sin v,\ z=\psi(u)\quad (0\leqslant v\leqslant 2\pi)$$

اگر در صفحهٔ xz، نیم‌دایرهٔ

$$x=R\cdot\sin u,\ y=R\cdot\cos u$$

را اختیار کنیم و آن را حول محور z دوران دهیم، معادله‌های پارامتری سطح کروی (که به این شکل به‌دست می‌آید)، شبیه مثال قبل، پیدا می‌شود.



شکل ۱۳۰

از خواننده می‌خواهیم، روشن کند که نقطه‌های خاص سطح‌های دوار، تنها می‌توانند نقطه‌های واقع بر محور دوران باشند و یا، نقطه‌هایی که از نقطه‌های خاص مولد، ضمن دوران، به‌دست آمده‌اند.

منحنی‌های مختصاتی، در این‌جا هم، عبارت است از وضع‌های گوناگون مولدها (نصف‌النهارها) و دایره‌های مداری.

۵) اگر، به‌حرکت دورانی منحنی (۱۶)، حرکت مستقیم‌الخط به‌موازات محور دوران را، اضافه کنیم (با فرض آن که، هردو حرکت، یکنواخت باشد)، به‌سطح مارپیچی کلی می‌رسیم:

$$x=\varphi(u)\cdot\cos v,\ y=\varphi(u)\cdot\sin v,$$

$$z=\psi(u)+cv$$

درحالت خاص، قسمت مثبت محور x را، به‌عنوان مولد، انتخاب می‌کنیم:

$$x=u,\ z=0\quad (u\geqslant 0)$$

که اگر آن‌را تحت حرکت پیچی قرار دهیم، سطح مارپیچی معمولی حاصل می‌شود.

$$x=u\cdot\cos v,\ y=u\cdot\sin v,\ z=cv$$

درسطح مارپیچی کلی، یك منحنی مختصاتی از وضع‌های مختلف مولد ($v=\text{const.}$)

و یك خانوادهٔ دیگر، از منحنی‌های مارپیچی ($u=\text{const.}$) به‌دست می‌آید.

§۲. خط مماس و صفحهٔ مماس

۲۳۰. مماس برمنحنی مسطح در مختصات قائم. بارها، بـا مفهوم مماس، برخورد داشته‌ایم [مثلاً، ۹۱ را ببینید]. اگر منحنی، با معادله‌ای صریح داده شود:

$$y=f(x)$$

که‌در آن، f تابعی پیوسته با مشتق پیوسته باشد، در هر نقطهٔ (x, y) آن، دارای مماسی است، که ضریب زاویهٔ آن، $tg\alpha$، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$tg\alpha=y'_x=f'_x$$

و به این ترتیب، معادلهٔ مماس، به‌این‌صورت درمی‌آید:

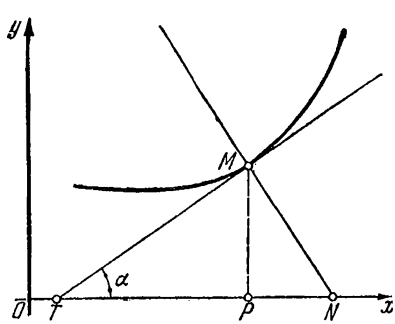
$$Y-y=y'_\circ(X-x) \qquad (۱)$$

که در آن (و، همچنین بعداز این)، X و Y مختصات جاری و x و y، مختصات نقطهٔ تماس است.

معادلهٔ قائم (یعنی خطی‌که از نقطهٔ تماس می‌گذرد و بر خط مماس عمود است)هم، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$X-y=-\frac{۱}{y'_x}(X-x)\Rightarrow X-x+y'_x(Y-y)=\circ \qquad (۲)$$

در رابطه بامماس و قائم، بعضی پاره‌خطها موردبررسی قرار می‌گیرند: به‌خصوص پاره‌خطهای TM و MN و تصویرهای آن‌ها ــ TP و PN ــ برمحور x (شکل ۱۳۱). این‌آخری‌ها را، به‌ترتیب، تحت مماس و تحت قائم می‌نامند و با sbt (subtangens)



شکل ۱۳۱

و *sbn* (subnormal) نشان می‌دهند. در معادله‌های (۱) و (۲)، با گذاشتن $Y=0$، به‌سادگی، نتیجه می‌شود:

$$sbt=TP=\frac{y}{y'_x},\quad sbn=PN=yy'_x \qquad (۳)$$

آن‌وقت، از مثلث‌های MPT و MPN، طول پاره‌خط‌های مماس و قائم نیز، تعیین می‌شوند:

$$t=TM=\left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|,\quad n=MN=\left|y\sqrt{1+y'^2_x}\right| \qquad (۴)$$

اگر منحنی، با معادله‌ای ضمنی داده شده باشد:

$$F(x,y)=0$$

در همسایگی نقطهٔ معمولی آن، $M(x,y)$، می‌توان معادلهٔ منحنی را به‌صورت صریح بیان کرد. اگر در نقطهٔ M، مثلاً $F'_y(x,y)\neq 0$ داشته باشیم، آن وقت منحنی با معادلهٔ $y=f(x)$ بیان می‌شود، که در آن، f تابعی پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته است. از این‌جا، روشن می‌شود که برای منحنی، در نقطهٔ M، مماسی وجود دارد و معادلهٔ آن می‌تواند به‌صورت (۱) درآید. ولی ما می‌دانیم [۲۰۹، (۱۵)] که در این حالت داریم:

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

که با توجه به آن، بعد از تبدیل‌های ساده، به معادلهٔ کاملاً متقارنی نسبت به x و y برای مماس دست می‌یابیم:

$$F'_x(x,y)(X-x)+F'_y(x,y)(Y-y)=0 \qquad (۵)$$

در حالتی هم که، در نقطهٔ M داشته باشیم: $F'_y=0$ ولی $F'_x\neq 0$، بازهم به همان نتیجه می‌رسیم. این معادله، تنها در نقطهٔ خاص، معنای خود را از دست می‌دهد. در چنین نقطه‌ای، بدون بررسی‌های تکمیلی [۲۳۶]، چیزی دربارهٔ مماس نمی‌توان گفت.

معادلهٔ قائم، در این حالت، چنین می‌شود:

$$F'_y(x,y)(X-x)-F'_x(x,y)(Y-y)=0$$

بالاخره، فرض می‌کنیم که منحنی، به‌صورت پارامتری داده شده باشد:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

می‌دانیم که اگر داشته باشیم: $\varphi'(t)\neq 0$، مماس بر منحنی وجود دارد و ضریب زاویهٔ آن

برابر است با

$$tg\alpha=\frac{y'_t}{x'_t} \qquad (۶)$$

[۱۰۶، (۱۱)]؛ و معادلهٔ مماس به‌این صورت در می‌آید:

$$Y-y=\frac{y'_t}{x'_t}(X-x) \quad \text{یا} \quad \frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}$$

در شکل اخیر، معادله برای مورد $x'_t=0$ و $y'_t\neq 0$ هم مناسب است*. تنها، در نقطهٔ خاصی که، در آن‌جا هم $x'_t=0$ و هم $y'_t=0$، معادله معنای خود را از دست می‌دهد و مسالهٔ مماس، حل نشده باقی می‌ماند [۲۳۷].

گاهی، راحت‌تر است که هر دو مخرج را در dt ضرب کنیم و معادلهٔ مماس را، به این صورت بنویسیم:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy} \qquad (۷)$$

۲۳۱. مثال‌ها. ۱) سهمی $y^2=2px$. با مشتق‌گیری از این معادله (و با توجه به‌این که، y تابعی است از x)، نتیجه می‌شود: $yy'=p$. به‌این ترتیب [(۳) را ببینید]، تحت قائم سهمی مقداری است ثابت. از این‌جا، طریق سادهٔ رسم قائم بر سهمی (و به کمک آن، مماس)، به‌دست می‌آید.

با توجه به رابطهٔ (۴)، برای پاره‌خط قائم بر سهمی داریم:

$$n=\sqrt{y^2+p^2}$$

۲) بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (شکل ۱۳۲).

با توجه به رابطهٔ (۱۵)، معادلهٔ مماس، چنین است:

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0$$

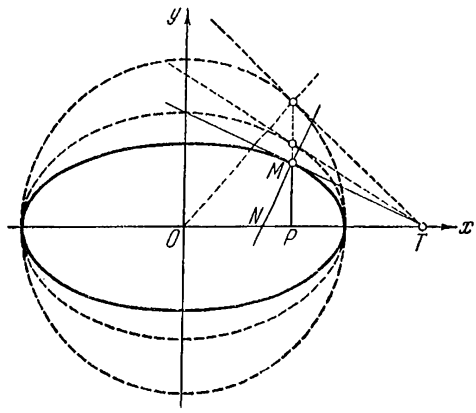
که با در نظر گرفتن خود معادلهٔ بیضی، معادلهٔ مماس را می‌توان این‌طور نوشت:

---

*) در هندسهٔ تحلیلی، همیشه این شرط وجود دارد که اگر در تناسب

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}$$

یکی از مخرج‌ها مساوی صفر باشد، به‌معنای آن است که صورت آن نیز، مساوی صفر است.



شکل ۱۳۲

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1$$

اگر در این معادله فرض کنیم: $Y=0$، به دست می‌آید: $X=\frac{a^2}{x}$؛ یعنی، نقطهٔ T، فصل مشترك مماس با محور x، نه به y بستگی دارد و نه به b. مماس‌هایی که بربیضی‌های مختلف، و به‌ازای مقدارهای مختلف b، در نقطهٔ به‌طول x از آن‌ها، رسم شوند؛ همگی از یك نقطهٔ T واقع برمحور x، می‌گذرند. چون به‌ازای $a=b$، دایره به دست می‌آید و مماس بر آن را می‌توان به‌سادگی رسم کرد، نقطهٔ T به فوریت به دست می‌آید. و از این راه، روش ساده‌ای برای رسم مماس بربیضی پیدا می‌شود که، از روی شکل، معلوم است.*

طول پاره‌خط قائم بربیضی هم، به‌سادگی معین می‌شود:

$$n=\sqrt{\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2}}$$

شبیه همین عبارت‌ها را، می‌توان برای هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هم، به‌دست آورد.

۳) آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (شکل ۱۱۶).

معادلهٔ مماس چنین است:

---

*) این ویژگی مماس بر بیضی، ناشی از این واقعیت است که، بیضی را می‌توان، مانند تصویر قائم یك دایره (به شعاع a) واقع در صفحهٔ مایل، در نظر گرفت.

$$x^{\frac{1}{3}}(X-x)+y^{\frac{1}{3}}(Y-y)=0$$

که با توجه به‌خود معادلهٔ منحنی، می‌توان آن‌را، به‌این صورت نوشت:

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}},\ \text{یا}\ \frac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}+\frac{Y}{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}=1$$

معادلهٔ اخیر، «معادلهٔ به پاره‌خط‌هـا»ست؛ یعنی مماس، بـر محورها، پاره‌خط‌های $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ و $a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ را جدا می‌کند. از این‌جا، به‌سادگی، یك ویژگی جالب آستروئید به‌دست می‌آید:

$$\tau^2=x^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=a^2$$

و

$$\tau=a=\text{const}.$$

به‌این ترتیب، محورهای تقارن آستروئید، روی همهٔ مماس‌ها پاره‌خط‌های برابر جدا می‌کنند.

۴) سیکلوئید (شکل ۱۱۸)

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

قبلاً [در ۶، ۲۲۵] داشتیم: $y'_x=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$، یعنی

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)$$

و می‌توان $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ اختیار کرد.

به‌یاد بیاوریم (شکل ۱۱۸) که $t=\widehat{MDN}$، به نحوی که $\widehat{MEN}=\frac{t}{2}$. اگر خط EM تا محل برخوردش با محور x ادامه یابد، آن‌گاه $\widehat{ETx}=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}=\alpha$. بنابراین، خط راست ME، که نقطهٔ سیکلوئید را به بالاترین نقطهٔ دایرهٔ متحرك، وصل می‌کند، خط‌مماس خواهد بود. از همین‌جا، روشن است که خط MN، قائم بر منحنی است.

طول پاره‌خط n قائم را، می‌توان ازمثلث قائم‌الزاویهٔ MEN به‌دست آورد.

$$n=MN=۲a\cdot sin\frac{t}{۲}$$

۵) اپی سیکلوئید (شکل ۱۱۹)

$$x=a[(۱+m)cosmt-mcos(۱+m)t]$$
$$y=a[(۱+m)sinmt-msin(۱+m)t]$$

اگر مشتق‌های x'_t و y'_t را، این‌طور بنویسیم:

$$x'_t=۲am(۱+m)sin\frac{t}{۲}cos(m+\frac{۱}{۲})t$$

$$y'_t=۲am(۱+m)sin\frac{t}{۲}sin(m+\frac{۱}{۲})t$$

معلوم شود که

$$tg\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}=tg(m+\frac{۱}{۲})t$$

از این‌جا $\alpha=(m+\frac{۱}{۲})t$.

اگر نقطهٔ D به M وصل شود (شکل ۱۱۹)، خط‌راستی که به‌دست می‌آید، بامحور x، درست همین زاویه را تشکیل می‌دهد:

$$\widehat{xTD}=\widehat{DOT}+\widehat{ODT}+mt+\frac{t}{۲}$$

در نتیجه، DT عبارت است از مماس در نقطهٔ M و MB قائم در همین نقطه.

۶) گستردهٔ دایره (شکل ۱۲۱)

$$x=a(tsint+cost),\ y=a(sint-tcost)$$

در این‌جا

$$tg\alpha=\frac{y'_t}{x'_t}=tgt\Rightarrow\alpha=t$$

به این ترتیب، مماس MT موازی شعاع OB، و BM قائم بر منحنی است.

یادداشت. نتیجه‌های مثال‌های ۴)، ۵) و ۶) را می‌توان، بدون هیچ محاسبه‌ای، و

تنها براساس ملاحظه‌هائی از سینماتیك، به‌دست آورد. وقتی که یك منحنی، روی دیگری می‌غلتد، نقطهٔ تماس، همیشه، به‌عنوان مرکز لحظه‌ای منحنی متحرك به‌حساب می‌آید، به‌نحوی که قائم بر مسیر هر نقطهٔ آن، از این نقطه تماس می‌گذرد.

۲۳۲. مماس درمختصات قطبی. اگر منحنی بامعادلهٔ قطبی $r=f(\theta)$ داده شده باشد، با عبور به‌شکل معمولی، نمایش پارامتری منحنی را، درمختصات قائم، به‌این صورت، به‌دست می‌آوریم:

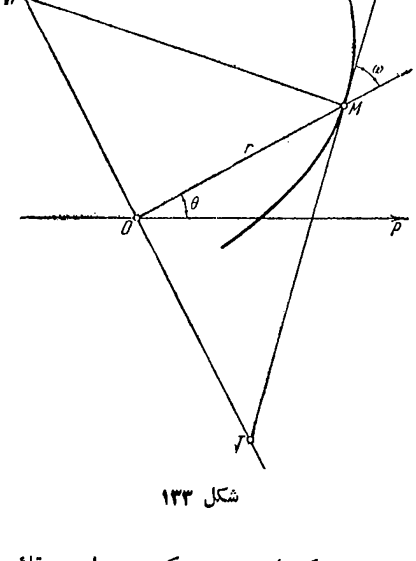
$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cdot\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta=f(\theta)\cdot\sin\theta$$

که در آن، θ، نقش پارامتر را به‌عهده دارد.

درچنین حالتی، ازدستور کلی (۶) داریم:

$$tg\alpha=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}$$



شکل ۱۳۳

ولی، اگر منحنی درمختصات قطبی مورد بررسی قرار گیرد، معمولاً وضع مماس را، نه بازاویهٔ α ــ که با محور قطبی تشکیل می‌دهد ــ بلکه با زاویهٔ ω، که با امتداد شعاع حامل تشکیل می‌دهد، روشن می‌کنند. (شکل‌های ۱۱۴ و ۱۳۳). قبلاً [۲۱۸، ۴)]، رابطهٔ

$$tg\omega=\frac{r}{r'_\theta} \qquad (۸)$$

را دیده‌ایم. همچنین، دراین‌جا، به‌جای پاره‌خطهای t، n، sbt و sbn ــ که دربارهٔ آن‌ها در ۲۳۰ صحبت کردیم ــ پاره‌خطهای دیگری را درنظر می‌گیرند. محوری عمود بر شعاع حامل ازقطب O (این محور، با تغییرمکان نقطه، دوران می‌کند)، رسم می‌کنیم؛ مماس وقائم را امتداد می‌دهیم تا، به‌ترتیب، این محور را در T و N قطع کنند. آن‌وقت، پاره‌خطهای TM و MN راطول مماس وقائم قطبی وتصویرهای TO و ON را، براین‌محور، تحت

مماس قطبی وتحت قائم قطبی می نامند. این‌هارا، با همان نشانه‌های قبلی، ولی با گذاشتن اندیس p، نشان خواهیم داد. به‌سادگی وبا استفاده از رابطهٔ (۸)، به‌دست می آید:

$$\mathrm{sbt}_p = TO = rtg\omega = \frac{r^2}{r'_\theta},\quad \mathrm{sbn}_p = ON = rcotg\omega = r'_\theta$$

وازآن جا

$$t_p = TM = \left|\frac{r}{r'_\theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\right|,\quad n_p = MN = \sqrt{r^2+r'^2_\theta}$$

۲۳۳. مثال‌ها. ۱) پیچ ارشمیدس: $r = a\theta$ (شکل ۱۲۲).

چون $r'_\theta = a$، بنابراین $\mathrm{sbn}_p = a = \mathrm{const}$. ازاین‌جا، می‌توان به‌سادگی موضع N و، از روی‌آن، قائم ومماس را، تعیین کرد.

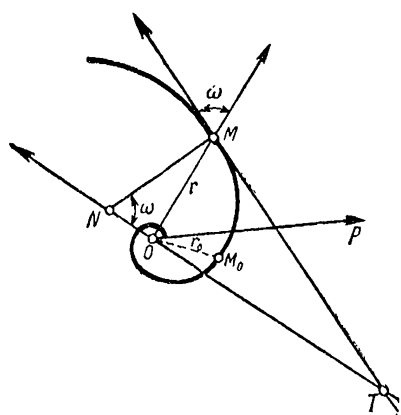
توجه‌کنیم که $tg\omega = \theta$، به‌نحوی که، وقتی $\theta \to \infty$، زاویهٔ ω به‌سمت زاویهٔ قائمهٔ میل می کند.

۲) پیچ هذلولی: $r = \dfrac{a}{\theta}$ (شکل ۱۲۳).

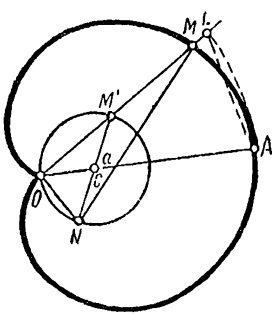
این‌بارداریم: $r'_\theta = -\dfrac{a}{\theta^2}$ و $\mathrm{sbt}_p = -a = \mathrm{const}$.، که به‌خودی خود، راه‌رسم مماس را نشان می‌دهد.

۳) پیچ لگاریتمی: $r = a.e^{m\theta}$ (شکل ۱۳۴).

داریم: $r'_\theta = mae^{m\theta}$، به‌نحوی که $tg\omega = \dfrac{1}{m} = \mathrm{const}$. وخود زاویهٔ ω، مقداری



شکل ۱۳۴



شکل ۱۳۵

است ثابت. به این ترتیب، پیچ لگاریتمی، دارای این ویژگی مهم است که، درمورد آن، زاویهٔ بین شعاع حامل و مماس، مقداری است ثابت؛ به‌زبان دیگر: پیچ لگاریتمی، همهٔ شعاع‌های حامل را، تحت زاویهٔ ثابتی قطع می کند. این ویژگی، ما را به‌یاد دایره می‌اندازد، زیرا در آن‌جا هم ـ اگر قطب را مرکز دایره گرفته باشیم ـ شعاع‌های حامل تحت زاویهٔ ثابتی (که برابراست با زاویهٔ قائمه)، دایره را قطع می کنند (ضمناً، دایره را، می‌توان، به‌عنوان حالت خاصی از پیچ لگاریتمی، به‌ازای $m=0$، درنظر گرفت).

۴) حلزون: $r=a\cos\theta+b$ (شکل ۱۳۵).

ملاحظه کنیم که $r'_\theta=-a\sin\theta$، مستقل از b است. بنابراین، اگر نقطه‌های مختلفی از حلزون را، که بریك شعاع حامل قراردارند، متناظر بامقدارهای مختلف b انتخاب کنیم، برای همهٔ این نقطه‌ها، تحت قائم قطبی مشترکی پیدا خواهیم کرد. یعنی نقطهٔ N، برای همهٔ آن‌ها، یکی است. به‌ازای $b=0$، دایره به‌دست می آید که رسم قائم، برای آن، روشن است، و از روی آن، می‌توان قائم هرحلزون غیرمشخص را ساخت (شکل ۱۳۵). ازمثلث MON، قائم قطبی محاسبه می‌شود:

$$n_p=\sqrt{a^2+2ab\cos\theta+b^2}$$

به‌خصوص، عبارت قائم قطبی، برای کاردیوئید* $(b=a)$، خیلی ساده می‌شود:

$$n_p=2a\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

۵) لمینسکات: $r^2=2a^2\cos 2\theta$ (شکل ۱۲۶).

r را تابعی از θ می گیریم ومشتق این رابطه را محاسبه می کنیم:

$$r\cdot r'_\theta=-2a^2\sin 2\theta$$

با تقسیم عضو به‌عضو این دو برابری، باتوجه به (۸)، به‌دست می آید:

$$tg\omega=\frac{r}{r'_\theta}=-\cot g\,2\theta$$

ازآن جا $\omega=2\theta+\frac{\pi}{2}$. اگر زاویه‌های شیب مماس وقائم را، α و β بنامیم، داریم:

$$\beta=\alpha-\frac{\pi}{2},\quad \alpha=\omega+\theta=3\theta+\frac{\pi}{2}$$

---

*) درشکل ۱۳۵، درست همین حالت خاص داده شده است.

درنتیجه $\beta=3\theta$: زاویهٔ شیب قائم برلمینسکات، برابراست با سه‌برابر زاویهٔ قطبی نقطهٔ تماس. ازهمین‌جا، راه سادهٔ رسم قائم، به‌دست می‌آید.

۲۳۴. مماس برمنحنی فضائی. صفحهٔ مماس برسطح. ۱°. تعریف مماس برای منحنی فضائی، عیناً همان است که برای منحنی‌های مسطح [۹۱] داشتیم. دراین‌جا، به‌حالتی که، منحنی به‌صورت پارامتری داده شده باشد، اکتفا می‌کنیم:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

مقدارمعین t و، همراه با آن، نقطهٔ معین $M(x, y, z)$ برمنحنی را ـ به‌فرض‌آن‌که این نقطه، نقطه‌ای عادی‌وساده باشد [۲۲۳] ـ انتخاب می‌کنیم. اگربه t، نمو Δt را بدهیم، آن وقت، مقدار $t+\Delta t$ ازپارامتر، نظیرنقطهٔ $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ خواهد بود. معادله‌های قاطع MM_1، به‌صورت

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}$$

درمی‌آید، که درآن‌ها، X و Y و Z مختصات جاری نقطه‌اند. مفهوم هندسی‌این معادله‌ها، با تقسیم همهٔ مخرج‌ها بر Δt، تغییر نمی‌کند:

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

اگر این معادله‌ها درحد، به‌ازای $\Delta t\to 0$، معنای خود را ازدست ندهند، آن‌وقت، وجود وضع حدی، یعنی وجود مماس، تضمین می‌شود. ولی درحد داریم:

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t} \qquad (۹)$$

و این معادله‌ها ـ مادام‌که همهٔ مخرج‌ها با هم مساوی صفرنباشند ـ بیانی ازیك خط راست هستند. به این ترتیب، درهر نقطهٔ عادی منحنی، مماس وجود دارد و با این معادله‌ها، بیان می‌شوند.

برای نقطه‌های خاص، مسالهٔ مربوط به‌مماس، باز باقی‌می‌ماند.

یادداشت. ما حد معادلهٔ قاطع را، وقتی $\Delta t\to 0$، پیداکردیم. ثابت می‌کنیم‌که این عبورحدی، با $\overline{MM_1}\to 0$ هم‌ارزاست. باتوجه به‌پیوستگی تابع‌های φ و ψ و χ، از $\Delta t\to 0$، نتیجه‌می‌شود که

$$\overline{MM_1}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0$$

برای اثبات عکس این حکم، عـدد غیرمشخص $\varepsilon>0$ را در نظرمی‌گیریم. چون $\overline{MM_1}$ تابع پیوسته‌ای است از Δt، بـرای $|\Delta t|\geqslant\varepsilon$، این تابع دارای کمترین مقدار δ است که، درضمن، مثبت است (زیرا، نقطه را، ساده فرض کرده‌ایم، یعنی به‌ازای هیچ مقدار دیگری ازپارامتر ـ غیراز t ـ به‌دست نمی‌آید). درچنین حالتی: وقتی داشته باشیم $\overline{MM_1}<\delta$. به‌ناچارخواهیم داشت: $|\Delta t|<\varepsilon$، واین،همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

گاهی بهتراست، معادلهٔ (۹)، به‌این صورت نوشته شود:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

که از (۹)، باضرب همهٔ مخرج‌ها در dt به‌دست‌آمده است.

اگر زاویه‌هایی راکـه مماس با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد، با α، β و γ نشان دهیم، آن‌گاه، کسینوس‌های هادی $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$، این‌طور بیان می‌شوند:

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},\quad \cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}$$

انتخاب علامت جلو رادیکال، به‌جهت مماس بستگی دارد.

مسألهٔ مربوط بـه‌مماس بـرمنحنی مفروض را، وقتی‌که به‌صورت معادله‌های ضمنی $F(x, y, z)=0$ و $G(x, y, z)=0$ داده شده باشد، کمی بعدتر، در۳°، مورد بررسی قرارخواهیم داد.

۲°. سطحی را با معادلهٔ صریح $z=f(x, y)$ درنظر می‌گیریم. در ۱۸۰، تعریف صفحهٔ مماس را دیدیم وبـا فرض مشتق‌پذیری تـابع $f(x, y)$*، معادلهٔ ایـن صفحه را به‌دست‌آوردیم [۱۸۰، (۶)]:

$$Z-z=f'_x(x, y)\cdot(X-x)+f'_y(x, y)\cdot(Y-y)$$

معمولاً، این علامت گذاری‌ها را به‌کارمی‌برند:

---

*) دراین‌جا، وجودوپیوستگی‌مشتق‌های نسبی را، مفروض گرفته‌ایم و، بنابراین، مشتق‌پذیری تابع، مفهوم پیدا می‌کند [۱۷۹].

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x,y)=p\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=q$$

که درنتیجه، معادلهٔ صفحهٔ مماس، این‌طور نوشته می‌شود:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \qquad (۱۰)$$

اگر $\cos\lambda$، $\cos\mu$، $\cos\nu$، کسینوس‌های هادی قائم برسطح باشند (خطی که از نقطهٔ تماس، بر صفحهٔ مماس، عمود رسم شود، قائم برسطح نامیده می‌شود)، برای آن‌ها، این عبارت‌ها را داریم:

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{۱+p^۲+q^۲}}\,,\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{۱+p^۲+q^۲}}\,,$$

$$\cos\nu=\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+p^۲+q^۲}} \qquad (۱۱)$$

علامت جلو رادیکال، بسته به‌جهت قائم، انتخاب می‌شود.

حالا، ازنقطهٔ مورد بررسی، منحنی غیرمشخص زیر را، روی سطح، می‌گذرانیم:

$$x=\varphi(t)\,,\quad y=\psi(t)\,,\quad z=\chi(t)$$

به‌طوری‌که اتحاد زیر را، نسبت به t، داشته باشیم:

$$\chi(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$$

ازاین اتحاد، نسبت به t مشتق می‌گیریم [۱۸۱]:

$$\chi'(t)=p\cdot\varphi'(t)+q\cdot\psi'(t)$$

مماس برمنحنی، درنقطهٔ غیرخاص مورد بررسی، را به‌شکل (۹) درنظرمی‌گیریم. اگربالاخره، دربرابری فوق، مشتق‌های φ'، ψ' و χ' را، با تفاضل‌های $X-x$، $Y-y$ و $Z-z$، که بنابه (۹) باآن‌ها متناسب‌اند، عوض‌کنیم، آن‌گاه به (۱۰) می‌رسیم. بنابراین، مماس (۹)، برصفحهٔ مماس (۱۰) قرارمی‌گیرد. بنابراین، می‌توانیم، صفحهٔ مماس برسطح دریك نقطهٔ مفروض برآن را، مانند صفحه‌ای تعریف‌کنیم‌که مماس‌هایی‌که ازنقطهٔ مفروض برمنحنی‌های واقع برسطح، رسم می‌شوند، برآن قرارگیرند.*

اگرسطح، بامعادلهٔ ضمنی $F(x,y,z)=۰$ داده شده باشد، درآن صورت ــ با

---

*) در این‌باره، مختصری هم، در ۱۸۵، صحبت کرده‌ایم.

فرض $F'_z \neq 0$ درنقطهٔ موردنظر ــ درهمسایگی آن می‌توان سطح را، بامعادلهٔ صریح $z = f(x, y)$ بیان کرد، به‌نحوی که وجود صفحهٔ مماس، تضمین شود. چون دراین حالت داریم:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

با گذاشتن این مقدارهای p و q درمعادلهٔ (۱۰)، می‌توان آن را، به‌این صورت نوشت:

$$F'_x(x, y, z)\cdot(X-x)+F'_y(x, y, z)\cdot(Y-y)+$$
$$+F'_z(x, y, z)\cdot(Z-z)=0 \qquad (۱۲)$$

معلوم است که درحالت $F'_z = 0$ هم، می‌توان معادلهٔ صفحهٔ مماس را، به‌همین صورت قبول کرد، به‌شرطی که یکی ازدومشتق F'_x و F'_y مخالف صفر باشند. تنهادرنقطهٔ خاص، این معادله، مفهوم خود را ازدست می‌دهد (ومسالهٔ صفحهٔ مماس، همچنان باز می‌ماند).

۳°. حالا به‌سادگی می‌توان فهمید که، اگرمنحنی، به‌وسیلهٔ دومعادلهٔ ضمنی

$$F(x, y, z)=0\ ,\ G(x, y, z)=0$$

یعنی به‌وسیلهٔ تقاطع دوسطح نظیر، داده‌شده باشد، معادلهٔ مماس بر آن را، چگونه باید پیدا کرد! اگر نقطهٔ موردنظر برمنحنی، عادی باشد، آن‌وقت، درهمسایگی آن، می‌توان منحنی را بامعادلهٔ صریح بیان کرد [**۲۲۷**]، به‌نحوی که، وجود مماس تامین شود. روشن است که این مماس، درفصل مشترک صفحه‌های مماس بردوسطح نامبرده قرار دارد و، درنتیجه، با این معادله‌ها بیان می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)&=0\\ G'_x(X-x)+G'_y(Y-y)+G'_z(Z-z)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (۱۳)$$

[زیرا، درنقطهٔ عادی، برای ماتریس ضریب‌ها، دست‌کم یکی ازدترمینان‌ها مخالف صفر است و، درنتیجه، با این معادله‌ها، در واقع، یك خط راست مشخص می‌شود].

۴°. دوباره به‌سطح برمی‌گردیم وحالتی را درنظرمی‌گیریم که‌سطح، به‌وسیلهٔ معادله‌های پارامتری، بیان شده باشد:

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v)$$

باز هم، به نقطهٔ عادی (و ساده) اکتفا می‌کنیم. چون [**۲۲۸**]، در همسایگی چنین نقطه‌ای، می‌توان سطح را به صورت صریح هم بیان کرد، بنابراین، صفحهٔ مماس وجود دارد و معادلهٔ آن را می‌توان، به‌این صورت نوشت:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \qquad (۱۴)$$

که ضریب‌های A، B و C آن را باید تعیین کرد.

اگردرمعادله‌های سطح، مقدار v را، بـه عنوان مقدارنظیر نقطهٔ انتخاب شده. تثبیت کنیم، آن‌گاه،معادله‌های منحنی مختصاتی [«منحنی(v)»]ـ که ازاین نقطه می گذردـ به‌دست می‌آید. مماس براین منحنی، در نقطهٔ مفروض، با این معادله‌ها بیان می‌شود. [(۹) را ببینید]:

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان با تثبیتu، منحنی مختصاتی خانوادهٔ دیگر را ـ که ازنقطهٔمفروض می گذرد ـ [«منحنی(u)»] به‌دست‌آورد. مماس براین منحنی، درنقطهٔ مفروض، چنین‌است:

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}$$

چون، این مماس‌ها، باید برصفحهٔ مماس (۱۴) قرار گیرند، این شرط‌ها برقرارند:

$$A\cdot x'_u+B\cdot y'_u+C\cdot z'_u=0$$

$$Ax'_v+B\cdot y'_v+C\cdot z'_v=0$$

درچنین حالتی، باید ضریب‌های A، B و C، متناسب با دترمینان‌های ماتریس

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

باشند. معمولاً، آن‌ها را، برابر با این دترمینان‌ها می گیرند:

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \qquad (۱۵)$$

حالا، معادلهٔ صفحهٔ مماس‌را می‌توان، ساده‌تر ازهرنوع دیگری، به‌صورت دترمینان‌نوشت:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0 \qquad (۱۶)$$

ودر نقطهٔ عادی، این معادله، در واقع هم، معرف یك صفحه است.

کسینوس‌های هادی قائم، چنین‌اند:

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

(۱۷)

$$\cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

۲۳۵. مثال‌ها. ۱) منحنی مارپیچی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲۸):

$$x=a\cdot\cos t,\quad y=a\cdot\sin t,\quad z=ct$$

در این حالت

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=a\cos t,\quad z'_t=c$$

ومعادله‌های مماس، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}$$

وکسینوس‌های هادی مماس.

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

توجه کنیم که $\cos\gamma=\text{const}$، درنتیجه γ هم مقدار ثابتی می‌شود. اگر فرض کنیم که منحنی مارپیچی روی استوانهٔ مستدیر قائم پیچ خورده است، آن‌گاه می‌توان گفت که، منحنی مارپیچی، همهٔ مولدهای این استوانه را، تحت زاویهٔ ثابتی، قطع می‌کند.*

۲) بیضوی: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

صفحهٔ مماس، از رابطهٔ (۱۲)، وبا توجه به‌خود معادلهٔ بیضوی، به‌دست می‌آید:

---

*) اگرسطح استوانه‌ای را، درطول مولدی ببریم و آن را بگسترانیم، منحنی مارپیچی به‌خط راستی تبدیل می‌شود که، طبعاً، همهٔ قائم‌ها را، تحت زاویهٔ ثابتی، قطع می‌کند. این نکته، درك نتیجهٔ بالا را، روشن‌ترمی‌کند.

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$$

۳) مخروط (درجهٔ دوم): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

معادلهٔ صفحهٔ مماس

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0$$

این معادله، در راس $(0,0,0)$ مخروط که یك نقطهٔ خاص است، معنای خود را ازدست می‌دهد. در آن‌جا، صفحهٔ مماسی وجود ندارد.

۴) منحنی وی‌ویانی (شکل ۱۲۷):

$$x^2+y^2+z^2=R^2\ ,\quad x^2+y^2=Rx$$

خط مماس، با این معادله‌ها، بیان می‌شود [(۱۳) را ببینید]:

$$xX+yY+zZ=R^2\ ,\quad (2x-R)X+2yY=Rx$$

این معادله‌ها، تنها در نقطهٔ خاص $(0,0,R)$، نمی‌توانند معرف یك خط راست باشند.

۵) سطح مارپیچی:

$$x=u\cos v\ ,\quad y=u\sin v\ ,\quad z=cv$$

با توجه به‌رابطهٔ (۱۶)، معادلهٔ صفحهٔ مماس، چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix}=0$$

که، با درنظر گرفتن معادلهٔ سطح، این معادله را می‌توان، به‌صورت سادهٔ زیردر آورد:

$$\sin v\cdot X-\cos v\cdot Y+\frac{u}{c}Z=uv$$

۲۳۶. نقطه‌های خاص منحنی‌های مسطح. در این جا، دربارهٔ رفتار منحنی مفروض، با معادلهٔ ضمنی

$$F(x,y)=0$$

درنزدیکی نقطهٔ (x_0, y_0) ــ که یك نقطهٔ خاص آن است ــ بحث می‌کنیم. بدون این‌که بخواهیم، این مساله را، تــا آخر، کندوکاو کنیم، تلاش می‌کنیم تا خواننده را با گونه‌های اساسی نقطه‌های خاص، آشنا کنیم. برای این منظور، تابع F را پیوسته و دارای مشتق‌های مرتبهٔ دوم پیوسته، فــرض می‌کنیم. بــدون این‌که بــه‌کلی‌بودن مساله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ درنظر گرفت: برای این منظور، می‌توان، مبداء مختصات را، به‌نقطهٔ مورد بررسی منتقل کرد. بنابراین داریم:

$$F(0, 0) = 0, \quad F'_x(0, 0) = 0, \quad F'_y(0, 0) = 0$$

این علامت‌ها را درنظر می‌گیریم:

$$a_{11} = F''_{x^2}(0, 0), \quad a_{12} = F''_{xy}(0, 0), \quad a_{22} = F''_{y^2}(0, 0)$$

فرض می‌کنیم که، دست‌کم، یکی ازعدهای a_{11}، a_{12}، a_{22}، مخالف صفر باشد و برحسب علامت عبارت $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$، سه‌حالت درنظرمــی‌گیریم. بحثی کــه دراین جا داریم، به‌طورجدی، با بحثی که درشمارهٔ **۱۹۷** داشتیم، بستگی دارد.

۱°. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

همان‌طور که می‌دانیم، دراین حالت، تابع $F(x, y)$ درنقطهٔ مبداء دارای اکسترمم است، یعنی درهمسایگی بــه‌قدرکافی کوچك این نقطه داریم: $F > 0$ یا $F < 0$ (جزخود نقطهٔ مبداء، که درآن‌جا، تابع برابر صفرمی‌شود). به‌زبان دیگر، درهمسایگی مذکور، جز نقطهٔ مبداء، حتی یك نقطه ازمنحنی وجود ندارد: نقطهٔ مبداء را دراین حالت، نقطهٔ منفرد منحنی گویند.

مثال‌های زیر، این حالت را روشن می‌کنند:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{یا} \quad (x^2 + y^2)(x + y - 1) = 0$$

نقطهٔ مبداء، به‌هردو منحنی تعلق دارد و، برای هردوی‌آن‌ها، نقطهٔ منفرد است. ولی، اولی، به‌طورکلی، ازهمین یــك نقطهٔ مبداء تشکیل شده است، و دومی، به‌جزاین نقطه، شامل خط $x + y - 1 = 0$ هم می‌باشد، که ازمبداء نمی‌گذرد.

۲°. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

شبیه شمارهٔ **۱۹۷**، $F(x, y)$ رامی‌توان، درهمسایگی‌مبداء، به‌این صورت درآورد:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2\}$$

که درآن، بــه‌ازای $x \to 0$ و $y \to 0$، همــهٔ αها هــم به‌سمت صفرمیل می‌کنند. یا، اگر

مختصات قطعی ρ و φ را در نظر بگیریم:

$$F(x, y)=\frac{\rho^{۲}}{۲}\{a_{۱۱}cos^{۲}\varphi+۲a_{۱۲}cos\varphi sin\varphi+a_{۲۲}sin^{۲}\varphi+$$

$$+\alpha_{۱۱}cos^{۲}\varphi+۲\alpha_{۱۲}cos\varphi sin\varphi+\alpha_{۲۲}sin^{۲}\varphi\}$$

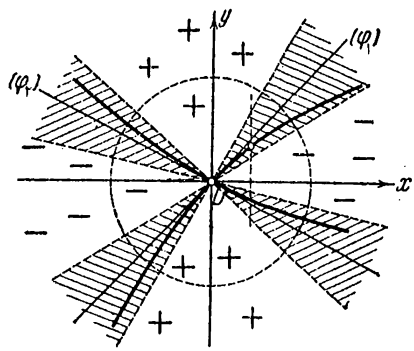
دراین حالت، اگرضمناً فرض کنیم $a_{۲۲}\neq ۰$، سه جمله‌ای $a_{۱۱}+۲a_{۱۲}t+a_{۲۲}t^{۲}$، دارای دو ریشهٔ حقیقی ومتمایز $t_۱$ و $t_۲$ خواهد بود $(t_۱<t_۲)$ وقابل تجزیه به‌عامل‌هاست: $a_{۲۲}(t-t_۱)(t-t_۲)$. فرض کنیم $\varphi_۱=\text{arc}tgt_۱$ و $\varphi_۲=\text{arc}tgt_۲$، به‌نحوی که $t_۱=tg\varphi_۱$ و $t_۲=tg\varphi_۲$. سه‌جمله‌ای اول درون آکولاد را، می‌توان به‌صورت سادهٔ زیر نوشت:

$$a_{۱۱}cos^{۲}\varphi+۲a_{۱۲}cos\varphi sin\varphi+a_{۲۲}sin^{۲}\varphi=$$

$$=a_{۲۲}cos^{۲}\varphi(tg\varphi-tg\varphi_۱)(tg\varphi-tg\varphi_۲) \qquad (۱۸)$$

ازاین‌جا معلوم می‌شود که اگرازمبداء مختصات، دوخط راست چنان رسم کنیم که با محور x، زاویه‌های $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ را بسازند ــ برای سهولت‌کار، آن‌ها را خطهای $(\varphi_۱)$ و $(\varphi_۲)$ می‌نامیم ــ صفحهٔ مختصات را، به دوناحیهٔ زاویه‌ای تقسیم می‌کنند که دریکی از آن‌ها، سه جمله‌ای مذکور، مثبت و در دیگری، منفی می‌شود* (شکل ۱۳۶).

حالا، خطهای $(\varphi_۱)$ و $(\varphi_۲)$ را، در درون دوناحیهٔ زاویه‌ای به‌قدرکافی کوچك، قرار می‌دهیم: این‌دوناحیهٔ‌زاویه‌ای کوچك، به‌ترتیب، بین خطهای $(\varphi_۱-\varepsilon)$ و $(\varphi_۱+\varepsilon)$



شکل ۱۳۶

*) با این مطلب، آنچه راکه درشمارهٔ ۲، ۱۹۷° گفته‌ایم، عمیق‌ترمی‌کنیم. درآن‌جا، کافی بود، علامت‌سه‌جمله‌ای‌را، تنها روی‌این دوخط راست ــ به‌طورجداگانه ــ موردبررسی قراردهیم.

یا $(\varphi_2-\varepsilon)$ و $(\varphi_2+\varepsilon)$ قرار گرفته‌اند (این زاویه‌ها را، درشکل ۱۳۶، با هاشور نشان داده‌ایم). اگر دایره‌ای، با شعاع به‌قدرکافی کوچك r_ε، به مرکز مبداء مختصات، انتخاب کنیم، می‌توان حکم کرد که: به‌وسیلهٔ تقسیم زاویه‌های مذکور، این دایره، به دو ناحیهٔ زاویه‌ای تقسیم می‌شود، که در هرکدام ازآن‌ها، خود تابع $F(x, y)$، علامت ثابتی دارد، در یکی مثبت و در دیگری منفی (شکل را ببینید). در واقع، چون با تغییر زاویه در بیرون بازه‌های $(\varphi_1-\varepsilon, \varphi_1+\varepsilon)$ و $(\varphi_2-\varepsilon, \varphi_2+\varepsilon)$، سه‌جمله‌ای (۱۸) برابر صفر نمی‌شود، بنابراین، از لحاظ قدرمطلق، ازعدد مثبتی مثل m_ε بزرگتر است. از طرف دیگر، به‌ازای مقدار به‌قدرکافی کوچك ρ، عبارت $a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi$ (از لحاظ قدر مطلق) کمتر از m_ε می‌شود و، از همین جا، حکم ثابت می‌شود (با بحث ۱۹۷، ۱°، مقایسه کنید).

حالا دو وضع قائم هاشورخوردهٔ قطاع دایره را درنظر می‌گیریم، مثلاً* آن‌هایی را که باخطهای راست $(\varphi_1-\varepsilon)$ و $(\varphi_1+\varepsilon)$ محصورشده‌اند. چون‌تابع، روی این خطهای راست، دارای علامت‌های مختلفی است، بنابراین برهرقائمی که‌قطاع‌های نامبرده را قطع کند، می‌توان نقطه‌ای پیدا کردکه، در آن، $F(x, y)$ برابرصفر شود، یعنی نقطه‌ای ازمنحنی ما باشد. واین، نتیجه‌ای است از ویژگی تابع پیوسته [۸۵]، به‌شرطی آن را در مورد $F(x, y)$، به‌عنوان تابعی از y به‌کاربریم (با تثبیت x).*

به‌این ترتیب، در درون هرجفت قطاع هاشورخورده، شاخه‌ای از منحنی وجود دارد که از مبداء مختصات می‌گذرد و، در عین‌حال، در بیرون آن‌ها ودر محدودهٔ دایره، نقطه‌ای ازمنحنی وجودندارد. با توجه به نامشخص‌بودن ε، روشن است که این شاخه‌ها، در مبداء به ترتیب بر خطهای (φ_1) و (φ_2) مماس‌اند.

البته، این مساله ناگشوده ماندکه، آیا نقطه‌ای از قائم‌که درآن $F(x, y)$ برابرصفر است، منحصر به‌فرد است! اگر، ازاین‌نقطه، دوتاوجود داشته باشد، بنابرقضیهٔ رول [۱۱۱] بین آن‌ها و بر همان قائم، نقطه‌ای پیدا می‌شود که در آن داشته باشیم: $F'_y(x, y)=0$. بنابراین، منحصربه‌فردبودن این نقطه، وقتی تایید می‌شودکه ثابت‌کنیم، دست‌کم‌درنزدیکی مبداء، این برابری ممکن نیست.

فرض می‌کنیم خلاف آن درست باشد (برهان خلف). آن وقت، برای دنباله‌ای از نقطه‌های $\{(x_n, y_n)\}$ ـ که درآن $x_n \to 0$ و $\frac{y_n}{x_n} \to tg\varphi_1=t_1$، خواهیم داشت:

---

*) با اثبات قضیهٔ I شمارهٔ ۲۰۶، دربارهٔ وجود تابع ضمنی، مقایسه کنید.

$F'_y(x_n, y_n)=0$. دستور نموهای محدود [۱۸۳، (۹)] را، دربارهٔ تابع $F'_y(x, y)$، به‌کار می‌بریم:

$$0=F'_y(x_n, y_n)-F'_y(0, 0)=$$
$$=F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot x_n+F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot y_n \quad (0<\theta_n<1)$$

یا

$$F''_{xy}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)+F''_{y^2}(\theta_n x_n, \theta_n y_n)\cdot\frac{y_n}{x_n}=0$$

در این‌جا، با عبور به‌حد، بالاخره نتیجه می‌شود: $a_{12}+a_{22}t_1=0$ یا $t_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$، که نادرست است: چنین مقدار t_1 را، تنها درحالتی می‌توان داشت، که ریشه‌های سه‌جمله‌ای $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$ باهم برابر باشند.

از آن‌چه گفته شد، ضمناً، نتیجه می‌شود که، درنزدیکی کافی به مبداء، هیچ نقطه‌ای از شاخهٔ مذکور ــ به‌جز خود مبداء ــ نقطهٔ خاص نیست.

درمورد حالتی هم که داشته باشیم $a_{22}=0$ ولی $a_{11}\neq 0$، یا $a_{11}=a_{22}=0$ ولی $a_{12}\neq 0$، می‌توان به ترتیب مشابهی بحث کرد. تنها به این نکته توجه کنیم که، در حالت آخر، نقش خطهای (φ_1) و (φ_2)، به‌عهدهٔ محورهای مختصات است.

به این ترتیب، با شرط $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$، نقطهٔ $(0, 0)$، نقطهٔ مضاعف منحنی می‌شود: در آن‌جا، دو شاخهٔ منحنی، یکدیگر را قطع می‌کنند. هریك از این شاخه‌ها، در این نقطه، مماس خودش را دارد، ضریب زاویه‌های این مماس‌ها، همیشه، از معادلهٔ $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2=0$ تعیین می‌شوند؛ تنها در حالت $a_{22}=0$، باید علاوه بر ریشهٔ معادله، بی‌نهایت را هم ریشهٔ دیگری از معادله به‌حساب آورد.

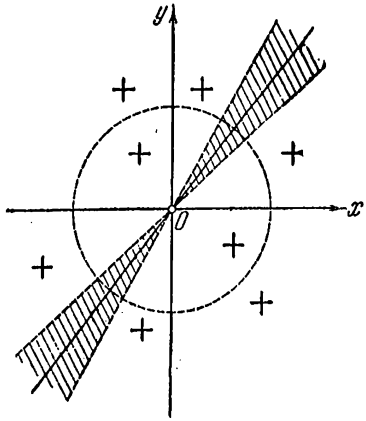
مثال را می‌توان، از منحنی‌هایی که قبلاً آشنا شده‌ایم، انتخاب کرد:

[لمینسکات، شکل ۱۲۶] $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$

[برگ‌های دکارتی، شکل ۱۱۷] $x^3+y^3-3axy=0$

که در آن‌ها، مبداء مختصات، نقطهٔ مضاعف است. در حالت اول داریم: $a_{11}=-2a^2$، $a_{12}=0$، $a_{22}=2a^2$، $t_1=1$، $t_2=-1$، به‌نحوی که، نیمسازهای زاویه‌های مختصاتی، مماس‌های در مبداء می‌شوند. درحالت دوم: $a_{11}=a_{22}=0$، $a_{12}=-\frac{3}{2}a$، $t_1=0$، $t_2=\infty$؛ مماس‌های در مبداء عبارتند از خود محورهای مختصات.

۳°. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$. در این‌جا هم فرض می‌کنیم: $a_{22}\neq 0$ سه‌جمله‌ای درجه دوم $a_{11}+2a_{12}t+a_{22}t^2$، در این‌حالت، دارای ریشهٔ مضاعف $t_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$ است. مثل قبل، با فرض $\varphi_1=\operatorname{arctg} t_1$، خطی از مبداء مختصات می‌گذرانیم که با محور x، زاویه‌ای برابر φ_1 بسازد، این خط را، در یك ناحیهٔ زاویه‌ای، بین خط‌های $(\varphi_1-\varepsilon)$ و $(\varphi_1+\varepsilon)$ محصور می‌کنیم (در شکل ۱۳۷، این ناحیه، هاشورخورده است). شبیه بحث قبلی، می‌توان معلوم کرد که، در بیرون ناحیهٔ هاشورخورده، ولی بـه اندازهٔ کافی نزدیك به مبداء، تابع $F(x, y)$، در هر دو طرف، علامت ثابتی دارد: مثبت یا منفی، بسته به این‌که $a_{22}>0$ یا $a_{22}<0$ باشد. تابع، روی خط‌های $(\varphi_1\pm\varepsilon)$، علامت ثابتی دارد و نمی‌تـوان از قضیهٔ کوشی استفاده کرد.



شکل ۱۳۷

در بحث مربوط به این‌حالت، عمیق‌تر نمی‌شویم، چرا که مستلزم بحث‌های پیچیده و استفاده ازمشتق‌های مرتبه‌های بالاتر است. تنها درمورد امکان‌هایی که در این‌حالت وجود دارد، اشاره‌ای می‌کنیم:

a) در نزدیکی مبداء، به‌جز خود آن، نقطهٔ دیگری ازمنحنی وجود ندارد: نقطهٔ منفرد (مثل حالت ۱°).

مثال‌ها: $x^4+y^2=0$ یا $(x^4+y^2)(x+y-1)=0$

در هردو «منحنی»، مبداء مختصات نقطهٔ منفرد است.

b) در هر دو زاویهٔ هاشورخورده (در نزدیکی کافی به مبداء)، بر هرقائم، دو نقطهٔ منحنی قرار دارد. از مبداء، دوشاخه از منحنی می‌گذرد که، در آن‌جا، دارای مماس مشترك

(φ_1) هستند؛ نقطهٔ مضاعف (مثل حالت ۲°).

مثال: $x^4 - y^2 = 0$، یعنی $y = \pm x^2$، دوسهمی که در مبداء مختصات، برمحور x مماس‌اند.

c) در یکی از زاویه‌های هاشورخورده، نقطه‌ای از منحنی وجود ندارد، ولی در دیگری، دو شاخه از منحنی وجود دارد. این دو شاخه، مثل این است که، در مبداء، خاتمه می‌یابند و، در آن‌جا، دارای مماس مشترك (φ_1) هستند. در این‌جا، با نوع تازه‌ای از نقطهٔ خاص، سروکار داریم: نقطهٔ برگشت (یا نقطهٔ راس مانند)، بسته به‌این که، دوشاخهٔ منحنی‌در دوطرف مماس مشترك قرار گیرند یا در یك‌طرف آن، نقطهٔ برگشت را نوع اول یا نوع‌دوم گویند.

به‌عنوان نمونه‌ای از منحنی، که دارای نقطهٔ برگشت نوع اول باشد، می‌توان‌منحنی زیر را آورد:

$$y^2 - x^3 = 0$$

(سهمی نیمهٔ مکعبی، شکل ۱۱۵)

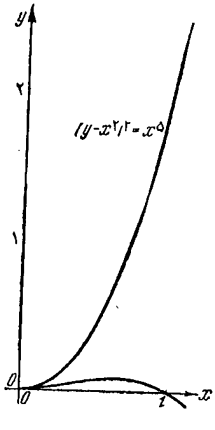
نقطهٔ برگشت نوع دوم را ــ که حالت نادرتری است ــ می‌توان، با این مثال، روشن‌کرد:

$$x^5 - (y - x^2)^2 = 0$$

یا

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{x} \quad (x \geqslant 0)$$

هردو شاخهٔ منحنی (دست‌کم در نزدیکی مبداء) در بالای‌محور x قرارگرفته‌اند و برهمین محور مماس‌اند (شکل ۱۳۸).



شکل ۱۳۸

اگرداشته باشیم: $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$، بایدمشتق‌های مرتبهٔ بالاتر را بررسی کنیم. در این حالت، ممکن است، با نقطه‌های خاص نوع مرکب‌تری هم، سروکار پیدا کنیم (نقطهٔ تکراری مرتبهٔ سوم یا، به‌طورکلی، نقطهٔ تکراری از مرتبهٔ nام و غیره).

۲۳۷. حالت نمایش پارامتری منحنی. چند کلمه‌ای‌هم، دربارهٔ نقطه‌های خاص منحنی‌های مسطحی صحبت می‌کنیم، که با معادله‌های پارامتری، معرفی شده‌اند:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

فرض کنیم، به‌ازای $t=t_0$ داشته باشیم:

$$x'_0=\varphi'(t_0)=0,\ y'_0=\psi'(t_0)=0$$

و، ضمناً، فرض می‌کنیم که از مشتق‌های مرتبهٔ دوم x''_0 و y''_0، دست‌کم یکی، و مثلاً x''_0، مخالف صفر باشد. قاطعی، از نقطه‌های (x_0, y_0) و (x, y) منحنی، نظیر مقدارهای t_0 و t پارامتر، رسم می‌کنیم. معادلهٔ این قاطع را، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}$$

ولی از روی دستور تیلور [با جملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو، **۱۲۴**، (۱۰a)] ـ با توجه به‌این‌که $x'_0=y'_0=0$ ـ داریم:

$$x-x_0=\frac{1}{2}(x''_0+\alpha)(t-t_0)^2$$

$$y-y_0=\frac{1}{2}(y''_0+\beta)(t-t_0)^2$$

که‌در آن‌ها، α و β، به‌ازای $t\to t_0$، به‌سمت صفر میل می‌کنند. اگر این مقدارها را، در معادلهٔ قاطع قرار دهیم، بعد از ساده‌کردن دو مخرج به $\frac{1}{2}(t-t_0)$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{X-x_0}{x''_0+\alpha}=\frac{Y-y_0}{y''_0+\beta}$$

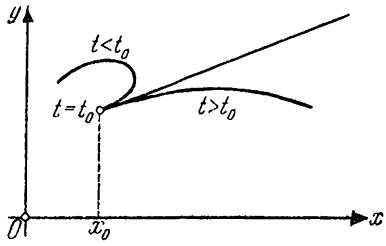
در این‌جا، می‌توان، به‌ازای $t\to t_0$*، به‌حالت حدی عبور کرد و، از این راه، معادله مماس را به‌دست آورد:

$$\frac{X-x_0}{x''_0}=\frac{Y-y_0}{y''_0}\ \text{یا}\ Y-y_0=\frac{y''_0}{x''_0}(X-x_0) \qquad (19)$$

فرض کرده‌بودیم $x''_0\neq 0$، مثلاً می‌گیریم $x''_0>0$، در این‌صورت، تابع $x=\varphi(t)$، به ازای $t=t_0$، دارای می‌نیمم (خاص) است [**۱۳۷**]. یعنی، به ازای مقدارهای t نزدیک

---

*) یادداشت شمارهٔ **۲۳۴** را ببینید، که به‌شرط ساده بودن نقطهٔ مورد بررسی، در این جا هم، می‌توان از آن استفاده کرد.



شکل ۱۳۹

به t_0 (خواه داشته باشیم $t<t_0$ و خواه $t>t_0$)، داریم: $x>x_0$. به این ترتیب، در نقطهٔ (x_0, y_0)، دوشاخهٔ منحنی، نظیر $t<t_0$ و $t>t_0$، به‌هم‌می‌چسبند؛ این دوشاخه دارای مماس مشترك (مایل یا افقی) هستند و هردو در سمت راست قائم $x=x_0$ قرار گرفته‌اند. به زبان دیگر، در این‌جا، با نقطهٔ برگشت سروکار داریم (شکل ۱۳۹). و این، اساسی‌ترین حالت نقطهٔ خاص، برای منحنی‌های با نمایش پارامتری است.

به سادگی می‌توان بحث را ادامه داد و معلوم کرد که، این نقطهٔ برگشت، از کدام نوع است. برای این منظور، از مشتق سوم استفاده می‌کنیم و نموهای $x-x_0$ و $y-y_0$ را، به این‌صورت، می‌نویسیم:

$$x-x_0=\frac{1}{2}x_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(x_0'''+\tilde{\alpha})(t-t_0)^3$$

$$y-y_0=\frac{1}{2}y_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}(y_0'''+\tilde{\beta})(t-t_0)^3$$

که در آن‌ها، $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$، به‌ازای $t\to t_0$، به‌سمت صفر میل می‌کنند.

عرض Y، نقطهٔ مماس با طول x را، با استفاده از معادلهٔ (۱۹)، حساب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$Y-y_0=\frac{y_0''}{x_0''}(x-x_0)=\frac{1}{2}y_0''(t-t_0)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{y_0''}{x_0''}(x_0''+\tilde{\alpha})(t-t_0)^3$$

بالاخره، تفاضل عرض‌های Y و y، نظیر همان یك مقدار x، را تشکیل می‌دهیم:

$$Y-y=\frac{1}{6}\left(\frac{x_0'''y_0''-x_0''y_0'''}{x_0''}+\tilde{\gamma}\right)(t-t_0)^3$$

که در آن، $\tilde{\gamma}$، باز هم، یك بی‌نهایت کوچك را، به‌ازای $t\to t_0$، نشان می‌دهد.

حالا، اگر فقط داشته باشیم: $x_0''y_0'''-x_0'''y_0''\neq 0$ (که معمولاً چنین است)، روشن است که تفاضل $y-Y$، به‌ازای $t<t_0$ و $t>t_0$، علامت‌های مختلف خواهد داشت، یعنی درواقع،

برای دوشاخه‌ای از منحنی که در نقطهٔ (x_0, y_0) به هم می‌رسند (البته، با این فرض که، مقدارهای t را به‌قدرکافی به t_0 نزدیك بگیریم)، شاخه‌ها در دوطرف مماس واقع می‌شوند و با نوع اول نقطهٔ برگشت سروکار داریم.

با مثال‌هایی از این نوع، بارها برخورد داشته‌ایم؛ سیکلوئید، هیپو یا اپی‌سیکلوئید و گستردهٔ دایره، همگی دارای چنین نقطهٔ برگشتی هستند (شکل‌های ۱۱۷ — ۱۲۱).

ممکن است، درحالت استثنائی داشته باشیم: $x'_0y''_0 - x''_0y'_0 = 0$. دراین‌صورت، بسط Y — برحسب توان‌های $(t - t_0)$، با درجهٔ‌چهارم یادرجه‌های بالاتر این دوجمله‌ای آغاز می‌شود. اگر این درجه، زوج باشد، آن‌گاه، نقطهٔ خاص مورد بررسی، نقطهٔ برگشت نوع دوم خواهد بود.

§۳. منحنی‌های مماس برهم

۲۳۸. پوش خانوادهٔ منحنی‌ها. اگر دو منحنی در نقطهٔ M_0 مشترك باشند و، دراین نقطه، مماس مشترك داشته‌باشند، گویند که دو منحنی درنقطهٔ M_0 برهم مماس‌اند. در این‌بند به مسأله‌های مربوط به منحنی‌های مسطح مماس برهم، می‌پردازیم.

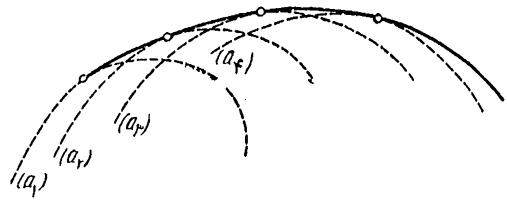
با آغاز به بررسی پوش خانوادهٔ منحنی‌ها، ابتدا، خود مفهوم خانوادهٔ منحنی‌هارا روشن می‌کنیم. تاکنون هم، بارها، به معادله‌هایی ازمنحنی‌ها برخورد داشته‌ایم، که‌درآن‌ها علاوه بر مختصات جاری x و y نقطهٔ متغیر، یك یا چند پارامتر هم وجود داشته است. در حالت یك پارامتر، مثلاً a، معادله به این‌صورت است:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

سمت چپ، تابعی است با سه متغیر؛ ولی متغیر a، به خاطر نقش خاصی که به‌عهده دارد، با دومتغیر دیگر متفاوت است. برای این‌که یك منحنی مشخص به‌دست آید، باید مقدار a تثبیت‌شود. وقتی‌که a تغییر کند (معمولاً، در محدودهٔ یك بازه)، درحالت کلی، منحنی‌های مختلفی (از نظر شکل یا وضع استقرار خود) به‌دست می‌آیند.

همهٔ این منحنی‌ها را، روی هم، خانوادهٔ منحنی‌های یك پارامتری، و معادلهٔ (۱)را، معادلهٔ این «خانواده» می‌نامند.

گاهی پیش می‌آیدکه، برای یك خانواده از منحنی‌ها، می‌توان یك منحنی پیداکرد که بر هرکدام از منحنی‌های خانواده، در یك یا چند نقطه مماس باشد و، ضمناً، خود این منحنی، تماماً، از همین نقطه‌های تماس، تشکیل‌شده باشد (شکل ۱۴۰). این منحنی‌را، پوش خانوادهٔ مفروض گویند. حالا نشان می‌دهیم که، چگونه می‌توان معلوم‌کرد کـه برای خانواده پوش وجود دارد و، درحالت وجود، چگونه باید آن‌را پیدا کرد!



شکل ۱۴۰

برای این منظور، فرض می‌کنیم که پوش وجود دارد.

برای سادگی‌کار، فرض می‌کنیم که صحبت برسر پوشی (یا درست‌تر: شاخه‌ای از پوش) است که، باهر منحنی خانواده، دریك نقطه مماس باشد. در چنین صورتی، مختصات این نقطهٔ تماس، به طور یك ارزشی، به وسیلهٔ معادلهٔ منحنی خانواده، تعیین می‌شود، یعنی با مقدار پارامتر a:

$$x=\varphi(a),\ y=\psi(a) \qquad (۲)$$

چون، تمامی پوش، از نقطه‌هـای تماس، تشکیل شده است، این معادله‌هـا، نمایش پارامتری پوش را به‌دست می‌دهند.

فرض می‌کنیم که مشتق‌هـای نسبی تابع F و مشتق تابع‌های φ و ψ، وجود داشته و پیوسته باشند.

نقطهٔ (۲)، با همان مقدار پارامتر a، برمنحنی (۱) هم قرار دارد، به‌نحوی که،نسبت به a، این اتحاد برقرار است:

$$F(\varphi(a),\ \psi(a),\ a)=0 \qquad (۳)$$

نسبت بهa، دیفرانسیل‌کامل می‌گیریم [۱۸۱، ۱۸۵]، به‌دست می‌آید:*

$$F'_x dx+F'_y dy+F'_a da=0 \qquad (۴)$$

ضمناً، مشتق‌ها را، به‌ازای مقدارهایی ازآوندها که در (۳) داده شده‌اند، محاسبه‌کرده‌ایم و dx و dy، به‌معنای دیفرانسیل تابع‌های (۲) هستند.

حالا، این واقعیت را کـه، پوش در نقطهٔ (۲) بر منحنی (۱) مماس است، به زبان تحلیلی در می‌آوریم. مماس برمنحنی (۱) [۲۳۰، (۵) را ببینید]:

$$F'_x\cdot(X-x)+F'_y\cdot(Y-y)=0 \qquad (۵)$$

و مماس بر منحنی (۲) [۲۳۰، (۷)]:

---

*) دراین‌جا، ضمناً، از پیوستگی مشتق‌های نسبی تابع F، استفاده می‌شود.

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy} \qquad (۶)$$

باید برهم منطبق باشند. شرط انطباق این دو خط را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$F'_x.dx+F'_y.dy=0 \qquad (۷)$$

درضمن، مثل قبل، از x و y، مقدارهای (۲) و از dx و dy، دیفرانسیل تابع‌های (۲)را، در نظر داریم.

یادآوری کنیم که، معادله‌های (۵) و (۶)، در واقع، به‌شرطی معرف مماس‌های بر منحنی‌ها هستندکه نقطهٔ مورد بررسی، برای آن‌ها، نقطهٔ خاص نباشد. با وجود این، برابری (۷) حتی برای موردی‌که، این نقطه برای این یاآن خم، نقطهٔخاص باشد، درست‌است.

از مقایسهٔ (۷) و (۴) و با توجه به‌این‌که dx عددی دلخواه است، معلوم می‌شودکه $F'_a=0$، و یا به‌صورت درست آن

$$F'_a(\varphi(a),\psi(a),a)=0 \qquad (۸)$$

اتحادهای (۳) و (۸) نشان می‌دهندکه تابع‌های مجهول (۲)، باید به‌طوراتحادی، نسبت a، در دستگاه معادله‌های زیر صدق کنند:

$$F(x,y,a)=0,\quad F'_a(x,y,a)=0 \qquad (۹)$$

بنابراین، اگر پوش وجود داشته‌باشد، معادله‌های پارامتری آن، از حل دستگاه(۹)، نسبت به x و y، به‌دست می‌آیند.

در حالتی که این دستگاه، به‌ازای متغیر a، به‌طور کلی، به‌جواب‌هایی به‌صورت تابع‌هایی از a، منجر نشود، از قبل معلوم است کـه پوش اصلاً وجود ندارد. حالا فرض می‌کنیم که، در نتیجهٔ حل دستگاه (۹)، معادله‌های (۲)، معرف یك‌منحنی بدون نقطهٔ خاص باشد.* آیا، این منحنی، پوش خانوادهٔ منحنی‌ها، خواهد بود؟

چون تابع‌های (۲) در معادله‌های (۹) صدق می‌کنند. بنابراین، اتحادهـای (۳) و (۸) برقرارند. با مشتق‌گیری از نخستین آن‌هـا، (۴) را به‌دست می‌آوریم، که از مقایسهٔ آن با (۸)، به بـرابـری (۷) می‌رسیم. اگـر نقطهٔ (۲) (حتی برای یك مقدار a)، نقطهٔ خاصی از منحنی نظیر (۱) نباشد، به‌نحوی‌کـه معادلهٔ (۵)، حقیقتاً، معرف مماس بر منحنی مذکور باشد، آن‌گاه، برابری (۷)، موجب انطباق این مماس، بر مماس (۶) ــ بر منحنی

---

*) اگر نقطه‌های خاص جداگانه‌ای وجود داشته باشد، به بازه‌ای از تغییر پارامتر، کـه شامل مقدارهای بحرانی نیست، اکتفا می‌کنیم.

(۲) ــ می‌شود. در این حالت، منحنی (۲)، در واقع، پوش خانواده می‌شود.

به‌خصوص، این وضع را می‌توان تضمین کرد، اگر مثلاً*، همهٔ منحنی‌های خانوادهٔ مفروض، بدون نقطهٔ خاص باشند.

برعکس، اگر چنین نقطه‌های خاصی، وجود داشته باشد، و با تغییر a، مکان هندسی آن‌ها، منحنی (۲) را به‌وجود آورد، آن‌گاه، تابع‌های φ و ψ نظیر آن، الزاماً در دستگاه (۹) صدق می‌کنند*، هر چند در این حالت، ممکن است این منحنی پوش نباشد.

به‌این ترتیب، وقتی‌که نقطه‌های خاص‌وجود دارد، معادله‌های (۲)، که از حل‌دستگاه (۹) به‌دست می‌آیند، نیاز به‌تحقیق دارند: این‌معادله‌ها، ممکن است معرف پوش باشند، یا ممکن است مکان هندسی نقطه‌های‌خاص منحنی‌های خانواده باشند، و یا بخشی از آن، پوش و بخش دیگری، همان مکان هندسی را مشخص کند.

معمولاً*، برای تعیین پوش، به‌دستگاه معادله‌های (۹)، اکتفا نمی‌کنند، بلکه جلوتر می‌روند و پارامتر a را، بین آن‌ها، حذف می‌کنند. به‌زبان دیگر، رابطه‌ای به‌صورت

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (۱۰)$$

به‌دست می‌آورند، که شامل a نیست و کافی برای آن است‌که، به‌ازای هرزوج مقدارهای x و y، بتوان چنان مقداری برای a پیدا کرد کـه، همراه x و y، در هر دو معادلهٔ (۹)، صدق کند.

همهٔ نقطه‌های منحنی (۲) ــ حاصل ازحل دستگاه (۹) ــ باید درمعادلهٔ (۱۰) صدق کنند. به‌این مناسبت، اگر معادلهٔ اخیر، معرف یك منحنی نباشد. به‌فوریت معلوم می‌شودکه پوش وجود ندارد. اگـر هم، معادلهٔ (۱۰)، معرف یك منحنی باشـد (آن‌را منحنی مبین خانواده می‌نامند)، باز هم نیاز به تحقیق دارد. در ترکیب آن، پوش (در صورت وجود) وجود دارد، ولی مکان هندسی نقطه‌های خاص‌هم (اگرچنین نقطه‌هایی حضورداشته‌باشند)، باید باشد. علاوه بر آن، یك امکان نامطبوع هم وجود دارد: ممکن است در ترکیب‌منحنی مبین، خیلی‌ساده، یك یا چند منحنی جزئی ازخانواده، وارد شده‌باشد. وقتی‌که مجموعه‌ای ناهتناهی، از نقطه‌های منحنی مبین، نظیر یك مقدار a باشند و، همراه با آن، درمعادله‌های (۹)، صدق کنند، چنین‌وضعی پیش می‌آید**.

---

*) برای آن‌ها، (۳) برقرار است و، در نتیجه، (۴) هم؛ و سپس (۷)، همان طور کـه در متن دیدیم؛ و از مقایسهٔ با (۴)، به (۸) می‌رسیم.

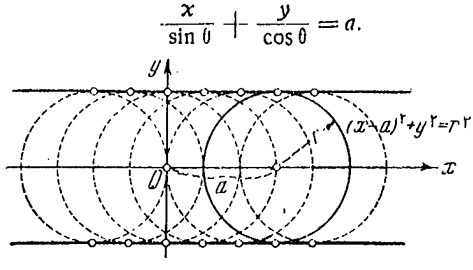
**) اگر مستقیماً بامعادلهٔ (۹) عمل شود، این امکان ازبین می‌رود، زیرا می‌کوشند، معادله‌ها را، با در نظرگرفتن متغیر a، حل کنند.

بهتر است، همهٔ این موضوع‌ها را، با مثال، روشن کنیم.

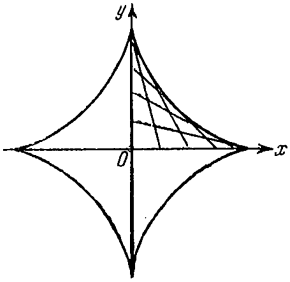
۲۳۹. مثال‌ها. ۱) پوش خانوادهٔ دایره‌های (شکل ۱۴۱)

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad (r=\text{const.})$$

نسبت به a مشتق می‌گیریم $2(x-a)=0$. با حذف a، به دست می‌آید: $y^2-r^2=0$، یا $y=\pm r$. دو خط موازی محور x، که به‌روشنی، پوش را تشکیل می‌دهند.*



شکل ۱۴۱



شکل ۱۴۲

۲) پاره‌خطی به‌طول a، چنان حرکت‌می‌کند که، همیشه، دو انتهای آن بر دومحور مختصات قرار گرفته باشد. پوش این خطها را پیدا کنید (شکل ۱۴۲).

به‌عنوان پارامتر، زاویهٔ θ را انتخاب می‌کنیم، که محور x با عمود بر خط متحرك می‌سازد. معادله را می‌توان، به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=a$$

نسبت به θ، مشتق می‌گیریم:

---

*) اگر معادلهٔ خانواده را، به‌صورت

$$x-a\pm\sqrt{r^2-y^2}=0$$

بنویسیم، آن‌گاه، نتیجهٔ مشتق‌گیری نسبت به a، می‌شود، $0=-1$؛ ازعدم امکان این برابری، ظاهراً باید نتیجه گرفت که پوش وجود ندارد. ولی این نتیجه‌گیری درست نیست. درمعادله، باید تمامی شرطهای وجود و پیوستگی مشتق‌های نسبی سمت چپ معادلهٔ خانواده برقرار باشد، در حالی که، در این جا، (درست به ازای $y=\pm r$) مشتق متناهی، نسبت به y، وجود ندارد.

$$-\frac{x}{\sin^{۲}\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^{۲}\theta}\sin\theta=۰$$

یا

$$\frac{x}{\sin^{۳}\theta}=\frac{y}{\cos^{۳}\theta}$$

این معادله را، به‌این طریق هم می‌توان نوشت:

$$\frac{\frac{x}{\sin\theta}}{\sin^{۲}\theta}=\frac{\frac{y}{\cos\theta}}{\cos^{۲}\theta}=\frac{\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}}{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta}=a$$

از آن‌جا: $x=a.\sin^{۳}\theta$، $y=a.\cos^{۳}\theta$.

همان‌طور که می‌بینید، این معادله‌ها، نمایش پارامتری آستروئید هستند [۲۲۴، ۴]:

$t=\frac{\pi}{۲}-\theta$ [، که در این‌جا، پوش مطلوب است.

این ویژگی آستروئید را، یك‌بار دیگر هم، دیده بودیم [۲۳۱، ۳)].

۳) در بسیاری موردها، مثل این است که پوش، آن‌بخش از صفحه را کـه به‌وسیلهٔ منحنی‌های خانواده اشغال شده است، محدود می‌کند («دور می‌زند»). برای این که نشان دهیم که، همیشه این‌طور نیست، مثال زیر را می‌آوریم.

$$y=(x-a)^{۳}$$

(شکل ۱۴۳).

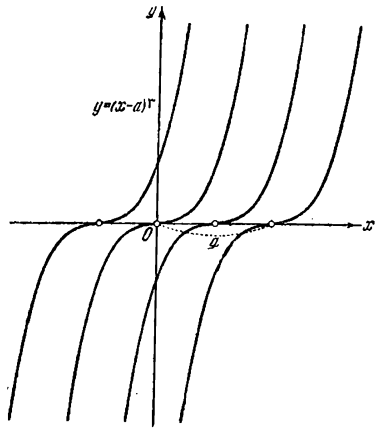
در این‌جا، پـوش عبارت است از محور x، کـه همهٔ منحنی‌های خانواده را قطع می‌کند. همین وضع، در مثال بغرنج‌تر زیر هم، دیده می‌شود.

۴) پوش خانوادهٔ $y=a^{۲}(x-a)^{۲}$ (سهمی‌ها) را پیدا کنید.

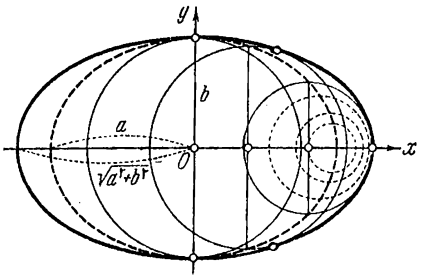
این معادله را، با معادلهٔ زیر (که مشتق آن نسبت به a است)، مقایسه می‌کنیم:

$$۲a(x-a)^{۲}-۲a^{۲}(x-a)=۲a(x-a)(x-۲a)=۰$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید: یا $x=a$ $(y=۰)$ و یا $x=۲a$ $(y=a^{۴})$؛ به‌نحوی کـه منحنی مبین، از خط $y=۰$ و منحنی $۱۶y=x^{۴}$ تشکیل می‌شود؛ اولی، بـر همهٔ سهمی‌ها در رأس مماس است و دومی، بـا هر سهمی سه نقطهٔ مشترك دارد: به‌ازای $x=۲a$ بر آن مماس است و به‌ازای $x=-۲a\pm۲a\sqrt{۲}$ آن‌را قطع می‌کند.



شکل ۱۴۳



شکل ۱۴۴

۵) این بیضی را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

می‌خواهیم پوش خانوادهٔ دایره‌هایی را جست و جو کنیم که به‌قطر وترهایی از بیضی، که موازی محور yاند، رسم شده باشند (شکل ۱۴۴).

اگر طول t، مرکز دایره‌ها را، به‌عنوان پارامتر، انتخاب کنیم، معادلهٔ این خانواده، چنین می‌شود:

$$F(x, y, t)=(x-t)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-t^2)=0$$

ضمناً، t در بازهٔ $[-a, a]$ تغییر می‌کند. داریم:

$$F'_t=-2(x-t)+\frac{2b^2}{a^2}t=0 \Rightarrow t=\frac{a^2}{a^2+b^2}x$$

با گذاشتن این مقدار t، در معادلهٔ $F=0$، معادلهٔ پوش به این‌صورت درمی‌آید:

$$\left(x-\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^4x^2}{(a^2+b^2)^2}\right)=0$$

و یا، پس از ساده‌کردن

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

به‌یك بیضی، با همان محورهای تقارن بیضی مفروض، می‌رسیم.

جالب است یادآوری کنیم، که این بیضی، بر همهٔ دایره‌های خانواده مماس‌نیست. این کیفیت، وقتی تشخیص داده‌می‌شود که، به‌جای‌حذف t بین‌معادله‌های $F=0$ و $F'_t=0$، x و y را برحسب t بیان کنیم:

$$x=\frac{a^2+b^2}{a^2}t, \qquad y=\pm\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2+b^2)t^2}$$

در واقع، از این‌جا دیده می‌شود کـه عبارت y، تنها به‌ازای $|t|\leqslant\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ حقیقی است. یعنی، تنها برای بخشی از خانوادهٔ دایره‌ها، نظیر مقدارهای مفروض t، پوش وجود دارد.

این مثال آموزنده نشان می‌دهد کـه، نمایش پارامتری پوش، می‌تواند بسیار مفید باشد، زیرا به‌کمك آن می‌توان، به‌سادگی، تشخیص دادکه برای کـدام بخش ازخانوادهٔ مفروض، واقعاً، پوش وجود دارد.

۶) برای خانوادهٔ دایره‌های هم مرکز

$$x^2+y^2=a \quad (a\geqslant 0)$$

پوش‌وجودندارد: بامشتق‌گیری نسبت‌بهa، بلافاصله، به‌برابری غیرممکن $1=0$ می‌رسیم.

۷) دو خانوادهٔ سهمی‌های نیم مکعبی را در نظر می‌گیریم:

$$\text{(a)} \quad (y-a)^2-x^3=0$$

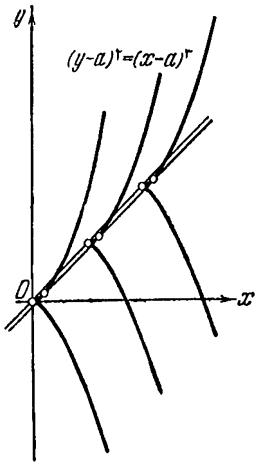
$$\text{(b)} \quad y^2-(x-a)^3=0$$

(شکل ۱۴۵). منحنی مبین، چنین است:

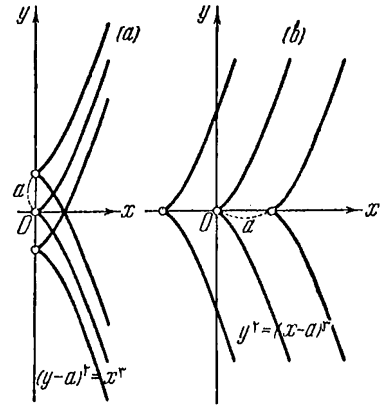
$$\text{(a)} \quad x=0, \qquad \text{(b)} \quad y=0$$

که در هر دو حالت، ازنقطه‌های خاص تشکیل شده‌اند. باوجود این، در حالت (b)، خط $y=0$ پوش است و در حالت (a)، پوش وجود ندارد.

۸) مثال پیچیده‌تری از همین نـوع را، خانوادهٔ دیگری از سهمی‌هـای نیم مکعبی به‌دست می‌دهد:



شکل ۱۴۶



شکل ۱۴۵

$$(y-a)^2-(x-a)^3=0$$

(شکل ۱۴۶). در این‌جا، منحنی مبین بـه‌دو خط تجزیه می‌شود: $y=x$ و $y=x-\frac{4}{27}$ که اولی عبارت است از مکان هندسی نقطه‌های خاص، و دومی پوش خانواده را تشکیل می‌دهد.

۹) در پایان، خانوادهٔ این خطها را در نظر می‌گیریم:

$$4(1+t)x=t^2y$$

نسبت به t مشتق می‌گیریـم: $4x=2ty$ و t را، بین دو معادلـه، حذف می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$x(x+y)=0$$

این معادله، معرف دو خط $x=0$ و $y=-x$ است کـه، در واقع، دو خط از خانوادهٔ مفروض‌اند (به‌ازای $t=0$ و $t=-2$). هیچ کدام از این دو خط، نه پوش هستند و نه شامل نقطه‌های خاص. در این حالت پوش وجود ندارد.

این مثال، برای ما روشن می‌کند که ممکن است، معادلهٔ (۱۰)، به‌جای پوش، یک‌یا چندمنحنی‌خانواده را نمایش‌دهد. اگر، به‌جای حذف t، سعی می‌کردیم x و y را برحسب t بیان کنیم، اشکال کار، روشن می‌شد (xوy، برحسب‌متغیر t، قابل بیان نیستند).

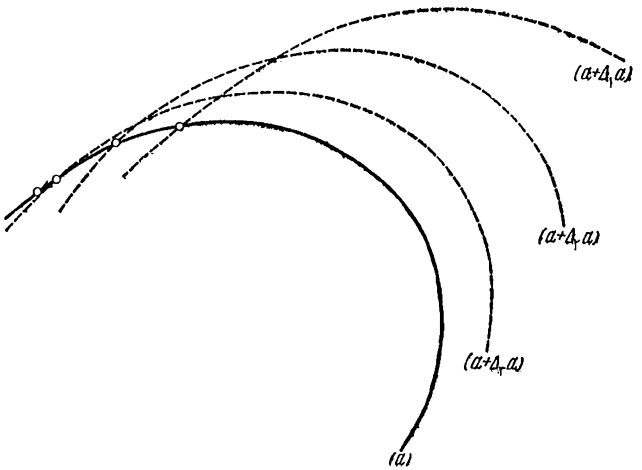
۲۴۰. نقطه‌های مفسر. یک‌مفهوم‌هندسی‌جالب دیگر که بامفهوم پوش، بستگی‌نزدیکی دارد: نقطه‌های مفسر.

یکی از منحنی‌های خانوادهٔ

$$F(x, y, a)=0$$

را، که با مقدار معینی از پارامتر a مشخص شده است، انتخاب می‌کنیم. به a نمو Δa را می‌دهیم. مقدار $a+\Delta a$ از پارامتر، نظیر منحنی دیگری از خانواده، «نزدیک» به اولی است:

$$F(x, y, a+\Delta a)=0$$



شکل ۱۴۷

ممکن است پیش آید که، به‌ازای Δa به‌قدر کافی کوچک، دو منحنی، یکدیگر را در یک یا چند نقطه، قطع کنند. وقتی که Δa به‌سمت صفر میل کند، این نقطه‌های برخورد، به نحوی، روی منحنی اول نقل مکان می‌کنند. اگر، ضمناً، نقطه‌ای از نقطه‌های برخورد، به‌سمت وضع حدی معینی میل کند، آن‌گاه، این نقطهٔ حدی را، نقطهٔ مفسر (کاراکتریستیک) منحنی اولیه گویند (شکل ۱۴۷) [توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که نقطهٔ مفسر، نه‌تنها به‌منحنی که روی آن واقع است، بلکه به‌همهٔ خانواده، مربوط است. صحبت از یک نقطهٔ مفسر، برای یک منحنی جداگانهٔ مفروض، عاری از معناست].

نقطهٔ تقاطع منحنی‌های نامبرده، باید در دستگاه معادله‌های

$$F(x, y, a)=0, \qquad F(x, y, a+\Delta a)=0$$

و یا، در دستگاه هم‌ارز آن

$$F(x, y, a)=0, \qquad \frac{F(x, y, a+\Delta a)-F(x, y, a)}{\Delta a}=0 \qquad (11)$$

صدق کند. اگر، در این‌جا، Δa را به‌سمت صفر میل دهیم، به‌دستگاه

$$F(x, y, a)=0, \qquad F'_a(x, y, a)=0$$

می‌رسیم، که همان دستگاه (۹) است؛ و با مفروض‌بودن a، مختصات نقطهٔ مفسر، در آن صدق می‌کند.

دقیق‌تر بگوییم: اگر برای x و y، مختصات نقطهٔ برخورد را حفظ کنیم، آن‌گاه، به‌جای (۱۱) (با استفاده از دستور لاگرانژ)، می‌توان نوشت:

$$F(x, y, a)=0, \qquad F'_a(x, y, a+\theta\Delta a)=0 \qquad (0<\theta<1)$$

اگر، به‌ازای $\Delta a \to 0$، مختصات x و y، به‌ترتیب، دارای حدهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ باشند، آن‌گاه، با عبور دادن برابری‌های بالا به‌حد، و با توجه به‌پیوستگی تابع‌های F و F'_a، به‌سادگی، متقاعد می‌شویم که، در واقع، مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نقطهٔ مفسر، در دستگاه معادله‌های (۹)، صدق می‌کند.

حالا فرض کنیم که نقطه‌های مفسر، بر هر منحنی خانواده وجود داشته باشند، در این صورت، مسألهٔ مکان هندسی نقطه‌های مفسر، پیش می‌آید. اگر این مکان، یك منحنی به‌صورت (۲) باشد، آن‌گاه، تابع‌های $\varphi(a)$ و $\psi(a)$، باید در دستگاه (۹) صدق کنند، یعنی درشمار جواب‌های این دستگاه، نسبت به x و y، باشند. به‌همین‌ترتیب، همهٔ نقطه‌های این مکان هندسی، در معادلهٔ (۱۰) هم صدق می‌کنند. یعنی، این مکان، به‌ناچار، در ترکیب منحنی مبین وارد می‌شود.

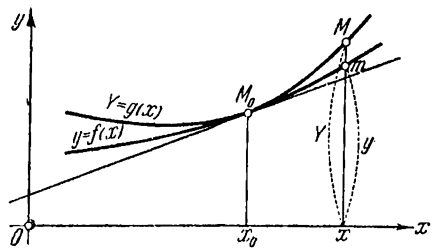
از آن‌چه گفته شد، نتیجه می‌شود که، مکان هندسی نقطه‌های مفسر، درصورت وجود، عبارت است از (کلاً یا جزئاً) پوش خانواده، یا نقطه‌های خاص منحنی‌های آن.

به‌سادگی می‌توان قانع شد که، در مثال‌های ۱)، ۲)، ۴) و ۵) شمارهٔ قبل، مکان هندسی نقطه‌های مفسر، منطبق بر پوش است. و این، به‌مفهومی، حالت کلی است. ولی در مثال ۷)، (a)، این مکان هندسی، تنها شامل نقطه‌های خاص است. در مثال‌های ۳) و ۷)، (b)، اصلاً، تقاطعی بین منحنی‌ها وجود ندارد (هر چند، پوش وجود دارد).

۲۴۱. مرتبهٔ تماس دو منحنی. دو منحنی را درنظر می‌گیریم، که در نقطهٔ M_0، بر هم مماس باشند.

اگر منحنی‌ها را، با معادله‌های صریح $y=f(x)$ و $Y=g(x)$ نشان دهیم، و M_0 دارای طول x_0 باشد، آن‌گاه، انطباق عرض نقطهٔ تماس وضریب زاویهٔ مماس را، می‌توان، این‌طور نوشت:

$$f(x_0)=g(x_0)$$



شکل ۱۴۸

$$f'(x_0)=g'(x_0)$$

برای مشخص کردن وضع نزدیکی منحنی‌های مفروض، در همسایگی M_0، دو نقطهٔ M و m را، به‌طول x، بر این منحنی‌ها اختیار می‌کنیم (شکل ۱۴۸) و مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی پاره‌خط

$$mM=Y-y=g(x)-f(x)=\varphi(x)$$

را، نسبت به‌بی‌نهایت کوچک اصلی $x-x_0$، تعیین می‌کنیم. اگر این مرتبه، برابر $n+1$ (یا بیشتر از $n+1$) باشد، آن‌گاه می‌گویند که: منحنی‌ها در نقطهٔ M_0، دارای تماس مرتبهٔ nام (یا بالاتر از مرتبهٔ nام) می‌باشند.

می‌بینیم که، اگر تماس وجود داشته باشد، همیشه داریم:

$$\varphi(x_0)=g(x_0)-f(x_0)=0,\quad \varphi'(x_0)=g'(x_0)-f'(x_0)=0$$

فرض کنیم، در نقطهٔ x_0، برای تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها، تا خود مرتبهٔ $(n+1)$ام، وجود داشته باشند و ضمناً

$$f''(x_0)=g''(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$$

به‌نحوی که

$$\varphi''(x_0)=g''(x_0)-f''(x_0)=0,\ \dots$$

$$\dots,\ \varphi^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)=0$$

فعلاً، دربارهٔ مشتق‌های $f^{(n+1)}(x_0)$ و $g^{(n+1)}(x_0)$، هیچ فرضی نداریم. دستور تیلور با جملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو [۱۲۴، ۱۰a] را، برای تابع $\varphi(x)$، به‌کار می‌بریم:

$$mM=Y-y=\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)+\alpha}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (۱۲)$$

می بینیم که

$$\lim_{x\to x_0}\frac{mM}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}=\frac{g^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

به‌این‌ترتیب، اگرداشته‌باشیم: $f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0)$، در آن‌صورت، منحنی‌ها دارای تماس مرتبهٔ nام خواهند بود. و اگر داشته باشیم $f^{(n+1)}(x_0)=g^{(n+1)}(x_0)$، در آن‌صورت، مرتبهٔ تماس، بالاتراز n است. ازاین‌جا (بافرض وجود همهٔ مشتق‌های‌مذکور) نتیجه می‌شود:

برای‌آن‌که، دومنحنی $y=f(x)$ و $Y=g(x)$، درنقطهٔ به‌طول x_0، دارای تماس مرتبهٔ nام باشند، لازم و کافی است که شرطهای زیر برقرار باشند:

$$f(x_0)=g(x_0),\quad f'(x_0)=g'(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0) \qquad (۱۳)$$

$$f^{(n+1)}(x_0)\neq g^{(n+1)}(x_0) \qquad (۱۴)$$

[اگر نابرابری اخیر، برقرارنباشد، تنها می‌توان نظرداد که مرتبهٔ تماس، کمتراز nنیست.]

برای حالتی که مرتبهٔ تماس، درست برابر n است، از (۱۲) مستقیماً نتیجه می‌شود که: وقتی n، عددی زوج باشد، منحنی‌هایی که در نقطهٔ M_0 مماس‌اند، از یکدیگر عبور می‌کنند، و وقتی n، عددی فرد باشد، این وضع پیش نمی‌آید.

یادداشت. با توجه به آن‌چه گفتیم، دوباره به‌خود تعریف مرتبهٔ تماس برمی‌گردیم: ظاهراً، این‌تعریف، بستگی به‌محورهای‌مختصات دارد. ولی، درعمل، مرتبهٔ‌تماس دومنحنی، به‌نوع انتخاب دستگاه مختصات، ارتباطی‌ندارد (تنها، اگرمحور y، موازی مماس‌مشترک نباشد)، به‌نحوی‌که، این مفهوم را می‌توان، یك مفهوم واقعاً هندسی دانست.

اگر دستگاه مختصات را، به‌اندازهٔ زاویهٔ دلخواه α دوران دهیم، مختصات جدید $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را، برحسب x و y قدیم، می‌توان به‌کمك رابطه‌های معلوم، تبدیل کرد:

$$\bar{x}=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\qquad \bar{y}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

فرض‌کنیم در دستگاه مختصات قدیم، با منحنی $y=f(x)$ سر وکار داشته باشیم؛ اگر در معادله‌های تبدیل، y را، همین تابع $f(x)$ بگیریم، آن‌وقت، این‌معادله‌ها، به‌منزلهٔ نمایش پارامتری منحنی، دردستگاه جدیدخواهند بودکه، در آن، x، نقش‌پارامتر را به‌عهده دارد. روشن است که مشتق‌های

$$\frac{d\bar{x}}{dx}=\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha,\qquad \frac{d\bar{y}}{dx}=-\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha$$

به‌طور هم‌زمان، نمی‌توانند برابر صفر شوند، به‌نحوی که، در نمایش جدید، حتی یک نقطهٔ خاص‌هم نخواهیم داشت، و در این‌صورت، روشن است که اولین مشتق، از مشتق‌های فوق، در نقطهٔ مورد بررسی، صفر نیست (زیرا، در غیر این‌صورت، مماس برمنحنی در این‌نقطه، موازی محور $\bar{y}$ می‌شود). در نتیجه، درهمسایگی آن، در دستگاه جدید هم، می‌توان منحنی را، با معادلهٔ صریح $\bar{y}=f(\bar{x})$ بیان کرد.

حال، با سادگی دیده می‌شود [با **۱۲۱** مقایسه کنید]:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{-\sin\alpha+\frac{dy}{dx}\cos\alpha}{\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha},\qquad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\cos\alpha+\frac{dy}{dx}\sin\alpha\right)^3}$$

و به طور کلی

$$\frac{d^k\bar{y}}{d\bar{x}^k}=R_k\left(\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ky}{dx^k}\right)$$

که در آن، R_k نشانهٔ تابع گویاست. از این‌جا، روشن می‌شود که، هر وقت، برای دو تابع y از x، برابری‌های (۱۳) برقرار باشد، برای تابع‌های نظیر $\bar{y}$ از $\bar{x}$ نیز، برابری‌های مشابهی، برقرار خواهد بود. به همین ترتیب ــ با حضور (۱۳) ــ از نابرابری (۱۴) نیز، چنین نابرابری برای تابع‌های جدید به‌دست می‌آید، زیرا، درغیر این‌صورت، تبدیل معکوس، موجب عوض شدن نابرابری (۱۴) به برابری می‌شود.

و به این ترتیب، حکم موردنظر، ثابت شد.

۲۴۲. حالتی که، یکی از منحنی‌ها، به‌صورت ضمنی باشد. حالا، حالتی را در نظر می‌گیریم که، منحنی دوم، با یک معادلهٔ ضمنی، داده شده باشد:

$$G(x,y)=0 \qquad (۱۵)$$

فرض می‌کنیم که نقطهٔ موردنظر $M_0(x_0,y_0)$، برای این منحنی، نقطهٔ خاص نباشد و، به‌ویژه، فرض می‌کنیم: $G'_y(x_0,y_0)\neq 0$. در این‌صورت، معادلهٔ (۱۵)، در همسایگی این نقطه، تابع یک ارزشی $y=g(x)$ را مشخص می‌کند و، در نتیجه، برای تعیین مرتبهٔ تماس، می‌توان از رابطه‌های (۱۳) [و (۱۴)] استفاده کرد.

ولی، از آن‌جا که، عبارت صریح تابع $g(x)$ را، در این حالت، در اختیار نداریم، بهتر است، این شرط‌ها را به‌چنان صورتی درآوریم که، تابع مفروض G را مورد استفاده قرار داده باشد.

برای این منظور، یادآور می‌شویم که، مقدار تابع $g(x)$ و مشتق‌های آن

$g'(x)$، $g''(x)$، ... ، $g^{(n)}(x)$، به‌ترتیب وضمناً به‌صورت یك ارزشی، به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۱۵) معین می‌شوند، وهمراه بـا آن‌ها، معادله‌هایی کـه، از راه مشتق‌گیری از (۱۵) نسبت به x به‌دست می‌آیند ــ به‌شرطی که y را $g(x)$ در نظر بگیریم [۲۰۹]:

$$G(x, \underline{g(x)}) = 0, \quad G'_x(x, g(x)) + G'_y(x, g(x))\underline{g'(x)} = 0,$$

$$G''_{x^2} + 2G''_{xy}g'(x) + G''_{y^2}[g'(x)]^2 + G'_y\underline{g''(x)} = 0$$

. . . . . .

$$G^{(n)}_{x^n} + \ldots + G'_y\underline{g^{(n)}(x)} = 0^*$$

بنابراین، اگر (بـه‌ازای $x = x_0$) دراین برابری‌ها، همه جـا، به‌جای $g(x_0)$، $g'(x_0)$، ... ، $g^{(n)}(x_0)$، به‌ترتیب، $f(x_0)$، $f'(x_0)$، ... ، $f^{(n)}(x_0)$ قراردهیم، به‌شرطهای

$$G(x_0, \underline{f(x_0)}) = 0, \; G'_x(x_0, f(x_0)) + G'_y(x_0, f(x_0))\underline{f'(x^0)} = 0,$$

$$G''_{x^2} + 2G''_{xy}f'(x_0) + G''_{y^2}[f'(x_0)]^2 + G'_y\underline{f''(x_0)} = 0$$

. . . . . .

$$G^{(n)}_{x^n} + \ldots + G'_y\underline{f^{(n)}(x_0)} = 0$$

می‌رسیم که، به‌ترتیب، با شرطهای (۱۳)، هم‌ارزند.

برای این‌که، این شرطها را، به‌صورت عینی‌تری درآوریم، نشانهٔ

$$\Phi(x) = G(x, f(x)) \qquad (۱۶)$$

را وارد می‌کنیم، آن‌وقت، شرطهای فوق‌را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\Phi(x_0) = 0, \Phi'(x_0) = 0, \ldots, \Phi^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (۱۷)$$

به‌این ترتیب، بـا رعایت شرطهای (۱۷) (درنقطهٔ بـه‌طول x_0)، منحنی (۱۵) با منحنی $y = f(x)$، دارای تماسی خواهد بودکه مرتبهٔ‌آن، کمتراز n نیست. بدون زحمت، می‌توان فهمیدکه اگر، علاوه برآن، شرط

$$\Phi^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \qquad (۱۸)$$

---

*) درهرمعادله، درست زیـرمقداری خط‌کشیده شده است‌که، ازآن، به‌طور یك ارزشی معین می‌شود، به‌شرطی کـه مقدارقبلی آن، معین شده باشد. درمورد دستگاه معادله‌های دیگرهم، همین مطلب، درست است.

برقرار باشد، این مرتبه، درست برابر n است.

۲۴۳. منحنی بوسان. حالا فرض می‌کنیم، به‌جای منحنی (۱۵)، خانوادهٔ منحنی‌های $(n+1)$ پارامتری

$$G(x, \overbrace{y, a, b, \ldots, l}^{n+1}) = 0 \qquad (19)$$

داده شده باشد. طرح این مسأله طبیعی است که: آیا می‌توان، با تنظیم مقدار پارامترها، چنان منحنی از این خانواده انتخاب کرد که با یک منحنی $y = f(x)$، در نقطهٔ معین $M_0\,(x_0, f(x_0))$ از آن، بالاترین مرتبهٔ تماس ممکن را (در خانوادهٔ مفروض) داشته باشد؟

این منحنی را، منحنی بوسان برمنحنی مفروض، در نقطهٔ M_0، می‌نامند [بهتر بود گفته شود: منحنی بوسان از این خانواده؛ زیرا، اگر منحنی (۱۵) را، به‌طور جداگانه، انتخاب کنیم، این نام گذاری، بی‌معنا می‌شود].

برای پیدا کردن منحنی بوسان، نشانه‌ای شبیه (۱۶) را وارد می‌کنیم:

$$\Phi(x, a, b, \ldots, l) = G(x, f(x), a, b, \ldots, l)$$

و ردیف شرط‌های شبیه (۱۷) را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x_0, a, b, \ldots, l) = 0 \quad \Phi'_x(x_0, a, b, \ldots, l) = 0, \ldots \\ &\ldots, \Phi^{(n)}_{x^n}(x_0, a, b, \ldots, l) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

دراین‌جا، دستگاه $n+1$ معادله با $n+1$ مجهول a، b، ...، l، داریم. این دستگاه، معمولاً، مقدار پارامترها را به‌طور یک ارزشی، بیان می‌کند و، ازاین راه، منحنی بوسان، با مرتبهٔ تماسی که کمتر از n نیست، تعیین می‌شود.

ضمناً، معلوم است که، اگر فرض شود:

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x_0, a, b, \ldots, l) \neq 0$$

مرتبهٔ تماس، درست برابر n، می‌شود؛ و این فرض (برای $n+1$ پارامتر)، طبیعی است.

در نقطه‌های استثنائی منحنی که، در آن جا، ضمناً، برابری

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x, a, b, \ldots, l) = 0 \qquad (21)$$

برقرار باشد، با نقطهٔ فرابوسان سروکار داریم، که اگر برابری‌های (۲۰) و (۲۱) را، باهم،

مثل دستگاهی با $n+1$ معادله از $n+1$ مجهول x_0، a، b، ...، l درنظر بگیریم، می‌توان، این نقطه‌ها را به‌دست آورد.

مثال‌ها. ۱) خط بوسان. خانوادهٔ خطهایی که با معادلهٔ

$$y=ax+b$$

بیان می‌شود، شامل دوپارامتراست. به‌این دلیل، بالاترین مرتبهٔ تماس ممکن، درحالت کلی برابراست با واحد.

دراین جا، داریم:

$$\Phi(x, a, b)=y-ax-b,\quad \Phi'_x(x, a, b)=y'-a,$$

$$\Phi''_{xx}(x, a, b)=y''$$

که درآن، منظور از y، همان $f(x)$ است. اگرمقدارهای y، y' و y''، نظیرمقدارمورد-نظر $x=x_0$، را با اندیس صفر نشان دهیم، برای پیداکردن پارامترهای a و b، به‌این معادله‌ها می‌رسیم:

$$y_0-ax_0-b=0,\quad y'_0-a=0$$

که ازآن جا، به‌دست می‌آید: $a=y'_0$ و $b=y_0-y'_0x_0$. با قراردادن این مقدارها، در معادلهٔ خط، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)$$

که درآن، خواننده، بدون هیچ زحمتی، معادله مماس را می‌شناسد.

بنابراین، خط بوسان، چیزی جزهمان خط مماس نیست.

مرتبهٔ تماس، همان‌طورکه گفته شده، درحالت کلی، برابراست با واحد. البته، در نقطه‌های جداگانه‌ای با شرط تکمیلی $y''_0=0$، مرتبهٔ تماس، می‌تواند بالا رود: مثلاً در نقطهٔ عطف.

۲) دایرهٔ بوسان*. خانوادهٔ دایره‌ها، با معادلهٔ

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$$

بیان می‌شوند، که‌شامل‌سه پارامترِ ξ، η و R است. بالاترین مرتبهٔ تماس، به‌طورکلی، برابر است با ۲.

اگر y را، همان $f(x)$ درنظر بگیریم:

---

*) منظور از دایره، محیط دایره است.

$$\Phi(x, \xi, \eta, R)=(x-\xi)^{۲}+(y-\eta)^{۲}-R^{۲},$$

$$\frac{۱}{۲}\Phi'_{x}(x, \xi, \eta, R)=x-\xi+(y-\eta)y',$$

$$\frac{۱}{۲}\Phi''_{x^{۲}}(x, \xi, \eta, R)=۱+y'^{۲}+(y-\eta)y''$$

بنابراین، پارامترها را، می‌توان ازاین معادله‌ها به‌دست آورد:

$$(x_{۰}-\xi)^{۲}+(y_{۰}-\eta)^{۲}=R^{۲}$$

$$x_{۰}-\xi+(y_{۰}-\eta)y'_{۰}=۰$$

$$۱+y'^{۲}_{۰}+(y_{۰}-\eta)y''_{۰}=۰$$

ازدومعادلهٔ آخری (با فرض $y''_{۰}\neq ۰$)، مختصات مرکز را پیدا می‌کنیم:

$$\xi=x_{۰}-y'_{۰}\frac{۱+y'^{۲}_{۰}}{y''_{۰}},\quad \eta=y_{۰}+\frac{۱+y'^{۲}_{۰}}{y''_{۰}} \qquad (۲۲)$$

وآن وقت، ازمعادلهٔ اول، شعاع به‌دست می‌آید:

$$R=\frac{(۱+y'^{۲}_{۰})^{\frac{۳}{۲}}}{|y''_{۰}|} \qquad (۲۳)$$

که با توجه به‌آن‌ها، دایرهٔ بوسان هم، مشخص می‌شود.

با توجه به‌آن چه درشمارهٔ **۲۴۱** گفته شد، معمولاً، مماس منحنی را قطع نمی‌کند. ولی دایره بوسان، برعکس، آن را قطع‌می‌کند. به‌طوراستثنائی، ممکن است، درنقطه‌هایی، مرتبهٔ تماس، برخلاف معمول، بالاتر برود.

۲۴۴. راه دیگری برای رسیدن به‌منحنی‌های بوسان. فرض‌کنیم،منحنی$y=f(x)$ وخانوادهٔ منحنی‌های (۱۹)، با $n+۱$ پارامتر، مفروض باشد. برمنحنی، $n+۱$ نقطهٔ نامشخص، به‌طول‌های $x_{۱}$، $x_{۲}$، ... ، $x_{n+۱}$ اختیارمی‌کنیم. برای این‌که، همهٔ منحنی‌های خانواده، ازاین نقطه بگذرند، باید این شرط‌ها برقرار باشد:

$$\Phi(x_{۱}, a, b, \dots, l)=۰,\quad \Phi(x_{۲}, a, b, \dots, l)=۰, \dots$$

$$\dots, \Phi(x_{n+۱}, a, b, \dots, l)=۰$$

معمولاً از این جا، مقدار پارامترها، به‌طوریک ارزشی، معین می‌شوند: آن‌ها را با

$\tilde{a}$، $\tilde{b}$، ... ، $\tilde{l}$، نشان می‌دهیم.

حالا فرض می‌کنیم، این $n+1$ نقطه، طبق قانون دلخواهی، به‌سمت یك نقطهٔ معین ازمنحنی، به‌طول x_0، میل کنند؛ دراین صورت، مقدار پارامترهای $\tilde{a}$، $\tilde{b}$، ... ، $\tilde{l}$ هم، به‌سمت حدهای معین a، b، ...، l میل مـی‌کنند. می‌توان گفت که، منحنی خانواده (که ازنقطه‌های مذکور)، با تغییرمکان یا تغییرشکل، به‌سمت منحنی حدی میل می‌کند.

برای این‌که، این منحنی حدی را پیدکنیم، به‌این ترتیب، استدلال می‌کنیم. تابع x

$$\Phi(x, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})$$

به‌ازای $n+1$ مقدار x: $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$، برابرصفرمـی‌شود. آن‌گاه. با توجه به‌قضیهٔ رول [۱۱۱]، مشتق اول این تابع، به ازای n مقدار x'_n: $x'_1 < x'_2 < \cdots$، مشتق دوم آن، به‌ازای $n-1$ مقدار x''_{n-1}: $x''_1 < x''_2 < \cdots$، ...، $(n-1)$امین‌مشتق به‌ازای دو مقدار $x_1^{(n-1)} < x_2^{(n-1)}$ و بـالاخره، مشتق nام بـه‌ازای مقدار $x_1^{(n)}$، برابرصفرمی‌شوند. ضمناً، همهٔ مقدارهای مذکور، بین x_1 و x_{n+1} واقع‌اند.

به‌این ترتیب، $n+1$ برابری داریم:

$$\Phi(x_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}) = 0, \quad \Phi'_x(x'_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}) = 0,$$

$$\Phi''_{x^2}(x''_1, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}) = 0, \ldots \quad \Phi^{(n)}_{x^n}(x_1^{(n)}, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}) = 0$$

حالا، اگر به‌طورهم‌زمان x_1، x_2، ... ، x_{n+1} به‌سمت x_0 میل کنند، در آن صورت: $\tilde{a} \to a$، $\tilde{b} \to b$، ... ، $\tilde{l} \to l$، ومعلوم است که همچنین $x'_1 \to x_0$، $x''_1 \to x_0$، ... ، $x_1^{(n)} \to x_0$. اگر به‌حد عبور کنیم، برابری‌هـای بالا، بـه‌همان دستگاه آشنای (۲۰) برای تعیین منحنی بوسان، تبدیل می‌شود.

بنابراین، اگر برای منحنی ازخـانواده، که $n+1$ نقطهٔ منحنی مفروض می‌گذرد، وضع حدی وجود داشته باشد، در این صورت، این منحنی حدی، همان منحنی بـوسان خواهد بود.

به‌این مناسبت، گاهی مـی‌گویند (که، البته، چندان دقیق نیست)، منحنی بوسان‌ـاز خانوادهٔ $n+1$ پارامتری ـ عبارت است از «منحنی که از $n+1$ نقطهٔ بی‌نهایت نزدیك به‌هم» منحنی مفروض، گذشته‌باشد. درحالت خاص، مماس از دونقطهٔ نزدیك به‌هم منحنی، و دایرهٔ بوسان ازسه نقطهٔ نزدیك به‌هم منحنی، می گذرد.

§۴. طول منحنی مسطح*

۲۴۵. پیش قضیه‌ها. منحنی مسطح $\widehat{AB}$ (بسته یا باز) را درنظر می‌گیریم، که با معادله‌های پارامتری

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{۱}$$

داده شده باشد، که در آن‌ها، φ و ψ پیوسته فرض می‌شوند. فرض می‌کنیم که، روی منحنی، نقطهٔ تکراری وجود نداشته باشد، به‌نحوی که، هر نقطه، تنها به‌ازای یك مقدار t به‌دست آید (در حالتی که منحنی، بسته باشد، نقطهٔ انطباق دو انتهای آن، استثنا است). با این فرض‌ها، منحنی را، منحنی سادهٔ پیوسته می‌نامیم.

برای این که مفهوم طول را، برای این گونه منحنی‌ها، روشن کنیم، با چند فرض کمکی آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم $t_0\leqslant t'<t''\leqslant T$ و مقدار t' و t'' از پارامتر را، متناظر نقطه‌های M' و M'' می‌گیریم.

پیش قضیهٔ ۱. برای $\delta>0$ دلخواه، چنان $\eta>0$ پیدا می‌شود که برای $t''-t'<\eta$، برای طول وتر $M'M''$ داشته باشیم: $\overline{M'M''}<\delta$.

در واقع، با توجه به پیوستگی (یکنواخت) تابع‌های φ و ψ از (۱)، می‌توان برای δ، چنان $\eta>0$ پیدا کرد که به‌ازای $|t''-t'|<\eta$، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم:

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{۲}},\quad |\psi(t'')-\psi(t')|<\frac{\delta}{\sqrt{۲}}$$

که در نتیجه

$$\overline{M'M''}=\sqrt{[\varphi(t'')-\varphi(t')]^{۲}+[\psi(t'')-\psi(t')]^{۲}}<\delta$$

پیش قضیهٔ ۲. درحالتی که منحنی بسته نباشد، برای $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان $\delta>0$ وجود دارد که، تنها به شرطی که طول وتر $\overline{M'M''}$ بزرگتر از δ باشد، تفاضل $t''-t'$ ــ مقدارهای پارامتر، متناظر با دو انتهای منحنی ــ کوچکتر از ε خواهد بود.

خلاف آن را فرض می‌کنیم [برهان خُلف]، آن وقت، برای $\varepsilon>0$، به‌ازای $\delta>0$

---

*) هرچند، این مسأله، اساساً، به‌محاسبهٔ انتگرالی مربوط می‌شود، ولی بعضی ازقسمت‌های آن را، ازهمین جا، آغاز می‌کنیم. زیرا دربند بعدی، به‌مفهوم طول قوس دایره و ویژگی آن، نیازداریم. خود محاسبهٔ طول قوس را، درجلد دوم، خواهیم آورد.

**) پاورقی انتهای شمارهٔ ۲۱۳ را ببینید.

دلخواه، می‌توان دو نقطهٔ $M'(t')$ و $M''(t'')$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $M'M''<\delta$ و، درهمان حال، $t''-t'\geqslant\varepsilon$. دنبالهٔ $\{\delta_n\}$ را، که به‌سمت صفرمتقارب است، انتخاب می‌کنیم و، به‌نوبت $\delta=\delta_n$ می‌گیریم $(n=1, 2, 3, \dots)$، به دو دنباله از نقطه‌های $\{M'(t'_n)\}$ و $\{M''(t''_n)\}$ می‌رسیم که درموردآن‌ها، داریم:

$$\overline{M'_nM''_n}<\delta_n,\ \text{ولی } t''_n-t'_n\geqslant\varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

با توجه به‌پیش قضیهٔ بولزانو ـ ویرشتراس [۴۱]ـ بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای واردآید ـ می‌توان، ضمناً، فرض کرد:

$$t'_n\to t^*,\quad t''_n\to t^{**}$$

(این نتیجه را، می‌توان به‌سادگی، و درصورت لزوم با عبوربه‌دنباله‌های جزئی، به‌دست آورد.) معلوم است که

$$t^{**}-t^*\geqslant\varepsilon$$

به‌نحوی که $t^*\neq t^{**}$. درعین‌حال، برای نقطه‌های نظیر M^* و M^{**} داریم: $\overline{M^*M^{**}}=0$. یعنی، این نقطه‌ها، برهم منطبق باشند، که غیرممکن است، زیرا منحنی نه‌دارای نقطه‌های تکراری است ونه‌بسته است، تناقض حاصل، حکم پیش قضیه را ثابت می‌کند.

برای منحنی‌های بسته، حکم پیش قضیه، نادرست می‌شود: وتر $M'M''$، وقتی که t' به t_0 و t'' به T به‌اندازهٔ کافی نزدیك باشند، می‌تواند به‌دلخواه کوچك شود.

۲۴۶. جهت بر روی منحنی. نقطهٔ A را نظیرمقدار $t=t_0$ ازپارامتر، ونقطهٔ B را نظیرمقدار $t=T$ می‌گیریم؛ A را نقطهٔ مبداء و B را نقطهٔ پایان منحنی می‌نامیم. به‌طور کلی، وضع نقطهٔ M ازمنحنی را، از روی ترقی پارامتر t، مشخص می‌کنیم، یعنی، برای دونقطه‌ای که غیراز A و B باشند، نقطه‌ای را، نقطهٔ بعدی به‌حساب می‌آوریم که نظیر مقدار بزرگتر پارامتر باشد. به‌این ترتیب، «جهت‌روی‌منحنی» تعریف‌می‌شود. ولی، این تعریف، درارتباط بانمایش پارامتری (۱)، داده شده است. نشان‌می‌دهیم که، در واقع، مفهوم‌جهت منحنی، ارتباطی به‌نوع مشخص معرفی آن ندارد.

با حالت ساده‌تری آغازمی‌کنیم، که منحنی، بسته نباشد.

اگر منحنی غیربستهٔ $\overset{\frown}{AB}$، به موازات نمایش (۱)، به‌صورت زیرهم، نمایش داده شده باشد (بازهم، بدون نقطه‌های تکراری):

$$x=\varphi^*(u),\quad y=\psi^*(u) \qquad (u_0\leqslant u\leqslant U) \qquad (1^*)$$

که در آن‌ها، φ^* و ψ^*، مثل قبل، تابع‌هایی پیوسته‌اند. مقدار $u=u_0$، پاسخ‌گوی A و مقدار $u=U$، نظیر نقطهٔ B است. دراین‌صورت، هردو نمایش، برروی منحنی، جهت‌واحدی را مشخص می‌کنند.

به‌هرمقدار t، یک نقطه ازمنحنی، نظیر است که، به‌نوبهٔ خود، به‌طوریک ارزشی، مقدار u را معین می‌کند؛ برعکس، برهرمقدار u، نظیرمقدارمعینی از t است. به‌این ترتیب، u، تابعی یك ارزشی از t می‌شود: $u=\omega(t)$، که‌آن هم، با تغییر t از t_0 تا T، هرکدام از مقدارهای خود را، تنها یك بار، اختیارمی‌کند؛ به‌ویژه $\omega(t_0)=u_0$ و $\omega(T)=U$.

بنابرپیش قضیهٔ ۱، دو مقدار به‌قدرکافی نزدیك t، متناظرند با دو نقطه به‌قدر دلخواه نزدیك به‌هم‌ازمنحنی؛ و آن وقت، بنابرپیش قضیهٔ ۲، این دو نقطهٔ منحنی هم، متناظرند بادو مقدار به‌قدر دلخواه نزدیك u. یعنی، تابع $u=\omega(t)$، تابعی پیوسته است.

ازاین‌جا، می‌توان نتیجه‌گرفت که این تابع، به‌معنای اکید خود، صعودی یکنواست. درواقع، اگر به‌ازای $t_0<t'<t''$ می‌داشتیم: $u_0=\omega(t_0)<u'=\omega(t')<u''=\omega(t'')$، آن‌گاه، بنابر ویژگی معلوم تابع پیوسته [۸۲]، بین t_0 و t'، مقدار t''' پیدا می‌شد که، به‌ازای آن، $u''=\omega(t''')$، به‌نحوی که مقدار u''، دوبار از تابع $u=\omega(t)$ به‌دست‌می‌آمد (به‌ازای $t=t''$ و $t=t'''$). و این برخلاف آن چیزی است که دربالا ثابت کردیم.

به‌این‌ترتیب، ثابت شد که $u=\omega(t)$، همراه با t، ترقی می‌کند و حالا دیگر روشن است که‌ترتیب‌استقرارنقطه‌ها، باترقی‌پارامتر t، کاملاً باترتیب‌استقرار آن‌ها، باترقی پارامتر u، هم‌ارز است.

به این ترتیب، جهت، که می‌توان آن را، جهت روی منحنی از نقطهٔ A به نقطهٔ B نام داد، یك مفهوم کاملاً هندسی است.

به‌همین ترتیب، با تبدیل t به t' ــ و تعیین وضع استقرار نقطه‌ها، با ترقی پارامتر t' می‌توان مفهوم جهت روی منحنی را، از نقطهٔ B به نقطهٔ A تعریف کرد. همچنین، می‌توان تعریف اخیر را، با مشخص کردن وضع‌استقرار نقطه‌ها، با نزول پارامتر t، به‌دست آورد. روشن‌است که این‌جهت نیز، بستگی به انتخاب نوع نمایش منحنی ندارد.

حالا، به مسألهٔ جهت بر روی منحنی بسته می‌پردازیم. دو نقطهٔ C و D (متمایز از A) را، به‌دلخواه، انتخاب می‌کنیم و فرض‌می‌کنیم که متناظر با مقدارهای $t=t_1$ و $t=t_2>t_1$ از پارامتر باشند، به نحوی که نقطهٔ D بعد از نقطهٔ C بیاید (نقطه‌ها را، شبیه بالا، از روی پارامتر t تعیین می‌کنیم). می‌توان ثابت کرد که این جهت هم، با هرنمایش پارامتری دلخواه منحنی ــ ولی با حفظ ردیف نقطه‌های C و D ــ با جهت قبلی، یکی می‌شود. در واقع، اگر مقدارهای $t=t^*$ و $t=T^*$، که در آن $t_0<t_1$ و $t_1<T^*<T$، نظیر

نقطه‌های A^* و B^* باشند، آن‌گاه، برای کمان (غیر بستهٔ) A^*B^*، نتیجه‌ای، شبیه حالت قبل به دست می‌آید. ولی، از آن‌جا که می‌توان t_0^* را به دلخواه نزدیک بـه t_0 و T^* نزدیک به T گرفت، بنابراین، نتیجهٔ حاصل، برای تمامی منحنی درست است.

به این ترتیب، می‌توان، دربارهٔ جهت از A به A ازطریق C و D، مستقل از نـوع انتخاب نمایش پـارامتری منحنی، صحبت کـرد. به‌همین ترتیب، مفهوم جهت از A به A ازطریق D و C هم روشن می‌شود.

۲۴۷. طول منحنی. جمع‌پذیری طول کمان. از نمایش (۱) منحنی $\widetilde{AB}$ و جهت آن که به‌وسیلهٔ ترقی پارامتر t معین می‌شود، آغاز می‌کنیم. ردیف نقطه‌های زیر را، انتخاب می‌کنیم:

$$A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n=B \qquad (۲)$$

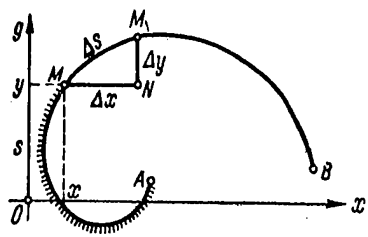
به‌نحوی که، مسیر آن‌ها، درجهت نموده شده، نظیر مقدارهای صعودی پارامتر باشد:

$$t_0<t_1<t_2<\dots<t_i<t_{i+1}<\dots<t_n \qquad (۳)$$

اگر این نقطه‌ها را، به‌وسیلهٔ پاره‌خطهایی بـه هم وصل کنیم (شکل ۱۴۹)، خـط شکستهٔ $M_0M_1\dots M_{n-1}M_n$، محاط در منحنی $\widetilde{AB}$، به‌دست می‌آید. یادآوری می‌کنیم کـه در شمارهٔ قبل، روشن کردیم که، مفهوم جهت و، همراه بـا آن، مفهوم خط شکستهٔ محاطی، ارتباط به انتخاب خاص نمایش پارامتری (۱) ندارد. طول منحنی $\widetilde{AB}$، عبارت است از مرز بالای S، برای مجموعهٔ محیط‌های p همهٔ خطهای شکستهٔ ممکن محاط در منحنی:

$$S=\sup\{p\}$$

اگر، عدد S، متناهی باشد، منحنی را راستاپذیر (دارای طول متناهی) نامند.*



شکل ۱۴۹

*) توجه خواننده را، به اهمیت تصریح مفهوم جهت روی‌منحنی و روی خط شکستهٔ محاطی جلب‌می‌کنیم. اگرنقطهٔ M_i رامی‌شد، هرجاکه‌افتاد، انتخاب‌کنیم، مرز S همیشه $+\infty$ می‌شد.

از تعریف طول منحنی نتیجه می‌شود که، محیط هر خط شکستهٔ محاط در منحنی $\widehat{AB}$، از طول S منحنی تجاوز نمی‌کند، و روشن است که، در حالت خاص، طول وتر AB هم ـ که دو نقطهٔ ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند ـ از این حکم خارج نیست.

حالا نقطهٔ C را روی منحنی $\widehat{AB}$ و بین A و B انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که نظیر نقطهٔ $t=\bar{t}$، در فاصلهٔ بین t_0 و T، باشد: $t_0<\bar{t}<T$.

اگر منحنی $\widehat{AB}$، راستاپذیر باشد، دومنحنی $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$ هم، راستاپذیر خواهند بود. برعکس، از راستاپذیری این دو منحنی، راستاپذیری تمامی منحنی $\widehat{AB}$ نتیجه می‌شود. ضمناً، اگر طول کمان‌های $\widehat{AB}$، $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$ را، به ترتیب، با S، S' و S'' نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$S=S'+S'' \qquad (۴)$$

برای اثبات، ابتدا فرض می‌کنیم، منحنی $\widehat{AB}$ راستاپذیر باشد و دو خط شکستهٔ دلخواه، با محیط‌های p' و p''، را، به‌ترتیب، در کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$ محاط می‌کنیم. اگر این دو خط شکسته را، با هم بگیریم، خط شکسته‌ای با محیط

$$p=p'+p''$$

محاط در منحنی $\widehat{AB}$، به‌دست می‌آید. چون $p\leqslant S$، یعنی

$$p'+p''\leqslant S \qquad (۵)$$

بنابراین، روشن است که، به‌طور جداگانه هم، داریم:

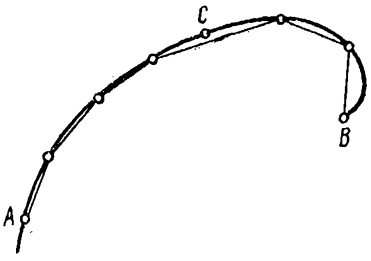
$$p'\leqslant S,\ p''\leqslant S$$

به این‌ترتیب، مجموعه‌های $\{p'\}$ و $\{p''\}$، کران‌دار از بالا هستند (S، متناهی است) و کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$، راستاپذیر می‌شوند، زیرا دارای طول متناهی هستند:

$$S'=\sup\{p'\},\ S''=\sup\{p''\}$$

با توجه به ویژگی مرزهای بالا [۱۱]، می‌توان محیط‌های p' و p'' را ـ که مستقل از یکدیگرند ـ تا آن‌جا که بخواهیم، نزدیک به کران‌های خود S' و S''، انتخاب کرد. بنابراین، از (۵)، و به‌کمک عبور به حد، نتیجه می‌گیریم:

$$S'+S''\leqslant S \qquad (۶)$$



شکل ۱۵۰

حالا فرض می‌کنیم، کمان‌های راستاپذیر $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$، داده شده باشند. خط شکستهٔ دلخواه با محیط p را، در منحنی $\widehat{AB}$ محاط می‌کنیم. اگر نقطهٔ C، یکی‌از راس‌های خط شکسته باشد، دراین‌صورت، این خط شکسته، به دوخط شکسته با محیط‌های p' و p''، که به‌ترتیب در کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{CB}$ محاط‌اند، تجزیه می‌شود. اگر، نقطهٔ C یکی از راس‌های خط‌شکسته نباشد، آن وقت، این نقطه را هم، به‌عنوان یك راس، به‌خط شکسته اضافه می‌کنیم. با این عمل، محیط خط شکسته، تنها می‌تواند بزرگتر شود (شکل ۱۵۰). و خط شکستهٔ جدید هم، شبیه مورد قبل، به دو خط شکسته تجزیه می‌شود. در همهٔ حالت‌ها، داریم:

$$p \leqslant p' + p'' \leqslant S' + S''$$

مجموعهٔ $\{p\}$، از بالا کران‌دار است (S'، S''، متناهی هستند) و منحنی $\widehat{AB}$، راستاپذیر است و، ضمناً، طول آن

$$S = \sup\{p\} \leqslant S' + S''$$

و سرانجام، اگر این نابرابری را، با (۶) مقایسه کنیم، به نابرابری مطلوب (۴) می‌رسیم.

به‌این‌ترتیب، مفهوم طول‌کمان، دارای‌خاصیت جمع‌پذیری است [با ۳،۲۱ مقایسه کنید].

حکمی را که ثابت‌کردیم، می‌توان به‌سادگی، برای حالتی هم‌که تعداد منحنی‌های جزئی غیرمشخص باشد، تعمیم داد.

۲۴۸. شرط‌های‌کافی راستاپذیری*. دیفرانسیل‌کمان. تا این جا، حالت کلی منحنی سادهٔ پیوستهٔ (۱) را مورد بررسی قرار دادیم. برای این‌که بتوانیم، شرط‌های کافی راستاپذیری را مطرح‌کنیم و با ویژگی‌های دیگر طول‌کمان، آشنا شویم، دوباره، به همان فرض‌های معمول در این فصل، یعنی وجود مشتق‌های پیوسته $\varphi'(t)$ و $\psi'(t)$، برمی‌گردیم و ثابت می‌کنیم‌که، بااین فرض‌ها، منحنی (۱)، راستاپذیر است.

خط‌شکسته‌ای درنظر می‌گیریم که، راس‌های آن در نقطه‌های (۲) و با مقدارهای پارامتر (۳)، معین شده باشد. مختصات نقطه‌های M_i، عبارتند از:

$$x_i = \varphi(t_i),\ y_i = \psi(t_i)\quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

*) شرط‌های کلی‌تر راستاپذیری (شرط‌های‌لازم و کافی) را، می‌توانید، درجلد سوم، پیداکنید.

آن‌وقت، محیط p خط شکسته، این‌طور نوشته می‌شود:

$$p=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

ولی، از روی دستور نموهای محدود [۱۱۲]، داریم:

$$x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\tau_i)\cdot(t_{i+1}-t_i),$$
$$y_{i+1}-y_i=\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)=\psi'(\tau_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)$$
$$(t_i<\tau_i,\tau_i<t_{i+1})$$

به‌طوری‌که، بالاخره

$$p=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\cdot(t_{i+1}-t_i) \qquad (۷)$$

اگر بزرگترین مقدارهای تابع‌های $|\varphi'(t)|$ و $|\psi'(t)|$ را، در بازهٔ (t_0, T)، به ترتیب، با L و $\bar{L}$ نشان دهیم، آن‌گاه، بدون زحمت، برآورد زیر، از (۷) به‌دست می‌آید:

$$p\leqslant\sqrt{L^2+\bar{L}^2}\cdot(T-t_0) \qquad (۸)$$

مجموعهٔ $\{p\}$، از بالا کران‌دار می‌شود، یعنی، منحنی دارای طول متناهی S است و، بنابراین راستاپذیر است. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

چون $S=\sup\{p\}$، از (۸) صمناً، برآوردی هم برای S به دست می‌آید:

$$S\leqslant\sqrt{L^2+\bar{L}^2}\cdot(T-t_0) \qquad (۹)$$

این، برآورد از بالا است؛ ولی، ضمناً، برآورد ازپایین هم، برای ما لازم است. l و $\bar{l}$ را، کوچکترین مقدار تابع‌های $|\varphi'(t)|$ و $|\psi'(t)|$، در بازهٔ (t_0, T) می‌گیریم. در این‌صورت، شبیه (۸)، می‌توان از (۷) نتیجه گرفت:

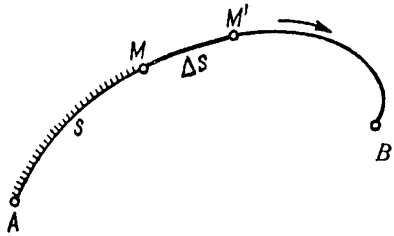
$$p\geqslant\sqrt{l^2+\bar{l}^2}\cdot(T-t_0) \qquad (۸^*)$$

و آن‌وقت

$$S\geqslant\sqrt{l^2+\bar{l}^2}(T-t_0) \qquad (۹^*)$$

اگر مقدار t، و همراه با آن، موضع نقطهٔ $M(t)$ برمنحنی، تغییر کند، طول کمان متغیر $\overset{\frown}{AM}$ تابعی از متغیر t می‌شود، که آن‌را با

$$S=S(t)$$



شکل ۱۵۱

نشان می‌دهیم. t را به اندازهٔ Δt نمو می‌دهیم؛ نقطهٔ M، روی منحنی و درطول آن، به‌سمت B، جا به‌جا می‌شود و به وضع M' درمی‌آید (شکل ۱۵۱). کمیت S هم، نمو مثبت ΔS را پیدا می‌کند، که برابر است با طول کمان $\widehat{MM'}$ (با توجه به جمع‌پذیری طول کمان، که در شمارهٔ پیش، ثابت کردیم). به‌این ترتیب، $S(t)$، یك تابع صعودی است.

حالا، به‌جای بازهٔ $[t_0, T]$، بازهٔ $[t_0, t_0+\Delta t]$ را درنظر می‌گیریم و برآوردهای (۹) و (۹*) را، در مورد طول ΔS، به‌کار می‌بریم:

$$\sqrt{l^2+\bar{l}^2}.\Delta t \leqslant \Delta s \leqslant \sqrt{L^2+\bar{L}^2}.\Delta t$$

ولی در این جا، حق داریم، l و L ($\bar{l}$ و $\bar{L}$) را، به‌عنوان کمترین و بیشترین مقدار تابع $|\varphi'(t)|$ ($|\psi'(t)|$)، در بازهٔ $[t \text{ و } t+\Delta t]$ درنظر بگیریم. از آن‌جا

$$\sqrt{l^2+\bar{l}^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{L^2+\bar{L}^2}$$

و چون ــ بنا به پیوستگی مشتق‌ها ــ به‌ازای $\Delta t \to 0$، هردو عدد l و L به‌سمت $|\varphi'(t)|$ و هردو عدد $\bar{l}$ و $\bar{L}$ به‌سمت $|\psi'(t)|$ میل می‌کنند، بنابراین، هردو ریشه، در نابرابری‌های قبل، به‌سمت حد مشترکی میل می‌کنند:

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

بنابراین، نسبت $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ هم، به‌سمت همان حد، میل می‌کند و، به‌سادگی می‌توان دید که این حکم، درحالت $\Delta t < 0$ هم، درست است. به‌این ترتیب، سرانجام، نتیجه می‌گیریم که: طول کمان متغیر $s = s(t)$، تابع مشتق‌پذیری است از پارامتر t و مشتق آن نسبت به پارامتر t با این دستور بیان می‌شود:

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

و یا ساده‌تر

$$s'_t=\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t} \qquad (۱۰)$$

اگر این برابری را مجذور و، سپس، دوطرف را در $dt^۲$ ضرب کنیم، دستور جالب و سادهٔ زیر، به‌دست می‌آید:

$$ds^۲=dx^۲+dy^۲ \qquad (۱۱)$$

که تعبیر هندسی روشنی دارد. روی شکل ۱۵۲، در مثلث قائم‌الـزاویه (و منحنی الخط) $MNM_۱$، ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه، عبارتند از نمو هـای مختصـات *نقطـهٔ* M: $MN=\Delta x$ و $NM_۱=\Delta y$. «وتـر»، یعنی کمان $\widehat{MM}_۱=\Delta s$، عبارت است از نمو کمان $\widehat{AM}=s$: معلوم می‌شود که اگر در این مثلث، به‌جای خود نمو ها، بخش‌های اصلی آن‌ها ــ دیفرانسیل‌ها ــ را در نظر بگیریم، «قضیهٔ فیثاغورث» را می‌توان به‌کار برد.

شکل ۱۵۲

جالب است که به‌حالت‌های خاص رابطهٔ مهم (۱۰) ــ که متناظر با حالت‌های خاص نمایش منحنی‌هاست، توجه کنیم. مثلاً، اگر منحنی، با معادلهٔ صریح $y=f(x)$، درمختصات دکارتی، داده شده باشد، x در نقش «پارامتر» ظـاهر می‌شود و کمان s بستگی به x پیدا می‌کند: $s=s(x)$، و رابطهٔ (۱۰)، به‌این صورت، درمی‌آید:

$$s'_x=\sqrt{۱+y'^{۲}_x} \qquad (۱۰a)$$

و اگر منحنی، با معادلهٔ قطبی $r=g(\theta)$ داده شده باشد، همان‌طـور که می‌دانیم، هم‌ارز نمایش پارامتری منحنی می‌شود:

$$x=r.cos\theta,\quad y=r.sin\theta$$

که در آن، θ پارامتر است. در این‌جا، کمان، تابعی از θ است: $s=s(\theta)$ وچون می‌دانیم

$$x'_\theta=r'_\theta cos\theta-rsin\theta,$$
$$y'_\theta=r'_\theta sin\theta+rcos\theta$$

بنابراین

$$x'^{۲}_\theta+y'^{۲}_\theta=r'^{۲}_\theta+r^۲$$

و رابطهٔ (۱۰)، به‌این‌صورت، درمی‌آید:

$$s'_\theta=\sqrt{r'^{۲}_\theta+r^۲} \qquad (۱۰b)$$

اغلب به نظر می‌رسد که بهتر است، به‌جای یکی از دو انتهای کمان، یك نقطهٔ درونی آن، به‌عنوان A یعنی مبداء محاسبهٔ کمان، در نظر گرفته شود. در چنین حالتی، طبیعی است، که اگر از نقطهٔ درونی A، در جهت صعودی پارامتر حرکت کنیم، کمان مثبت و، در جهت دیگر، کمان منفی به‌دست می‌آید. ضمناً، طول کمان را، در حالت اول، با علامت مثبت و در حالت دوم، با علامت منفی نشان می‌دهند. این مقدار s کمان را، که همراه با علامت است، برای سادگی کار، به‌طور ساده، کمان می‌نامیم و رابطه‌های (۱۰)، (۱۱)، (۱۰a) و (۱۰b) را، در مورد آن به‌کار می‌بریم.

[توجه کنیم که، اگر جهت مثبت برای محاسبهٔ کمان را، به جای این که در جهت صعودی پارامتر بگیریم (که معمولاً، چنین است)، در جهت نزولی آن انتخاب کنیم، در آن صورت، در رابطه‌های (۱۰)، (۱۰a) و (۱۰b)، باید جلو رادیکال، علامت منفی را قرار دهیم.]

۲۴۹. کمان در نقش پارامتر. جهت مثبت مماس. چون کمان متغیر $s=s(t)$، تابعی است پیوسته و صعودی یکنوا از پارامتر t، بنابراین t هم، به‌نوبهٔ خود، می‌تواند، همچون تابع پیوستهٔ یك ارزشی از s، در نظر گرفته شود: $t=\omega(s)$، که در آن، s از ۰ تا S (طول تمامی منحنی موردنظر) می‌تواند تغییر کند [۸۳]. با گذاشتن این مقدار t، در معادله‌های (۱)، مختصات جاری x و y را، به‌صورت تابعی از s، به‌دست می‌آوریم:

$$x=\varphi(\omega(s))=\Phi(s),$$

$$y=\psi(\omega(s))=\Psi(s)$$

بدون شك، کمان s، به‌عنوان «طول منحنی‌الخط» نقطهٔ M، طبیعی‌ترین پارامتر، برای تعیین موضع آن است.

همان‌طور که گفتیم، می‌توان نقطهٔ مبداء A را (برای محاسبهٔ کمان)، در یکی از دو انتهای کمان منحنی، انتخاب نکرد که، در این صورت، کمان s، می‌تواند، هم مقدارهای مثبت و هم مقدارهای منفی را، اختیار کند.

فرض کنیم نقطهٔ M منحنی ــ در نمایش (۱) ــ یك نقطهٔ عادی باشد، به طوری که [(۱۰) را ببینید]:

$$s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}>0$$

آن‌گاه [۹۴]، برای مقدار موردنظر s (و در نزدیکی آن)، مشتق پیوستهٔ

$$t'_s=\omega'(s)=\frac{1}{\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}}$$

وجود دارد و، درنتیجه، مشتق‌های پیوستهٔ زیر هم وجود دارند:

$$x'_s=\Phi'(s),\ y'_s=\Psi'(s)$$

از رابطهٔ اساسی (۱۱)، باتوجه به این که، همهٔ مشتق‌ها، مثلاً نسبت به s گرفته شده‌اند داریم:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1 \qquad (12)$$

به‌این ترتیب، اگر نقطهٔ M، نقطهٔ عادی در نمایش (۱) منحنی باشد، وقتی که به پارامتر s عبورکنیم، بازهم یك نقطهٔ عادی باقی خواهد ماند. رابطهٔ (۱۲)، ضمناً، امکان اثبات حکم سودمند زیر را، فراهم می‌کند:

فرض کنیم M، یك نقطهٔ عادی از منحنی باشد. اگر M_1 را، نقطهٔ متغیری از همان منحنی بگیریم، آن‌گاه، وقتی‌که M_1 به‌سمت M میل کند، نسبت طول وتر MM_1، برطول کمان $\overset{\frown}{MM_1}$، به‌سمت واحد، میل می‌کند:*

$$\lim_{\overset{\frown}{MM_1}\to 0}\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=1 \qquad (13)$$

کمان را، به‌عنوان پارامتر، درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، نقطهٔ M نظیر مقدار s از کمان و نقطهٔ M_1 نظیر مقدار $s+\Delta s$ باشد. مختصات آن‌ها را، به ترتیب، x، y و $x+\Delta x$، $y+\Delta y$ می‌گیریم. داریم:

$$\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s,\quad MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

به‌نحوی که

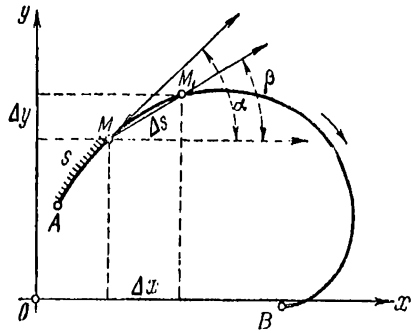
$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta s|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}$$

که اگر $\Delta x\to 0$، درحد، بنابر (۱۲)، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

تا این‌جا، هروقت‌ازممماس برمنحنی، درنقطهٔ‌عادی M، صحبت کرده‌ایم، ضریب‌زاویهٔ آن

---

*) دررابطه، به‌خاطر سادگی کار، به‌جای «طول پاره‌خط MM_1» نوشته‌ایم MM_1، و به‌جای «طول کمان $\overset{\frown}{MM_1}$»، نوشته‌ایم $\overset{\frown}{MM_1}$.



شکل ۱۵۳

$tg\alpha$، برای هردو جهت مماس، یکی بود: مقدار $tg\alpha$، برای این و یا آن جهت مماس، یکسان درمی‌آید. ولی، در برخی از بررسی‌ها، لازم می‌آید که به جهت مماس هم، توجه داشته باشیم.

فرض کنیم، نقطهٔ مبداء و جهت معینی برای محاسبهٔ کمان، در روی منحنی، معین شده باشد: کمان را، به‌عنوان پارامتر، برای مشخص کردن موضع نقطهٔ واقع بر منحنی، انتخاب می‌کنیم.

فرض کنیم نقطهٔ M مورد بحث، نظیر کمان s باشد. به s، نمو مثبت Δs را می‌دهیم؛ کمان $s+\Delta s$، معرف نقطهٔ جدید M_1 است که، نسبت به M، در سمت ترقی منحنی، قرار دارد. قاطع را، ازجهت M به M_1 می‌گیریم و زاویه‌ای را که این‌جهت قاطع، با جهت مثبت محور x تشکیل می‌دهد، β می‌نامیم. اگر پاره‌خط MM_1 را، برمحورهای مختصات تصویر کنیم (شکل ۱۵۳)، با توجه به قضیهٔ معلوم مربوط به نظریهٔ تصویرها داریم:

$$\text{تصویر } MM_1 \text{ روی } x = \Delta x = MM_1 \cdot \cos\beta$$

$$\text{تصویر } MM_1 \text{ روی } y = \Delta y = MM_1 \cdot \sin\beta$$

ازآن‌جا

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{MM_1}$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta y}{MM_1}$$

و چون $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$، پس، این برابری‌ها را، می‌توان‌چنین‌نوشت:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1},\quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1} \qquad (۱۴)$$

جهتی از مماس را، که در جهت صعودی کمان باشد، مثبت می‌نامیم؛ دقیق‌تر بگوییم: جهت مثبت مماس، به‌عنوان وضع حدی نیم خط MM_1 ــ که جهت آن را در بالا روشن کرده‌ایم ــ به‌ازای $\Delta s \to 0$، معین می‌شود. اگر زاویه‌ای را، که جهت مثبت مماس با جهت مثبت محور x تشکیل می‌دهد، با α نشان دهیم، آن‌گاه، از (۱۴)، و با توجه به (۱۳)، در حد به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} \tag{۱۵}$$

این رابطه‌ها، زاویهٔ α را با تقریب $2k\pi$ (k، عددی است درست)، معین می‌کنند، بنابراین، در واقع، یکی از دو جهت ممکن مماس، یعنی جهت مثبت را تثبیت می‌کنند.

یادداشت. همهٔ آن چه که در شماره‌های **۲۴۵** تا **۲۴۹**، دربارهٔ رفتار منحنی‌های مسطح، گفته‌ایم، بدون تفاوت جدی، دربارهٔ منحنی فضائی

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \tag{۱*}$$

$$(t_0 < t < T)$$

نیز درست است. مفهوم طول منحنی، با همان اصطلاح‌هایی بیان می‌شود که در شمارهٔ **۲۴۷** به‌کار برده‌ایم. با شرط وجود مشتق‌های پیوسته، برای تابع‌های φ، ψ و χ، طول متناهی و منحنی راست‌پذیر است. طول کمان متغیر (از نقطهٔ مبداء منحنی، تا نقطهٔ متغیر نظیر پارامتر t)

$$s = s(t)$$

نسبت به t، مشتق‌پذیر است و، ضمناً، مشتق آن نسبت به t، با این رابطه بیان می‌شود:

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} \tag{۱۰*}$$

و از همین‌جا، رابطهٔ دیفرانسیل کمان، به‌دست می‌آید:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{۱۱*}$$

در حالتی که، با نقطه‌های خاص، سروکار نداشته باشیم [**۲۲۸**]، می‌توان نمایش پارامتری منحنی را ــ که در آن، نقش پارامتر به‌عهدهٔ کمان s باشد ــ مطرح کرد. بالاخره، می‌توان، از مفهوم جهت مثبت مماس، صحبت کرد، که کسینوس‌های هادی آن، از این رابطه‌ها به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{۱۵*}$$

§۵. انحنای منحنی‌های مسطح

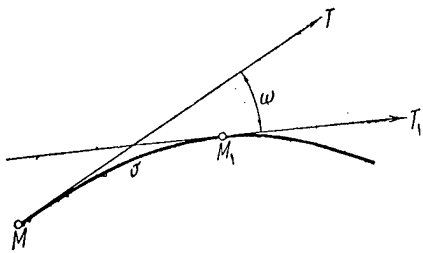
۲۵۰. مفهوم انحنا (میزان خمیدگی). دوباره، منحنی سادهٔ

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T) \qquad (۱)$$

را درنظرمی‌گیریم، که‌درآن، این‌بار، تابع‌های φ و ψ، همراه با مشتق‌های مرتبهٔ اول ودوم آن‌ها، پیوسته فرض شده‌اند. کمانی از این منحنی را انتخاب می‌کنیم، که بدون نقطهٔ خاص باشد.

اگردرهرنقطهٔ آن،مماسی‌رسم‌کنیم(مثلاً، درجهت مثبت)، به‌علت «خمیدگی»منحنی، با تغییرمکان، نقطهٔ تماس دوران می‌کند؛ همین ویژگی است که، به‌طور اساسی، منحنی را ازخط راست، متمایز می‌کند، زیرا مماس برخط راست(که برآن منطبق است)، درهمهٔ نقطه‌ها، تنها یك جهت را حفظ می‌کند.

عامل مهمی که نوع حرکت منحنی‌را مشخص می‌کند، «میزان خمیدگی» یا «انحنای» آن، درنقطه‌های مختلف است. این انحنا را، می‌توان با عدد، بیان‌کرد.



شکل ۱۵۴

فرض‌کنیم $\overset{\frown}{MM_1}$ (شکل ۱۵۴)، کمانی ازمنحنی باشد؛ مماس‌های MT و M_1T_1 را، که از دو نقطهٔ انتهای این‌کمان (درجهت مثبت) رسم شده‌اند، درنظرمی‌گیریم.

طبیعی است که انحنای منحنی را، با زاویهٔ دوران مماس، در واحد طول‌کمان، مشخص‌کنند، یعنی با نسبت $\frac{\omega}{\sigma}$، که درآن، زاویهٔ ω برحسب رادیان‌وطول σ برحسب‌واحد انتخابی طول است. این نسبت را، انحنای متوسط کمان منحنی، می‌نامند.

درقسمت‌های مختلف منحنی، انحنای متوسط آن، درحالت کلی، فرق می‌کند. ضمناً، یك منحنی (منحصربه‌فرد)، وجود دارد، که انحنای متوسط، درهمه‌جای آن، یکی است:این

منحنی، دایره است.*

در واقع، برای دایره، داریم (شکل ۱۵۵):

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R\omega}=\frac{1}{R}$$

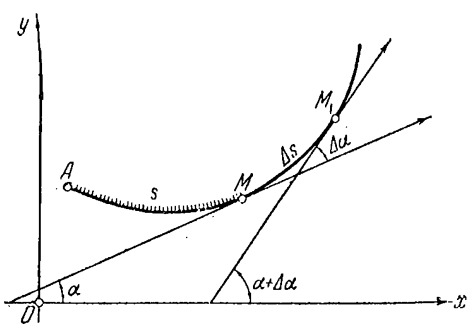
بدون این‌که، دربارهٔ جای کمان دایره، صحبتی شده باشد.

با توجه به‌مفهوم انحنای متوسط کمان $\overset{\frown}{MM_1}$، می‌توانیم مفهوم انحنا دریك نقطه را، تعریف کنیم:

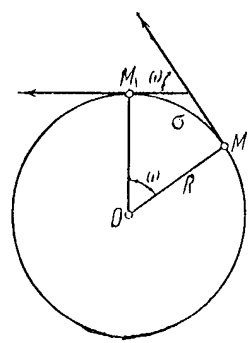
انحنای یك منحنی، درنقطهٔ M، عبارت است ازحدانحنای متوسط‌کمان $\overset{\frown}{MM_1}$، وقتی‌که نقطهٔ M_1، در روی منحنی، به سمت نقطهٔ M میل‌کند.

اگرانحنای منحنی را، درنقطهٔ مفروض، با k نشان دهیم، داریم:

$$k=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\omega}{\sigma}$$



شکل ۱۵۶



شکل ۱۵۵

روشن است که در دایره داریم: $k=\frac{1}{R}$، یعنی انحنای دایره، برابراست با عکس شعاع دایره.

یادداشت. مفهوم‌های انحنای متوسط وانحنا در نقطهٔ مفروض، کاملاً شبیه مفهوم‌های سرعت متوسط و سرعت درلحظهٔ‌مفروض، برای نقطهٔ متحرك است. می‌توان گفت که‌انحنای متوسط، عبارت است از سرعت متوسط تغییرجهت مماس، روی یـك کمان؛ وانحنا دریك

---

*) معلوم است که ازخط راست، صرف‌نظرکـرده‌ایم. انحنای خط راست، درهمه‌جا، برابر است با صفر.

نقطهٔ منحنی، عبارت است ازسرعت تغییراین جهت، دریك نقطهٔ مفروض.

حالا ، سعی می‌کنیم ، عبارت تحلیلی انحنا را، بـر مبنای نمایش پارامتری منحنی، محاسبه کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم، کمان، در نقش پارامتر باشد. به‌طوری‌کـه می‌دانیم [۲۴۹]، چنین نمایشی ــ اگر به‌کمانی اکتفاکنیم‌که، در آن، نقطهٔ خاص وجود نداشته باشد ــ همیشه ممکن است.

براین قسمت منحنی، نقطهٔ M را (که البته، نقطهٔ خاص نیست)، انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم‌که، نظیرمقدار sکمان باشد. اگربه s، نمودلخواه Δs را بدهیم، نقطهٔ دیگر $M_1(s+\Delta s)$ (شکل ۱۵۶) به‌دست می‌آید. نمو $\Delta\alpha$، از زاویه شیب مماس، وقتی‌که از M به M_1 عبورمی‌کنیم، همان زاویهٔ بین دومماس است: $\omega=\Delta\alpha$.

چون $\sigma=\Delta s$، بنابراین، انحنای متوسط، برابراست با $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

اگر $\widehat{MM_1}=\Delta s$ را به‌سمت صفرمیل دهیم، برای انحنای منحنی درنقطهٔ M، به‌این عبارت می‌رسیم:

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds} \qquad (۲)$$

ضمناً، باید به‌ایـن نکتهٔ مهم توجه‌کردکه، این رابطه، تنها با تقریب علامت درست است، زیرا بنابه‌تعریف ما، انحنا عددی غیرمنفی است، درحالی‌که، درسمت راست،ممکن است نتیجهٔ منفی به‌دست‌آید.

مساله دراین است‌که، هم $\Delta\alpha$ وهـم Δs، ممکن است منفی باشند و، بنابراین، اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید بنویسیم: $\omega=|\Delta\alpha|$، $\sigma=|\Delta s|$ وبالاخره

$$k=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

این ملاحظه را، ازاین به‌بعد هم، باید درنظر داشت.

برای‌آن‌که، رابطهٔ (۲) را، بـه‌صورتی‌که بـرای محاسبهٔ مستقیم مناسب باشد، درآوریم (وهمراه باآن، خود وجود انحنا را هم، مشخص‌کنیم)، به‌نمایش پارامتری دلخواه منحنی (۲)، برمی‌گردیم.

چون نقطهٔ موردنظر $M(t)$ ، نقطهٔ خاص نیست و، ضمناً $x'^2_t+y'^2_t>0$، بنابراین، بدون این‌که به‌کلی بودن‌مساله لطمه‌ای واردآید، می‌توان فرض‌کردکه $x'_t=\varphi'(t)\neq 0$.

حالا، رابطهٔ (۲) را، به‌صورت دیگری می‌نویسیم:

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\alpha'_t}{s'_t} \qquad (۳)$$

ولی $s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}$ [۲۴۸]، (۱۰)]. تنها محاسبهٔ α'_t می‌ماند. چون [۱۰۶، (۱۱)]

$$tg\alpha=\frac{y'_t}{x'_t},\quad \alpha=\operatorname{arc}tg\frac{y'_t}{x'_t}$$

بنابراین

$$\alpha'_t=\frac{1}{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{x'^2_t}=\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{x'^2_t+y'^2_t} \qquad (۴)$$

و با گذاشتن مقدارهای s'_t و α'_t در (۳)، به‌آخرین رابطه می‌رسیم:

$$k=\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{(x'^2_t+y'^2_t)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۵)$$

این رابطه، برای محاسبه، کاملاً مناسب است، زیرا همهٔ مشتق‌های موجود در آن، به‌سادگی و از روی معادله‌های پارامتری منحنی، قابل محاسبه‌اند.

اگر منحنی، با معادلهٔ صریح $y=f(x)$ داده شده باشد، رابطهٔ بالا، به‌این صورت درمی‌آید:

$$k=\frac{y''_{xx}}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۵a)$$

بالاخره، اگر معادلهٔ قطبی منحنی مفروض باشد: $r=g(\theta)$، در آن صورت، طبق معمول، می‌توان، نمایش پارامتری منحنی درمختصات قائم را، با اختیار θ به‌عنوان پارامتر، درنظر گرفت. آن وقت به‌کمك (۵) نتیجه می‌گیریم:

$$k=\frac{r^2+2r'^2_\theta-rr''_{\theta^2}}{(r^2+r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۵b)$$

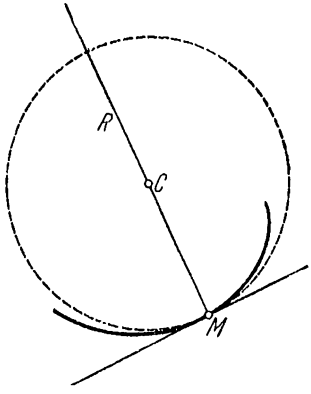
۲۵۱. دایرهٔ انحنا وشعاع انحنا. دربیشترموردها، راحت‌تراست، که منحنی را، در نزدیکی نقطه مورد بررسی، به تقریب، بـا دایره‌ای عوض‌کنیم، کـه انحنای‌آن، برابربا انحنای منحنی دراین نقطه باشد.

دایرهٔ انحنای منحنی، درنقطهٔ M، به‌دایره‌ای گفته می‌شودکه

۱) درنقطهٔ M، با منحنی مماس باشد؛

۲) جهت تحدب‌آن درنزدیکی این نقطه، با جهت تحدب منحنی، یکی باشد؛

۳) انحنای‌آن، برابر باشد باانحنای منحنی درنقطهٔ M (شکل ۱۵۷).



شکل ۱۵۷

مرکز C این دایره‌را، به‌طورساده، مرکزانحنای منحنی وشعاع‌آن را، شعاع انحنای منحنی، دراین نقطه، گویند.

ازتعریف دایرهٔ انحنا روشن می‌شودکه، مرکزانحنا، همیشه، روی قائم برمنحنی در نقطهٔ مورد بـررسی، و درطرف تقعر منحنی، قـراردارد. اگر انحنای منحنی را، در نقطهٔ مفروض، k بگیریم، باتوجه به رابطهٔ $k=\frac{1}{R}$ [۲۵۰]، برای شعاع انحنا، خواهیم داشت:

$$R=\frac{1}{k}$$

با توجه به‌آن چه درمورد انحنا، درشمارهٔ قبل، دیـدیم، بلافاصله، رابطه‌های زیر، برای شعاع انحنا، به‌دست می‌آید:

$$R=\frac{ds}{d\alpha} \qquad (۶)$$

$$R=\frac{(x'^{2}_{t}+y'^{2}_{t})^{\frac{3}{2}}}{x'_{t}y''_{tt}-x''_{tt}y'_{t}} \qquad (۷)$$

$$R=\frac{(1+y'^{2}_{x})^{\frac{3}{2}}}{y''_{xx}} \qquad (۷a)$$

$$R=\frac{(r^{2}+r'^{2}_{\theta})^{\frac{3}{2}}}{r^{2}+2r'^{2}_{\theta}-rr''_{\theta\theta}} \qquad (۷b)$$

که ازهرکدام، درحالت مربوط به‌خود، می‌توان استفاده کرد.

در همهٔ این رابطه‌ها، شعاع انحنا هم، مثل خود انحنا، با علامت به‌دست می‌آید، ولی دراین جا،علامت را ازبین نمی‌بریم ومی‌کوشیم، معنای هندسی، برای آن پیداکنیم.

برای این منظور، ابتدا، مفهوم جهت مثبت قائم را مطرح می‌کنیم. قبلاً، درشمارهٔ ۲۴۹، توضیح دادیم که، جهت‌مماس‌را، وقتی درجهت‌صعودی‌کمان باشد، مثبت می‌گیریم. جهت‌مثبت‌قائم‌ازروی‌جهت‌مثبت‌مماس،تعیین‌می‌شود،درست‌همان‌طورکه‌در دستگاه‌محورهای مختصات،می‌توان‌جهت مثبت‌محورyرا،ازروی جهت‌مثبت‌محورx، تعیین کرد. مثلاً،درحالت عادی ، قائم باید با مماس، زاویهٔ $+\frac{\pi}{2}$ را، درجهت عکس‌حرکت عقربه‌های ساعت‌تشکیل دهد، یعنی اگرجهت مثبت مماس را، به‌اندازهٔ $+\frac{\pi}{2}$، دورنقطهٔ تماس و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، برجهت مثبت قائم منطبق شود، حالا، شعاع انحنای $R=MC$ را، مانند پاره‌خط‌جهت‌دار واقع برقائم، درنظرمی‌گیریم. طبیعی است اگراین پاره خط، درجهت مثبت قائم قرارگرفته باشد، آن را مثبت بگیریم و، درحالت عکس، منفی. درشکل ۱۵۸، شعاع انحنا، برای منحنی I مثبت وبرای منحنی II منفی است.

تاکید می‌کنیم که علامت شعاع انحنا، به‌ترتیبی که از روی هرکدام از رابطه‌های بالا به‌دست می‌آید، دقیقاً، با تعریفی که برای علامت آن کردیم، تطبیق می‌کند. ضمناً، این یادآوری هم مهم است که، درهمهٔ حالت‌ها، جهت مثبت محاسبهٔ کمان، برجهت صعودی پارامتر (t، x یا θ)، منطبق است.

اگرتابع به‌صورت صریح داده شده‌باشد، به‌سادگی، می‌توان،آن چه‌راگفتیم، ثابت کرد. دراین جا، (شکل۱۵۸)، جهت مماس به‌طرف راست و، بنابراین، جهت قائم به‌طرف بالاست. اگرداشته باشیم: $y''_{xx}>0$ (خواه درنقطهٔ مفروض، وخواه ــ بنا به‌پیوستگی‌ــ در

نزدیکی آن)، تحدب منحنی به‌طرف پایین خواهد بود [۱۴۳]، وشعاع انحنای R مثبت است؛ همین نتیجه را، از رابطهٔ (۷a) هم می‌توان به‌دست آورد. بر عکس، درحالتی که داشته باشیم: $y''_{x^2} < 0$، تحدب منحنی به‌طرف بالا وشعاع R منفی است، که دراین حالت هم، با رابطهٔ (۷a) سازگاراست.

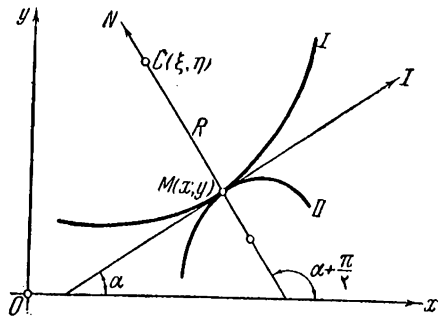
درمورد رابطه‌های دیگرهم، می‌توان، به‌همین ترتیب، استدلال کرد.

۲۵۲. مثال‌ها. ۱) منحنی زنجیری (شکل ۴۱):

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

دراین حالت داریم [با ۹۹، ۲۸) مقایسه کنید]:

$$\sqrt{1 + y'^2_x} = \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$$



شکل ۱۵۸

ازطرف دیگر

$$y''_{x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

وبنابراین [(۷a) را ببینید]

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}$$

به‌سادگی می‌توان دید که، پاره‌خط قائم $n=MN$ هم، با همین عبارت بیان می‌شود. ازاین‌جا، می‌توانیم طرز پیدا کردن مرکز انحنای C را، این‌طور نتیجه بگیریم: پاره خط MN را (به شکل توجه کنید)، روی خود قائم، ولی در جهت عکس (مثبت) جدا می‌کنیم.

۲) آستروئید (شکل ۱۱۶):

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

مشتق‌های y'_x و y''_{xx} را، می‌توان بدون حل معادله، و با توجه به‌مشتق گیری تابع‌های ضمنی، به‌دست آورد:

$$x^{-\frac{۱}{۳}}+y^{-\frac{۱}{۳}}.y'=۰ \quad \text{یا} \quad x^{\frac{۱}{۳}}.y'+y^{\frac{۱}{۳}}=۰$$

از آن‌جا

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

وسپس

$$\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}.y'+\frac{۱}{۳}y^{-\frac{۲}{۳}}.y'+x^{\frac{۱}{۳}}y''=۰$$

از آن جا

$$y''=-\frac{a^{\frac{۲}{۳}}}{۳xy^{\frac{۲}{۳}}}.y'=\frac{a^{\frac{۲}{۳}}}{۳x^{\frac{۴}{۳}}y^{\frac{۱}{۳}}}$$

اگرمقدارهای y' و y'' را، در رابطهٔ (۷a) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$R=۳(axy)^{\frac{۱}{۳}}$$

۳) سیکلوئید (شکل ۱۱۸):

$$y=a(t-sint),\quad y=a(۱-cost)$$

چون [۲۳۱، ۴)] $d\alpha=-\frac{۱}{۲}dt$ پس $\alpha=\frac{\pi}{۲}-\frac{t}{۲}$. از طرف دیگر، به سادگی محاسبه می‌شود:

$$x'_t=a(۱-cost),\quad y'_t=asint,\quad x'^{۲}_t+y'^{۲}_t=۴a^{۲}sin^{۲}\frac{t}{۲}$$

به‌طوری که

$$s'_t=\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t}=۲a\sin\frac{t}{۲}\ ,\quad ds=۲a\sin\frac{t}{۲}dt$$

درچنین حالتی، برای محاسبهٔ R، می‌توان از رابطهٔ اساسی (۶) استفاده کرد:

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{۲a\sin\frac{t}{۲}dt}{-\frac{۱}{۲}dt}=-۴a\sin\frac{t}{۲}$$

اگر عبارتی را، که در ۲۳۱، ۴) برای پاره‌خط قائم n داشتیم، به خاطرآوریم، معلوم می‌شود که

$$R=-۲n$$

که ازآن جا، به‌سادگی می‌شود، مرکزانحنای C را روی شکل پیداکرد.

۴) گستردهٔ دایره (شکل ۱۲۱):

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

دراین جا $\alpha=t$ [۲۳۱، ۶)]، به‌طوری که $d\alpha=dt$. ازطرف دیگر

$$x'_t=at\cos t,\quad y'_t=at\sin t,\quad x'^{۲}_t+y'^{۲}_t=a^{۲}t^{۲}$$

ازاین جا

$$s'_t=at,\quad ds=atdt$$

بنابراین، خیلی ساده، نتیجه می‌گیریم:

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=at=MB$$

به‌این ترتیب، همان نقطهٔ تماس B (نقطهٔ خروج نخ ازدایره)، ضمناً، مرکز انحنای مسیر انتهای M نخ هم خواهد بود: مکان هندسی مرکز انحنای این منحنی ، همان دایرهٔ اولیه است.

[دراین‌جا، با قسمتی ازیك حقیقت‌کلی سروکارداشتیم، که حالت‌کلی آن را، در ۲۵۵ خواهیم دید.]

۵) پیچ لگاریتمی $r=ae^{m\theta}$ (شکل ۱۳۴).

داریم: $r'_\theta = mr$، $r''_{\theta^2} = m^2 r$، که اگر در رابطهٔ (۷b) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$R = \frac{(r^2 + m^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2 r^2 - m^2 r^2} = r\sqrt{1 + m^2}$$

ولی $m = cotg\omega$ [۲۳۳، ۳)]، به‌طوری که عبارت مربوط به R را، می‌توان به‌صورت

$$R = \frac{r}{sin\omega}$$

نوشت. آن‌گاه، مستقیماً از شکل معلوم است که، پاره خط قطبی قائم $n_p = NM$. در نتیجه، مرکز انحنا، همان نقطهٔ N می‌شود؛ و ازهمین جا، راه ساده‌ای برای پیدا کردن مرکز انحنای پیچ لگاریتمی، به‌دست می‌آید.

۶) کاردیوئید $r = a(1 + cos\theta)$ (شکل ۱۳۵).

در این جا $r'_\theta = -a sin\theta$، $r''_{\theta^2} = -a cos\theta$، به‌سادگی محاسبه می‌شود:

$$r^2 + r'^2_\theta = 4a^2 . cos^2 \frac{\theta}{2}$$

وضمناً

$$r'^2_\theta - r . r''_{\theta^2} = a^2(1 + cos\theta) = 2a^2 cos^2 \frac{\theta}{2}$$

وآن وقت، از رابطهٔ (۷a)، فوراً، نتیجه می‌شود:

$$R = \frac{4}{3} a cos \frac{\theta}{2}$$

که اگر عبارت پاره‌خط قطبی قائم را، برای کاردیوئید، به‌خاطر آوریم [۲۳۳، ۴)]، می‌بینیم که

$$R = \frac{2}{3} n_p$$

۷) لمینسکات $r^2 = 2a^2 cos^2 2\theta$ (شکل ۱۲۶).

در ۲۳۳، ۵) دیدیم که، دراین حالت، $\alpha = 3\theta + \frac{\pi}{2}$، به‌نحوی که $d\alpha = 3d\theta$. ولی آن وقت، از رابطهٔ (۶)، فوراً نتیجه می‌شود:

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{3}s'_\theta=\frac{1}{3}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}=\frac{1}{3}n_p=\frac{2a^2}{3r}$$

و وقتی که قائم برلمینسکات را رسم کنیم، می‌توانیم مرکز انحنای آن را پیدا کنیم.

۸) سهمی $y^2=2px$.

با استفاده از روش مشتق‌گیری از تابع‌های ضمنی، مستقیماً، به‌دست می‌آید:

$$yy'_x=p,\quad yy''_{x^2}+y'^2_x=0\Rightarrow y^3\cdot y''_{x^2}=-p^2$$

حالا، از روی رابطهٔ (7a)، پیدا می‌کنیم:

$$R=\frac{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}=\frac{[y^2+(yy'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y^3\cdot y''_{x^2}}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p^2}\quad(y>0)$$

اگر پاره خط قائم $n=\sqrt{y^2+p^2}$ را به‌یادآوریم [۲۳۱، ۱)]، نتیجه می‌گیریم:

$$R=-\frac{n^3}{p^2}$$

۹) بیضی و هذلولی $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$.

اگر، از این برابری، دوبارمشتق بگیریم:

$$\frac{x}{a^2}\pm\frac{yy'_x}{b^2}=0\Rightarrow yy'_x=\mp\frac{b^2x}{a^2}$$

وسپس

$$y\cdot y''_{x^2}=\mp\frac{b^2}{a^2}y'^2_x\text{ یا }y^3\cdot y''_{x^2}=-\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\right)=-\frac{b^4}{a^2}$$

و از آن جا

$$R=\frac{-(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}\qquad(y>0)$$

قبلاً [۲۳۱، ۲)]، برای پاره خط قائم دراین حالت، داشتیم:

$$n=\frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{a^2}$$

و بنابراین

$$R=-\frac{a^{۲}}{b^{۴}}n^{۳}$$

معلوم است که، چه برای بیضی و چه برای هذلولی، نیم پارامتر p، این طور بیان می‌شود: $p=\frac{b^{۲}}{a}$. به‌این جهت، در این جا هم، همان عبارت نهائی سهمی، برای R به‌دست می‌آید.

برای هرسه مقطع مخروطی، شعاع انحنا، متناسب است با مکعب پارهٔخط قائم.

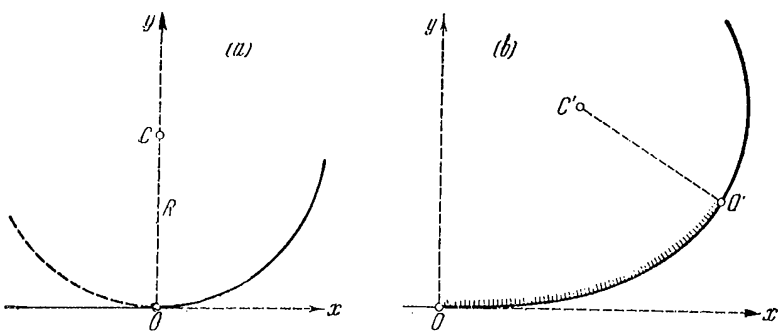
۱۰) درپایان، چندکلمه‌ای هم، دربارهٔ یك مسالهٔ عملی، صحبت می‌کنیم. در این مساله، ازتغییرانحنا درطول منحنی، استفاده می‌شود. صحبت برسر، به‌اصطلاح، منحنی‌های انتقالی است، که برای ساختن پیچ‌های راه‌آهن، به‌کارمی‌روند.

درمکانیك ثابت می‌شودکه، وقتی‌نقطهٔ مادی، روی یك منحنی حرکت می‌کند، نیروی گریزازمرکزی پدیدار می‌شودکه مقدارآن، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F=\frac{mv^{۲}}{R}$$

که در آن، m ــ جرم نقطه، v ــ سرعت حرکت آن و R ــ شعاع انحنای منحنی در نقطهٔ مفروض آن است.

اگرقسمت مستقیم‌الخط راه‌آهن، مستقیماً، به‌پیچی وصل شده باشدکه‌کمانی ازیك دایره‌را تشکیل‌می‌دهد (شکل۱۵۹ــa)،آن‌گاه، ضمن عبور ازپیچ، نیروی گریزازمرکزآنی به‌وجود می‌آید وموجب تکان‌های شدید وناگهانی خطرناك برای «مجموعهٔ جسم متحرك»و برای ساختمان فوقانی راه می‌شود. برای فرار ازاین وضع، قسمت مستقیم‌الخط راه را،



شکل ۱۵۹

به‌کمك یك منحنی انتقالی، به‌قسمت دایره‌ای، وصل می‌کنند (شکل ۱۵۹–b). درطول این منحنی انتقال، شعاع انحنا به‌تدریج پایین می‌آید؛ وازمقدار بی‌نهایت–درنقطهٔ اتصال باقسمت‌منحنی‌الخط – به‌مقدارشعاع‌دایره – درنقطهٔ‌اتصال باکمان‌دایره – می‌رسد؛ ومتناظر با آن، نیروی گریزهم، به‌تدریج افزایش می‌یابد.

به‌عنوان منحنی انتقالی، بیش ازهمه، ازسهمی نیم مکعبی $y=\frac{x^3}{6q}$ استفاده می‌کنند.

دراین حالت، به‌روشنی، داریم:

$$y'=\frac{x^2}{2q},\quad y''=\frac{x}{q}$$

وبرای شعاع انحنا، این عبارت به‌دست می‌آید:

$$R=\frac{q}{x}\left(1+\frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

به‌ازای $x=0$. داریم: $y'=0$ و $R=\infty$. منحنی درمبداء مختصات، برمحور x مماس است و دارای شعاع انحنای برابرصفراست.*

گاهی، به‌عنوان منحنی انتقال پیچ، لمینسکات هم به‌کارمی‌رود.

۲۵۳. مختصات مرکزانحنا. حالا، به‌رابطه‌هایی‌می‌پردازیم، که مختصات مرکزانحنا را، به‌ما بدهد. مختصات نقطهٔ M از منحنی را x و y، ومختصات مرکز انحنای C نظیر آن را، ξ و η می‌نامیم.

شعاع انحنای $R=MC$ (شکل ۱۵۸)، روی محورهای مختصات، درست برقائم جهت‌دار قرار می‌گیرد وبا محور x، زاویهٔ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ تشکیل می‌دهد. پاره خط MC را بر محورهای x و y، تصویرمی‌کنیم، از روی قضیهٔ اصلی نظریهٔ تصویرها، خواهیم داشت:

$$\xi-x=R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-R\sin\alpha$$

---

*) با روش‌های حساب دیفرانسیلی [۱۳۴، ۱۳۵]، به‌سادگی، ثابت می‌شودکه مقدار R، فقط‌تا $x=0/946\sqrt[3]{q}$ نزول می‌کندکه، درآن جا، مقدارمی‌نیم آن، $1/3905\sqrt[3]{q}$، به‌دست می‌آید. درعمل هم. تنها ازهمین قسمت منحنی استفاده می‌شود.

$$\xi - y = R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = R\cos\alpha$$

که از آن جا، برای مختصات مرکز انحنا، نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - R\sin\alpha\\ \eta &= y + R\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (۸)$$

با استفاده از رابطه‌هایی که قبلاً به‌دست آورده‌ایم [۲۵۱، (۶)؛ ۲۴۹، (۱۵)]:

$$R = \frac{ds}{d\alpha},\quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

و دو نتیجه، عبارت‌هایی را که هم‌اکنون به‌دست آوردیم، می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \frac{dy}{d\alpha}\\ \eta &= y + \frac{dx}{d\alpha}\end{aligned}\right\} \qquad (۹)$$

اگر، منحنی با معادله‌های پارامتری (۱) داده شده باشد، با در نظر گرفتن رابطهٔ (۴) برای α'_t، رابطه‌های (۹)، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_{tx} - x''_{tx} y'_t} y'_t\\ \eta &= y + \frac{x'^2_t + y'^2_t}{x'_t y''_{tx} - x''_{tx} y'_t} x'_t\end{aligned}\right\} \qquad (۱۰)$$

به‌طوری‌که می‌بینیم، در این جا، ξ و η هم، مثل x و y، برحسب پارامتر t بیان شده‌اند.

اگر منحنی، با معادلهٔ صریح $y = f(x)$ داده شده باشد، رابطه‌های (۱۰)، به‌صورت خاصی درمی‌آیند:

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2_x}{y''_{x^2}} y'_x,\quad \eta = y + \frac{1 + y'^2_x}{y''_{x^2}} \qquad (۱۰a)$$

رابطه‌های (۱۰) را، برای حالتی هم که منحنی با معادلهٔ قطبی $r = g(\theta)$ داده شده باشد، می‌توان به‌کار برد (با انتخاب زاویهٔ θ، به‌عنوان پارامتر).

اگر رابطه‌های (۱۰a) را، با رابطه‌هایی که ضمن حل مسألهٔ شمارهٔ ۱۳۷ (شکل ۶۲)

برای نقطهٔ مرزی قائم به‌دست آوریم، مقایسه کنیم، متقاعد می‌شویم که نقطهٔ مرزی نامبرده، همان مرکز انحنای منحنی است.

اگر رابطه‌های (۱۰a) و (۷a) را، با رابطه‌های (۲۲) و (۲۳) از شمارهٔ **۲۴۳** مقایسه کنیم، نتیجهٔ بازهم مهم‌تری به‌دست می‌آید: دایرهٔ انحنای منحنی، در نقطهٔ مفروض، چیزی جز همان دایرهٔ بوسان نیست؛ به‌زبان دیگر، دایرهٔ انحنا، عبارت است ازوضع‌حدی دایره‌ای که از سه نقطهٔ منحنی می‌گذرند، وقتی‌که، این نقطه‌ها، به سمت نقطهٔ مفروض، میل کنند.

بدون شك، این نتیجه را، می‌شد پیش‌بینی کرد: در حالتی‌که منحنی و دایره، دارای تماس مرتبهٔ دوم باشند، عرض y و دومشتق y'_x و y''_x آن‌ها، درنقطهٔ مفروض، برای هردو منحنی یکی است و، بنابراین، جهت تقعر دو منحنی و مقدار انحنای آن‌ها (که تنها به‌همین مشتق‌ها بستگی دارند)، بر هم منطبق می‌شود.

۲۵۴. گسترده و گسترنده. جست و جوی گسترنده. اگر نقطهٔ $M(x, y)$، در طول منحنی مفروض، تغییر مکان بدهد، مرکز انحنای نظیر آن $C(\xi, \eta)$، درحالت کلی، یك‌منحنی را می‌پیماید. مکان هندسی مرکز انحنای مفروض، گستردهٔ آن نامیده می‌شود بر عکس، منحنی مفروض، در رابطه با گسترندهٔ خود، گستردهٔ آن نامیده می‌شود.

رابطه‌های (۱۰) و (۱۰a) را ــ که مختصات ξ و η، مرکز انحنای C، را برحسب پارامتر t (یا x) بیان می‌کنند ــ می‌توان، به‌عنوان معادله‌های پاراهتری گسترنده، درنظر گرفت. گاهی بهتر است، پارامتر را در آن‌ها حذف کنیم و گسترنده را، با معادلهٔ ضمنی نشان دهیم:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

مثال‌ها. ۱) گسترندهٔ سهمی $y^2 = 2px$ را پیدا کنید. با استفاده از رابطه‌هائی‌که قبلاً پیدا کردیم [۲۵۲، ۸)]:

$$yy'_x = p, \quad y^3 y''_{x^2} = -p^3$$

از روی رابطهٔ (۱۰a)، مختصات مرکز انحنا را، پیدا می‌کنیم:

$$\xi = x - yy'_x \frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = 3x + p = \frac{3y^2}{2p} + p,$$

$$\eta = y + y \frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = y - \frac{y}{p^2}(y^2 + p^2) = -\frac{y^3}{p^2}$$

به این ترتیب، معادله‌های پارامتری گسترنده سهمی (که در آن، y در نقش پارامتر است)، چنین می‌شود:

$$\xi=\frac{3y^2}{2p}+p,\quad \eta=-\frac{y^3}{p^2}$$

اگر y را از این معادله‌ها حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y^2=\frac{2p}{3}(\xi-p),\quad y^3=-p^2\eta$$

و از آن‌جا، بالاخره

$$\eta^2=\frac{8}{27p}(\xi-p)^3$$

می‌بینیم که گسترندهٔ سهمی، عبارت است از سهمی نیم مکعبی (شکل ۱۶۰).

۲) گسترندهٔ بیضی $x=a\cos t$ و $y=b\sin t$ را پیدا کنید.

داریم:

$$x'_t=-a\sin t,\quad x''_{t^2}=-a\cos t,\quad y'_t=b\cos t,\quad y''_{t^2}=-b\sin t$$

با گذاشتن این مقدارها، در رابطهٔ (۱۰)، به‌دست می‌آید:

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

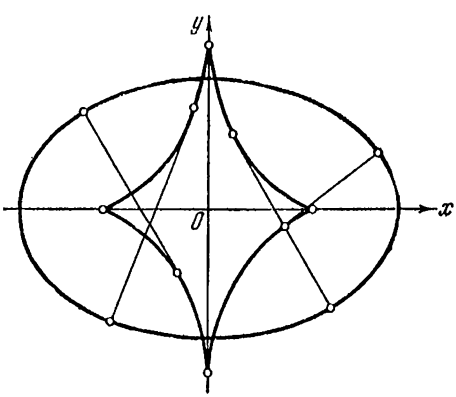
$$\eta=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

و این، نمایش پارامتری گسترندهٔ بیضی است. با حذف t، می‌توان معادلهٔ این منحنی را، به‌صورت ضمنی، به‌دست آورد:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\quad (c^2=a^2-b^2)$$

این منحنی، آستروئید را به‌خاطر می‌آورد. در واقع، می‌توان، این منحنی را، از آستروئید، با کشیدن آن در جهت قائم، به‌دست آورد (شکل ۱۶۱).

به‌همین ترتیب، می‌توان گسترندهٔ هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را به‌دست آورد (تنها، به‌جای تابع‌های مثلثاتی، باید از تابع‌های هذلولی استفاده کرد):



شکل ۱۶۰

شکل ۱۶۱

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}} \quad (c^2=a^2+b^2)$$

۳) گسترندهٔ آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را پیدا کنید.

قبلاً، در شمارهٔ **۲۵۲**، ۲)، داشتیم:

$$y'_x=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad y''_{x^2}=\left(\frac{a^2}{3x^4y}\right)^{\frac{1}{3}}$$

با گذاشتن این مقدارها، در رابطهٔ (a ۱۰)، پس از اختصار، داریم:

$$\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \qquad \eta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

از این معادله‌ها، همراه با معادلهٔ خود آستروئید، می‌توان x و y را حذف کرد:

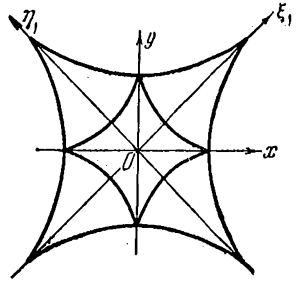
$$\xi+\eta=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3, \qquad \xi-\eta=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3,$$

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}}$$

اگر محورهای مختصات را، به اندازهٔ ۴۵ درجه، دوران دهیم، مختصات جدید ξ_1 و η_1، برحسب ξ و η، از این رابطه‌ها، به‌دست می‌آیند:

$$\xi_1=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_1=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

به‌نحوی که، در دستگاه مختصات جدید، معادلهٔ گستردهٔ مطلوب، به‌این‌صورت درمی‌آید:



شکل ۱۶۲

$$\xi_1^{\frac{2}{3}}+\eta_1^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$$

که در آن، دوباره، معادلهٔ آستروئید را می‌بینیم. بنابراین، گستردهٔ آستروئید، عبارت‌است از آستروئید دیگری که اندازه‌های آن، دو برابر آستروئید اصلی است و محورهای آن، به‌اندازهٔ ۴۵ درجه، نسبت به‌قبلی، دوران‌کرده است (شکل ۱۶۲).

۴) گستردهٔ سیکلوئید $x=a(t-sint)$، $y=a(1-cost)$ را پیدا کنید.

برای سیکلوئید می‌دانیم [۲۳۱، ۴)]:

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2},\qquad d\alpha=-\frac{1}{2}dt$$

بنابراین، راحت‌تر است که از رابطه‌های (۹) استفاده کنیم. اگر مقدار $d\alpha$ را در آن‌ها قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\xi=x+2y'_t,\qquad \eta=y-2x'_t$$

یا

$$\xi=a(t+sint),\qquad \eta=-a(1-cost)$$

با فرض $t=\tau-\pi$، این معادله‌های پارامتری را، به‌صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\xi=-\pi a+a(\tau-sin\tau),\qquad \eta=-2a+a(1-cos\tau)$$

از این جا روشن می‌شود که گستردهٔ سیکلوئید، سیکلوئید دیگری است که با سیکلوئید مفروض برابر است، ولی به‌اندازهٔ πa — به‌سمت چپ (به موازات محور x و در جهت منفی) و به‌اندازهٔ $2a$ به‌پایین (به موازات محور y و در جهت منفی) منتقل شده است.

بررسی این‌مسأله را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم، که گسترندهٔ اپی یا هیپوسیکلوئید هم، شکلی برابر با خود آن‌ها به‌دست می‌آید، که تنها، یك دوران ساده کرده‌اند.

۵) گسترندهٔ پیچ لگاریتمی $r=a.e^{m\theta}$ را پیدا کنید.

ساختمان هندسی مرکز انحنا ــ که در ۲۵۲، ۵) نشان دادیم ــ به‌سادگی به‌ما امکان می‌دهد که آن‌را، به‌مختصات قطبی r_1 و θ_1 درآوریم (شکل ۱۳۴ را ببینید).

$$r_1=n_p=r\cot g\omega=mr,\quad \theta_1=\theta+\frac{\pi}{2}$$

اگر بین این معادله‌ها، و معادلهٔ خود پیچ لگاریتمی، r و θ را حذف کنیم، معادلهٔ گسترنده به‌دست می‌آید:

$$r_1=mae^{m\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}=a_1e^{m\theta_1}$$

با دوران محور قطبی، به‌اندازهٔ زاویهٔ مناسبی، می‌توان، این‌معادله را با معادلهٔ اول، متحد قرار داد. به‌این‌ترتیب، گستردهٔ پیچ لگاریتمی، یك پیچ لگاریتمی است که از دوران اولی دور قطب، به‌دست می‌آید.

برای رسم گسترده در مورد یك منحنی مفروض، وقتی که با ویژگی‌هایی از گسترده و گسترنده آشنا شدیم، برخواهیم گشت.

۲۵۵. ویژگی‌های گسترده و گسترنده. نمایش پارامتری گسترده را، به‌صورت‌زیر داشتیم [۲۵۳، (۸)]:

$$\xi=x-R\sin\alpha,\quad \eta=y+R\cos\alpha \qquad (۸)$$

که در آن‌ها، x، y، R و α، تابع‌هایی از پارامتر هستند. وجود سه مشتق (پیوسته) از x و y نسبت به‌پارامتر، را مفروض می‌گیریم.* آن‌وقت ازعبارت‌های(۸)، می‌توان‌دیفرانسیل گرفت:

$$d\xi=dx-R\cos\alpha d\alpha-dR.\sin\alpha$$

$$d\eta=dy-R\sin\alpha d\alpha+dR.\cos\alpha$$

با توجه به‌این‌که

$$R\cos\alpha d\alpha=\frac{ds}{d\alpha}.\frac{dx}{ds}d\alpha=dx$$

*) یادآوری می‌کنیم که در R نیز، مشتق‌های دوم وارد می‌شوند.

$$R\sin\alpha d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{ds}d\alpha = dy$$

بالاخره داریم:

$$d\xi = -\sin\alpha dR, \quad d\eta = \cos\alpha dR \qquad (۱۱)$$

به قسمتی از منحنی اکتفا می‌کنیم که، در آن، R برابر صفر یا بی‌نهایت نباشد و، علاوه بر آن، dR هم مساوی صفر نشود. به‌این ترتیب، نقطه‌های خاص، چه روی منحنی مفروض و چه روی گسترندهٔ آن (با توجه به $dR\neq ۰$) وجود نخواهد داشت. بنابراین، شعاع انحنای R، به‌طوریکنوا تغییرمی‌کند: یا صعودی‌است و یا نزولی.

اگر رابطه‌های (۱۱) را، یکی بر دیگری تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\cot g\alpha = -\frac{۱}{tg\alpha} = -\frac{۱}{\frac{dy}{dx}}$$

به‌نحوی که، ضریب زاویه‌های مماس بر گسترنده و گسترده، عکس قرینهٔ یکدیگرمی‌شوند و خود مماس‌ها، برهم عمودند. بنابراین

۱°. قائم برگسترده، (در مرکز انحنا) مماس بر گسترنده است.

خانوادهٔ قائم‌های برگسترده را در نظر می‌گیریم: این خانواده، بستگی به‌یك‌پارامتر دارد (مثلاً، به‌پارامتری که، به‌وسیلهٔ آن، موضع نقطه برمنحنی، مشخص‌می‌شود). از آن‌چه ثابت شد، روشن می‌شود که: گسترنده عبارت است از پوش این خانوادهٔ قائم‌ها.

به‌عنوان تمرین، به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم که با آغاز از معادلهٔ قائم

$$(X-x)x'_t + (Y-y)y'_t = ۰$$

(که در آن x، y، x'_t و y'_t، شامل t هستند)، با روش‌های شمارهٔ **۲۳۸**، پوش را پیدا کند، و به‌این‌ترتیب، ازراه دیگری، ثابت‌کندکه این پوش، همان گسترندهٔ (۱۰) است. همچنین، می‌توان ثابت کرد که: مرکز انحنا، همان نقطهٔ مفسر قائم است، یعنی، مرکز انحنا، عبارت است از وضع حدی نقطهٔ برخورد قائم بی‌نهایت نزدیك به‌آن.

حالا، به‌بررسی کمان σ برگسترنده می‌پردازیم. با مربع کردن برابری‌های (۱۱) و جمع کردن آن‌ها ــ با در نظرگرفتن دستور (۱۱) شمارهٔ **۲۴۸** برای دیفرانسیل کمان ــ نتیجه می‌گیریم:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2$$

از آن‌جا

$$d\sigma = \pm dR \qquad (۱۲)$$

و یا (با توجه به‌این‌که $dR \neq 0$)

$$\frac{d\sigma}{dR} = \pm 1$$

از آن‌جاکه، این نسبت، تابع پیوسته‌ای از پارامتر است و، در نتیجه، نمی‌تواند از مقدار ۱ — به‌مقدار ۱ + (بدون عبور از مقدارهای بینابینی) جهش کند، بنابراین، مقدار آن، برای تمامی قسمت، برابر با یکی از این عددهاست. به‌زبان دیگر، در سمت راست برابری (۱۲)، برای تمامی قسمت، تنها یکی از علامت‌ها ــ مثبت یا منفی ــ وجود دارد.

این علامت، بستگی به‌جهتی دارد، کـه برای محاسبهٔ کمان روی گسترنده، انتخاب می‌کنیم. اگر آن‌را طوری انتخاب کنیم که، کمان σ وشعاع انحنای R، باهم‌صعودی باشند، در آن‌صورت، دررابطهٔ (۱۲)، باید علامت مثبت‌را اختیار کرد. ولی اگر σ درجهتی صعودی باشدکه، در آن‌جا، R نزولی است، درآن‌صورت، با علامت منفی سروکار خواهیم داشت.

حالت اول را در نظر می‌گیریم، آن‌گاه

$$dR = d\sigma \Rightarrow R - \sigma = c = \text{const.} \qquad (۱۳)$$

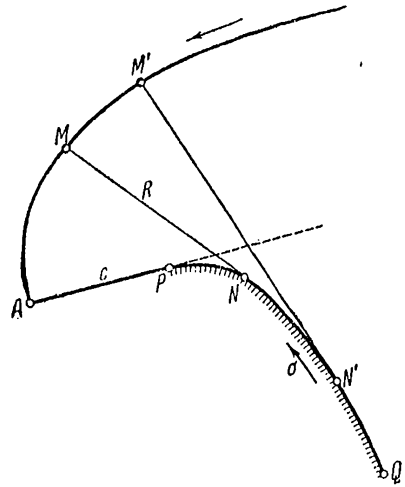
و نتیجه می‌گیریم که

۲°. تفاضل شعاع انحنا با کمان گسترنده، مقدار ثابتی است.

به این ترتیب، تفاضل شعاع‌هـای انحنا، در دو نقطهٔ گسترده، برابر است بـا کمان گسترنده، در فاصلهٔ بین مرکز انحناهای نظیر. از این‌جا، ضمناً، روش بسیار جالبی، برای برآوردکمان گسترنده، پیدا می‌شود.

این ویژگی گسترنده، تعبیر مکانیکی جالبی دارد. برای این‌که، شرح آن ساده شود، فرض می‌کنیم که شعاع انحنای R (که مخالف صفراست)، دربخش مورد بررسی، علامت ثابتی را اختیار کند و همه‌جا مثبت باشد. برای ایـن منظور، می‌توان، برای محاسبهٔ کمان روی گسترنده، جهت مناسبی انتخاب کرد. به‌جز این، اگر محاسبهٔ کمان روی‌گسترنده را، از نقطهٔ P، که متناظر باکمترین شعاع انحناست، آغـازکنیم، خواهیم داشت: $\sigma > 0$. با این شرط‌ها، مقدار ثابت c ــ در برابری (۱۳) ــ نیز مثبت خواهد بود.

حالا فرض می‌کنیم‌که نخ نرمی ــ کـه حالت‌کشسان نداشته باشد ــ روی گسترنده،



شکل ۱۶۳

ازانتهای Q تامبداء P، پیچیده شده‌باشد (شکل ۱۶۳). این‌نخ، ازنقطهٔ مبداء P، به‌صورت مماس بر گسترنده، خـارج می‌شود، و به‌فاصلهٔ c از P، در نقطهٔ نظیر A، از گسترده جدا می‌شود. نخی‌را که به‌گسترنده پیچیده شده‌است، باحفظ حالت کشیدهٔ آن، بازمی‌کنیم. فرض کنیم QNM، وضع نامشخصی از آن باشد. چـون NM، از $PA=c$، درست به‌اندازهٔ کمان $\widehat{PN}=\sigma$ بزرگتر است، بنابراین، NM، شعاع انحنای R می‌شود، یعنی نقطهٔ M برگسترده قرار دارد.

به‌این ترتیب، گسترده را می‌توان، ازراه بازکردن نخی، که قبلاً* برگسترنده پیچیده شده است، به‌دست آورد.* به‌زبان دیگر، می‌توان گفت: گسترده عبارت است از مسیر نقطهٔ A از خط AP، وقتی‌که خط مماس، بدون لغزش، برگسترنده، حرکت کند.

در خاتمه، رابطه‌ای برای محاسبهٔ ρ، شعاع انحنای گسترنده، می‌آوریم.

اگر زاویهٔ بین مماس برگسترنده با محور x را، β بنامیم، به روشنی داریم:

$$\beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2},\qquad d\beta=d\alpha \tag{۱۴}$$

بنابراین [(۱۳) و (۱۴) را ببینید]:

$$\rho=\frac{d\sigma}{d\beta}=\frac{dR}{d\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}\frac{dR}{ds}=R\frac{dR}{ds} \tag{۱۵}$$

*) از همین‌جا، می‌توان به‌سرچشمهٔ نام‌گذاری گسترده و گسترنده پی برد.

لازم به‌یادآوری است که در این رابطه، فرض بر این است که σ و S، باهم‌صعودی هستند. در حالت عکس، باید در سمت راست تساوی، علامت منفی گذاشته شود.

اگر، ضمناً، فرض کنیم که σ و s، باهم‌صعودی هستند، رابطه‌را می‌توان به‌این‌صورت، نوشت:

$$\rho = R\left|\frac{dR}{ds}\right| \qquad (۱۶)$$

و به‌این ترتیب، دو حالت $\frac{dR}{ds} > 0$ (که R و s با هم صعودی‌اند) و $\frac{dR}{ds} < 0$ (باصعود R، مقدار s نزول می‌کند).

۲۵۶. جست و جوی گسترده. دیدیم که می‌توان، هرگسترده را از روی گسترندهٔ خود، با بازکردن نخی که روی‌گسترنده پیچیده شده‌است، به‌دست‌آورد؛ ویا، هم‌ارز آن، از راه غلتاندن (بدون لغزش) خط راست برروی‌گسترنده.

حالا، حکم عکس را ثابت می‌کنیم: اگر خط راستی (بدون لغزش)، روی منحنی مفروضی بغلتد، مسیر یك نقطهٔ غیرمشخص آن، گستردهٔ منحنی مفروض را خواهد داد [که، به‌این ترتیب، برای هر منحنی، مجموعه‌ای نامتناهی گسترده، وجود دارد].

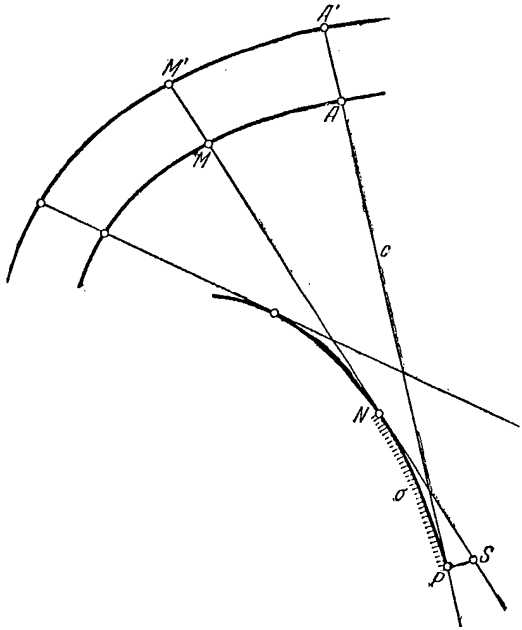
منحنی PN را با معادله‌های پارامتری، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶۴):

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t)$$

ضمناً، فرض‌می‌کنیم که φ و ψ، دارای‌مشتق‌های پیوسته، تا مرتبهٔ دوم باشند. همچنین، فرض می‌کنیم که در قسمت مورد بررسی منحنی، نقطهٔ تکراری و، به‌طورکلی، نقطه‌های خاص، وجود نداشته باشند. کمان σ، از منحنی را، از نقطهٔ P در نظر می‌گیریم.

روی مماس در نقطهٔ P، در جهت صعود کمان، نقطهٔ دلخواه A را انتخاب می‌کنیم و فاصلهٔ آن را از P (با درنظرگرفتن علامت)، c می‌نامیم. حالا، مسیر نقطه A را، وقتی که خط PA (بدون لغزش) روی منحنی مفروض می‌غلتد، دنبال می‌کنیم. در وضع جدید خط، وقتی که N نقطهٔ تماس می‌شود، نقطهٔ P به S و نقطهٔ A به M می‌رود؛ معلوم است که: $SN = \overset{\frown}{PN} = \sigma$، به نحوی که داریم: $NM = c - \sigma$. اگر مختصات نقطه‌های N و M را با (ξ, η) و (x, y)، و زاویهٔ بین خط SN و محور x را، با β نشان دهیم، آن‌گاه، با تصویرکردن پاره‌خط NM بر محور، بدون زحمت، به‌دست می‌آید:

$$x = \xi + (c - \sigma)\cos\beta, \quad y = \eta + (c - \sigma)\sin\beta \qquad (۱۷)$$



شکل ۱۶۴

و همین معادله‌ها، عبارتند از نمایش پارامتری مسیر مطلوب.

با دیفرانسیل‌گیری از آن‌ها، داریم:

$$dx = d\xi - \cos\beta d\sigma - (c-\sigma)\sin\beta d\beta$$

$$dy = d\eta - \sin\beta d\sigma + (c-\sigma)\cos\beta d\beta$$

چون [۲۴۹، (۱۵) را ببینید]:

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \sin\beta = \frac{d\eta}{d\sigma} \qquad (۱۸)$$

این نتیجه‌ها، ساده‌تر می‌شود:

$$dx = -(c-\sigma)\sin\beta d\beta, \quad dy = (c-\sigma)\cos\beta d\beta$$

حالتی را که $d\beta = 0$ یا $\sigma = c$، استثنا می‌کنیم.* اگر این رابطه‌ها را عضو به عضو، برهم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

*) این‌ها، نظیر نقطه‌های خاص، روی منحنی رسم شده‌اند.

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = -cotg\beta = -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}$$

از این‌جا، روشن می‌شود که، مماس‌های هر دو منحنی، متقابلاً بر هم عمودند، به‌نحوی‌که منحنی مفروض، در واقع، عبارت است از پوش خانوادهٔ قائم‌های منحنی‌رسم شده، یعنی گستردهٔ آن. به‌این ترتیب، منحنی رسم شده، گستردهٔ منحنی مفروض است. همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به‌عنوان مثال، برای به‌دست آوردن گسترده، از راه فوق، می‌توان همان نمونه‌هایی را که در مورد گستردهٔ دایره داشتیم [۲۲۵، ۸)؛ با ۲۵۲، ۴) مقایسه کنید]، به‌خاطر آورد.

MATH75.IR

ضمیمه

مسألهٔ گسترش تابع‌ها

۲۵۷. حالت تابع با یك متغیر. تابع $f(x)$ را در نظر می‌گیریم، که در یك بازهٔ (متناهی یا نامتناهی) $\mathfrak{D}$ ــ یا، کلی‌تر، درحوزهٔ $\mathfrak{D}$، که از تعداد متناهی این گونه بازه‌ها، تشکیل شده باشد ــ تعریف شده است. اگر تابع $f(x)$ در $\mathfrak{D}$ پیوسته باشد و دارای مشتق‌های پیوسته تا خود مرتبهٔ nام ($n \geqslant 1$)، در این حوزه، باشد، درآن صورت، می‌گویند که تابع، در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، به‌طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ تعلق دارد.

ضمناً، یادآوری می‌کنیم که، اگر انتهای یکی از بازه‌ها، در ترکیب آن داخل شده باشد، آن‌گاه، دراین نقطه، باید مشتق یك‌طرفه* را، در نظر گرفت.

فرض می‌کنیم که، تابع $f(x)$، درحوزهٔ $\mathfrak{D}$، بدون این‌که تمامی محور عددی را در بر گرفته باشد، به‌طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، تعلق داشته باشد. فرض می‌کنیم که در یك حوزهٔ $\mathfrak{D}^*$ شامل $\mathfrak{D}$، تابعی مثل $f^*(x)$، بازهم از طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ وجود داشته باشد که، در بخش مشترك $\mathfrak{D}$ و $\mathfrak{D}^*$، بر $f(x)$ منطبق باشد. در چنین صورتی، تابع f^*، گسترش تابع f را روی $\mathfrak{D}^*$، با حفظ طبقهٔ $\mathcal{C}^n$، تحقق می‌دهد.

آیا چنین گسترشی برای تابع، در حوزهٔ وسیع‌تر، همیشه ممکن است؟ قضیهٔ زیر، بداین پرسش، پاسخ می‌دهد.

قضیه. هر تابع $f(x)$ طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، در حوزهٔ بستهٔ $\mathfrak{D}$**، می‌تواند روی تمامی محور عددی $\mathfrak{D}^* = (-\infty, +\infty)$، باحفظ طبقه، گسترش پیداکند.

ثابت می‌کنیم که، دراین‌جا، گسترش به‌طور ساده، به‌کمك چندجمله‌ای‌های صحیح،

---

*) یا، به این ترتیب هم می‌توان گفت (که با شرط‌های مفروض، با بیان بالا هم‌ارز است)، مقدارهای حدی، برای مشتق‌ها، وقتی، که به‌انتهای بازه، ازهمان سمت بازه، نزدیك می‌شویم.

**) یعنی، تشکیل‌شده، از یك یا چند بازهٔ بسته. به‌صورت $[a, b]$، $[a, +\infty[$ و $]-\infty, b]$.

انجام می‌گیرد. برای این منظور، قبلا، نکته‌ای را یادآوری می‌کنیم.

همان‌طور که در ۱۲۳ دیدیم، چندجمله‌ای درجهٔ nام

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-\alpha)+\frac{c_2}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots+\frac{c_n}{n!}(x-\alpha)^n \qquad (1)$$

و n مشتق اول آن، در نقطهٔ $x=\alpha$، به ترتیب، مقدارهای c_0، c_1، c_2، ...، c_n را اختیار می‌کنند.

حالا فرض می‌کنیم که بخواهیم، چنان چندجمله‌ای بسازیم که، به جز این‌که در شرط‌های سابق مربوط به‌نقطهٔ $x=\alpha$صدق می‌کند، ضمناً، در نقطهٔ دیگر $x=\beta$ هم، همراه با n مشتق اول خود، به ترتیب، برابر با مقدارهای مفروض d_0، d_1، d_2، ...، d_n باشد. چندجمله‌ای مطلوب را، به‌صورت زیر، اختیار می‌کنیم:

$$p(x)+(x-\alpha)^{n+1}q(x) \qquad (2)$$

که در آن، $p(x)$، همان‌چندجمله‌ای (۱)، و $q(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ n است. $q(x)$ را هرجور انتخاب کرده باشیم، چندجمله‌ای (۲)، در نقطهٔ $x=\alpha$، با شرط‌های موردنظر سازگار می‌شود. از چند جمله‌ای (۲)، nبار متوالی مشتق می‌گیریم و، سپس، در این چندجمله‌ای ومشتق‌های متوالی آن، $x=\beta$ می‌گذاریم. اگرمقدارهای حاصل را به‌ترتیب، برابر d_0، d_1، d_2، ...، d_n قرار دهیم، به‌دستگاهی از معادله‌های خطی، نسبت به $q(\beta)$، $q'(\beta)$، $q''(\beta)$، ...، $q^{(n)}(\beta)$ می‌رسیم، که از آن‌ها، خود این مقدارها به‌دست می‌آیند. از روی این مقدارها، و با استفاده از رابطه‌ای شبیه (۱)، بدون زحمت، خود $q(x)$ پیدا می‌شود [با ۱۳۰ مقایسه کنید].

حالا، به‌اثبات حکم موردنظر می‌پردازیم. فرض‌کنیم، در حالت کلی، حوزهٔ $\mathscr{D}$ از بازه‌های بستهٔ $\mathscr{D}_k$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ ــ که از چپ به‌راست شماره‌گذاری شده است ــ تشکیل شده باشد. با فرض این‌که، دراین بازه‌ها، $f=f^*$ باشد، تعریف آن را، به ترتیب زیر، تکمیل می‌کنیم. اگر انتهای چپ a_1 از بازهٔ $\mathscr{D}_1$، عددی متناهی باشد، آن‌گاه برای $x<a_1$، تابع f^* را، به‌ازای

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ \ldots,\ c_n=f^{(n)}(a)$$

برابر با چند جمله‌ای شبیه (۱) می‌گیریم. به‌همین ترتیب، می‌توان تابع f را، از سمت راست x_m گسترش داد، تنها اگرانتهای راست b_m این بازه، عددی متناهی باشد. بالاخره، دربازهٔ (b_k, a_{k+1}) $(k=1, 2, \ldots, m-1)$، که $\mathscr{D}_k$ را از $\mathscr{D}_{k+1}$ جدا می‌کند، f^* را با چنان چندجمله‌ای متحد می‌گیریم که، همراه با n مشتق خود، در هر دو نقطهٔ $x=b_k$ و

$x=a_{k+1}$، همان مقدارهای تابع f و مشتق‌های آن را اختیار کند. حالا، بدون زحمت، دیده می‌شود که تابع f^* طوری معین شده است که گسترش مطلوب را، در تمامی حوزهٔ $\mathscr{D}^*=(-\infty, +\infty)$، به‌دست می‌دهد.

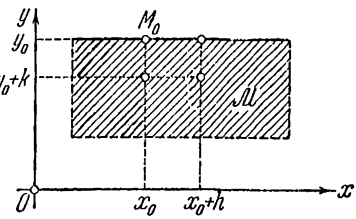
۲۵۸. طرح مساله، برای حالت دوبعدی. با عبور به تابع‌های باچند متغیر، وضع، یکباره بغرنج می‌شود. ما دراین جا، به‌حالت دو متغیر اکتفا می‌کنیم: نتیجه‌هایی که دراین حالت به‌دست می‌آید، برای حالت با هر تعداد دلخواه متغیر هم، درست است.

حوزهٔ $\mathscr{M}$ درفضای دوبعدی را درنظر می‌گیریم. این حوزه، می‌تواند باز باشد، یا بابخشی ازمرز $\mathscr{L}$ به‌آن پیوسته باشد ویا تمامی مرز جزوآن باشد (درحالت اخیر، باحوزهٔ بسته، سروکار خواهیم داشت).

برای این‌که دراین حالت، تعریف تابع طبقهٔ $\mathscr{C}^n(n\geqslant 1)$ را بدهیم، با دشواری خاصی، روبه‌رو می‌شویم. مساله این است‌که در نقطهٔ واقع برمرز $\mathscr{L}$ حوزه، ممکن است، نتوان خود تعریف مشتق نسبی ــ از این یا آن نوع ــ را به‌کار برد. مثلا، اگر حوزهٔ $\mathscr{M}$، عبارت از دایرهٔ $x^2+y^2\leqslant 1$ باشد، در آن صورت، در نقطه‌های $(1, 0)$، $(0, \pm 1)$، نمی‌توان دربارهٔ مشتق نسبی، نسبت به x، صحبت کرد. زیرا، به‌ازای $y=\pm 1$، هیچ‌گونه نموی به‌مقدار $x=0$ نمی‌توان داد که، بلافاصله، ازمحدودهٔ حوزه‌ای‌که تابع درآن قرار دارد، خارج نشود. به‌همین‌ترتیب، درنقطهٔ $(0, \pm 1)$، مشتق نسبی، نسبت به y، معنایی ندارد.

وقتی کــه دربارهٔ مشتق نسبی (از مرتبه و نوع معین) پیوسته در حوزهٔ $\mathscr{M}$ صحبت می‌کنیم، شرط می‌کنیم که مشتق، در نقطهٔ مرزی M_0، عبارت است از همان مشتق درنقطهٔ درونی M، وقتی که M به‌سمت M_0 میل می‌کند، اعم از این که، این مقدار، عملاً نقش مشتق را، درآن نقطه، داشته یا نداشته باشد.

ازتوضیح بعدی روشن می‌شودکه مقدار حدی مذکور ــ درموردهای بسیارزیادی ــ واقعاً، همان مشتق خواهد بود، تنها به‌شرطی که وضع نقطهٔ M_0 نسبت به‌حوزه، اجازه‌بدهد که، به‌طورکلی، دربارهٔ مشتق از نوع مورد بررسی، صحبت شود. ضمناً، این حقیقت را، هم‌اکنون، درمورد ساده‌ترین حالت حوزه، یعنی حوزهٔ مستطیلی، ثابت می‌کنیم.



شکل ۱۶۵

فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، همراه با همهٔ مشتق‌های تا خود مرتبهٔ n $(n \geqslant 1)$، در یك مستطیل $\mathscr{M}$، پیوسته باشند و نقطهٔ $M_0(x_0, y_0)$، برپاره خط $y = y_0$، مرز این مستطیل و وارد در ترکیب آن، باشد (شکل ۱۶۵).

از مشتق f'_y آغاز می‌کنیم که، برای این مساله، به‌طور ساده، شرح داده می‌شود: بنابر رابطهٔ لاگرانژ [۱۱۲]، نسبت نموهای

$$\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x^0, y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1)$$

هم، به‌ازای $k \to 0$، به‌سمت مقدار حدی $f'_y(x_0, y_0)$ میل می‌کند و، به‌این ترتیب، مشتق، به‌معنای خاص خود، دیده می‌شود [با ۱۱۳ مقایسه کنید]. در مورد مشتق f'_x، خود نسبت نموهای نظیر آن را، به‌عنوان حد، در نظر می‌گیریم:

$$\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h}$$

ولی، عبارت آخری، دوباره، ازروی رابطهٔ لاگرانژ، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h} = f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)$$

$$(0<\theta<1)$$

که وقتی $h \to 0$ و $k \to 0$، به‌سمت مقدار حدی $f'_x(x_0, y_0)$ میل می‌کند. ازروی قضیهٔ شمارهٔ ۱۶۸، با توجه به وجود حد ساده به‌ازای $k \to 0$، این حد مضاعف، درعین حال، حد تکراری هم هست:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$

به‌نحوی که، دراین‌جا هم، عدد $f'_x(x_0, y_0)$، که به عنوان مقدار حدی مشتق به‌دست آمد، همان مشتق واقعی است. آن چه گفته شد، در مورد مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر هم، درست است.

به‌این ترتیب، و با توجه به‌شرطی که آوردیم، می‌توان دربارهٔ مشتق‌های پیوسته، در هر حوزهٔ دلخواه $\mathscr{M}$، با هرنوع رابطه‌ای که نسبت به نقطه‌های مرزی خود (و داخل در

ترکیب آن) داشته باشد، صحبت کرد. تابع $f(x, y)$: در حوزهٔ دوبعدی $\mathcal{M}$، وقتی به‌طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ تعلق دارد که، این تابع در $\mathcal{M}$، پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته از هرنوع وهرمرتبهٔ nام باشد. فرض کنیم، حوزهٔ $\mathcal{M}$ شامل تمامی‌صفحه نباشد، اگر دریك‌حوزهٔ $\mathcal{M}^*$، متکی بر $\mathcal{M}$، تابع f^* ازهمین‌طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ وجود داشته‌باشد، که در بخش‌مشترك $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ بر f منطبق‌شود، آن‌گاه خواهیم گفت که این‌تابع، گسترش تابع f را روی $\mathcal{M}^*$ ــ با حفظ طبقه به‌دست‌می‌دهد. دراین‌جا هم، طبیعی است که این‌پرسش پیش آید: آیا همیشه، چنین گسترشی برحوزه‌های وسیع‌تر، و به‌خصوص برصفحه، ممکن است؟ به‌طوری که نشان خواهیم داد، درمورد حوزهٔ بستهٔ $\mathcal{M}$، می‌توان، به‌این پرسش پاسخ مثبت‌داد، تنها اگردورهٔ آن در بعضی شرط‌های ساده صدق کند. ضمناً، برای سادگی کار، حوزهٔ $\mathcal{M}$ را، محدود می‌گیریم، اگرچه، حکم مفروض برای حوزه‌های نامحدود هم درست است.

این نتیجه‌گیری‌ها، در اساس، به «وایت‌نی» (H. Whitney) و «هس تنسن» (W. R. Hestenes): تعلق دارد.

۲۵۹. گزاره‌های کمکی. برای اثبات قضیهٔ اصلی، قبلاً، چند پیش قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش قضیهٔ I. فرض‌کنیم، تابع $\varphi(u, v)$، ازطبقهٔ $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ درحوزهٔ $\mathcal{P}$، با نابرابری‌های زیر، تعریف شده باشد:*

$$a < u < b,\quad 0 \leqslant v < \Delta$$

آن وقت گسترش $\mathcal{P}^*$ از تابع $\mathcal{P}$، با حفظ طبقه، در تمامی مستطیل زیر وجود دارد:

$$\mathcal{P}^* = (a, b;\ -\Delta, \Delta)$$

$n+1$ عدد $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ را از دستگاه $n+1$ معادلهٔ خطی زیر، تعیین می‌کنیم:

$$(-1)^k\lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2 + \cdots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1} = 1 \qquad (3)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

انجام این کار ممکن است، زیرا دترمینان دستگاه، همان دترمینان، به‌اصطلاح، واندرموند است، که برای عددهای نابرابر $1-$، $\frac{1}{2}-$، ...، $\frac{1}{n+1}-$، مخالف صفر می‌شود.

حالا در $\mathcal{P}^*$، تابع $\varphi^*(u, v)$ را به‌این ترتیب، تعریف می‌کنیم: به‌ازای $v \geqslant 0$ داشته باشیم: $\varphi^*(u, v) = \varphi(u, v)$ و به ازای $v < 0$ داشته باشیم:

---

* بازهٔ (a, b)، می‌تواند نامتناهی باشد؛ همان‌طور که عدد مثبت Δ هم، می‌تواند $+\infty$ باشد.

$$\varphi^*(u,v)=\lambda_1\varphi(u,-v)+\lambda_2\varphi\left(u,-\frac{1}{2}v\right)+\ldots+\lambda_{n+1}\varphi\left(u,-\frac{1}{n+1}v\right) \quad (۴)$$

اگر u_0، مقدار دلخواه u، از بازهٔ (a,b) باشد، در آن صورت، قبل ازهمه

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to -0}}\varphi^*(u,v)=(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1})\varphi(u_0,0)=\varphi(u_0,0)$$

(بنابر نخستین شرط، از شرط‌های (۳)، به ازای $k=0$)، به این ترتیب، پیوستگی تابع φ^*، در نقطه‌هایی ازمستطیل $\mathcal{P}^*$، که برخط $v=0$ واقع‌اند، برقرار می‌شود؛ پیوستگی آن، در بقیهٔ نقطه‌های $\mathcal{P}$ هم روشن است، حالا، به‌مسالهٔ وجود و پیوستگی مشتق‌های تابع φ^* در $\mathcal{P}^*$، می‌پردازیم. دراین‌جا هم، کافی است، تنها نقطه‌های واقع برخط $v=0$ را بررسی کنیم. برای همهٔ مشتق‌های

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\partial u^k}\quad (1\leqslant i+k\leqslant n) \quad (۵)$$

رابطهٔ حدی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to -0}}\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\partial v^k}=\frac{\partial^{i+k}\varphi(u_0,0)}{\partial u^i\partial v^k} \quad (۶)$$

برای این منظور، از برابری (۴)، i بار نسبت به u و، سپس، k بار نسبت به v $(v>0)$، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\partial v^k}=(-1)^k\lambda_1\frac{\partial^{i+k}\varphi(u,-v)}{\partial u^i\partial v^k}+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,-\frac{1}{2}v\right)}{\partial u^i\partial v^k}+\ldots$$

$$\ldots+\left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1}\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,-\frac{1}{n+1}v\right)}{\partial u^i\partial v^k}+\ldots$$

و حد آن را، وقتی $u\to u_0$ و $v\to -0$، پیدا می‌کنیم. در نتیجه بنابر برابری (۳)، به برابری (۶) می‌رسیم.

به‌این ترتیب، مقدار حدی واحدی، برای هرمشتق (۵) ــ چه درطرف $v>0$ و چه در طرف $v<0$ ــ وجود دارد، علاوه بر آن، اگر همین مقدارهای حدی را، برای مقدارهای مشتق (۵) در نقطه‌های خط $v=0$، اختیار کنیم، به‌تابعی پیوسته در تمامی $\mathcal{P}^*$ می‌رسیم. ولی نقطهٔ $(u_0,0)$، برای $\mathcal{P}^*$، یك نقطهٔ درونی است و، در این‌جا هم، مشتق

به معنای خاص خود، برای ما لازم است. در این رابطه، می‌توان، به آن‌چه در شمارهٔ پیش ثابت کردیم، استناد کرد: مقدار حدی نامبرده، درعین‌حال، مشتق واقعی است.

تابع φ^*، گسترش موردنظر تابع φ را بر $\mathcal{P}^*$، انجام می‌دهد.

پیش‌قضیهٔ II. تابع $f(x, y)$ از طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ را، در یك حوزهٔ محدود باز $\mathcal{M}$، مفروض می‌گیریم.* اگر، هر نقطه از مرز $\mathcal{L}$ این حوزه را بتوان با یك همسایگی محصور کرد، که در محدودهٔ آن، گسترش تابع f، با حفظ طبقه، ممکن باشد، آن‌گاه، چنین گسترشی، در تمامی صفحهٔ $\mathcal{E}$ ممکن است.

برای هر نقطهٔ M از حوزهٔ بستهٔ $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{L}$، یا یك همسایگی پیدا می‌شود که در آن، تابع f، معین و متعلق به طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ است، و یا یك همسایگی پیدا می‌شود، که تابع f می‌تواند، روی آن، با حفظ طبقه، گسترش یابد.** این همسایگی را، مثلاً، می‌توان به‌صورت دایرهٔ $\overline{\sigma} = \mathcal{K}(M, 3r)$، به مرکز M و شعاع $3r$، اختیار کرد. به‌این ترتیب، تمامی حوزهٔ بستهٔ $\overline{\mathcal{M}}$، نه تنها با دستگاه $\overline{\Sigma}$، که از دایره‌های $\overline{\sigma}$ تشکیل شده است، بلکه با دستگاه Σ، که از دایره‌های $\sigma = \mathcal{K}(M, r)$ ـ با شعاع‌های دوبار کوچکتر ـ تشکیل شده است، پوشانده می‌شود.

چون حوزهٔ $\mathcal{M}$، و همراه با آن $\overline{\mathcal{M}}$، محدود است، بنابراین در حالت مفروض، با استفاده از پیش‌قضیهٔ بورل [۱۷۵]، $\mathcal{M}$ هم، با دستگاه متناهی

$$\sum_m = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$$

که از Σ درآمده است، پوشانده می‌شود. در این‌جا داریم:

$$\sigma_i = \mathcal{K}(M_i, r_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

در عین‌حال دایره‌های زیر را هم، درنظر می‌گیریم:

$$\sigma_i' = \mathcal{K}(M_i, 2r_i),\ \sigma_i'' = \mathcal{K}(M_i, 3r_i)$$

به‌سادگی می‌توان، تابع‌های $h_i(M) = h_i(x, y)$ طبقهٔ $\mathcal{C}^*$ را ساخت، به‌نحوی که

$$h_i(M) = 0 \text{ (در } \sigma_i); \quad h_i(M) = 1 \text{ (در } \mathcal{E}^* - \sigma_i')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

---

*) این حوزه را، حتی یك‌پارچه (مرتبط) هم‌فرض نمی‌کنیم و ـ فعلاً ـ چیزی دربارهٔ مرزهای آن نمی‌گوییم.

**) این‌دو حالت، مربوط به آن است که: آیا نقطهٔ M، متعلق به‌حوزهٔ باز $\mathcal{M}$ است یا متعلق به مرز $\mathcal{L}$ آن.

مثلاً می‌توان ـ با روش‌های شمارهٔ **۲۵۷** ـ تابع $h(t)$ طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ را، در تمامی بازهٔ $-\infty<t<+\infty$، چنان تعریف کرد که داشته باشیم:

$$h(t)=0 \quad (t\leqslant 1) \text{ و } h(t)=1 \quad (t\geqslant 2)$$

و سپس فرض کرد

$$h_i(M)=h\left(\frac{\overline{MM_i}}{r_i}\right)$$

به‌کمک تابع‌های h_i، تابع‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$H_1=H_1(M)=1-h_1$$

$$H_i=H_i(M)=h_1h_2\cdots h_{i-1}(1-h_i) \qquad (1<i\leqslant m)$$

این‌ها هم، به طبقه $\mathscr{C}^n$ در $\mathfrak{E}$ تعلق دارند. روشن است که

$$H_j=0 \text{ (در } \sigma_i) \quad (\text{برای همهٔ } J>t) \qquad (۷)$$

$$H_i=0 \text{ (در } \mathfrak{E}-\sigma_i') \qquad (۸)$$

زیرا در σ_i، عامل h_i و در $\mathfrak{E}-\sigma_i'$، عامل h_i-1، برابر صفر می‌شود. چون داریم:

$$H_1+H_2+\cdots+H_i=(1-h_1)+h_1(1-h_2)+\cdots$$
$$\cdots+h_1h_2\cdots h_{i-1}(1-h_i)=1-h_1h_2\cdots h_i$$

بنابراین

$$H_1+H_2+\cdots+H_i=1 \quad (\text{در } \sigma_i) \qquad (۹)$$

زیرا، در آن‌جا، عامل h_i برابر صفر است.

حالا، فرض می‌کنیم، φ_i در σ_i''، با تابع f یا گسترش یافتهٔ آن ـ که در بالا یادآوری شد ـ منطبق باشد؛ در بیرون σ_i''، فرض می‌کنیم: در نقطه‌های $\mathfrak{M}$ داشته باشیم $\varphi_i=f$ و در سایر نقطه‌ها $\varphi_i=0$. تابع φ_iH_i در $\mathfrak{E}-\sigma_i'$ برابر صفر می‌شود [(۸) را ببینید] و، به‌روشنی در تمامی صفحهٔ $\mathfrak{E}$، به طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ تعلق دارد. بالاخره، فرض می‌کنیم، در همهٔ نقطه‌های $\mathfrak{E}$ داشته باشیم:

$$f^*=\sum_{i=1}^{m}\varphi_iH_i$$

با این برابری، تابع f^*، در تمامی صفحه، تعریف می‌شود و، ضمناً، تابعی است از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$.

نقطهٔ دلخواه M از $\mathcal{M}$ را انتخاب می‌کنیم؛ این نقطه، به یك دایرهٔ σ_i تعلق دارد. چون، هر $\varphi_j(M)=f(M)$ و، در ضمن در آن نقطه [با توجه به (۹) و (۷)] داریم:

$$H_1+H_2+\cdots+H_i=1;\ H_j=0\quad (j>i)$$

بنا بر این $f^*(M)=f(M)$، و تابع f^*، همان تابع مطلوب است.

۲۶۰. قضیهٔ اساسی مربوط به گسترش. حالا در وضعی هستیم که می‌توانیم قضیهٔ مربوط به گسترش را، برای تابع با دو متغیر ــ البته، ضمن محدودیت‌هایی برای دورهٔ حوزه ــ ثابت کنیم.

منحنی هموار طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ را، به منحنی ساده و بدون نقطه‌های خاصی می‌گوئیم که با معادله‌های زیر بیان شده باشد:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (10)$$

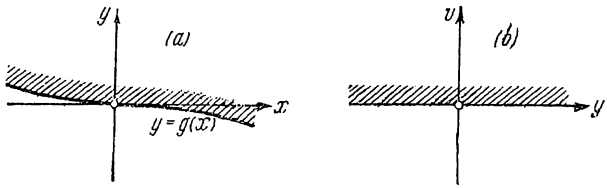
که در آن، در حوزه‌ای مثل $\mathcal{J}$ تغییر می‌کند، با این فرض که تابع‌های φ و ψ، در این بازه، به طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ تعلق داشته باشند.

قضیهٔ I. اگر تابع $f(x,y)$، به طبقه $\mathcal{C}^n$ $(n\geqslant 1)$ در حوزهٔ محدود و بستهٔ $\mathcal{M}$، تعلق داشته باشد، به‌شرطی که دورهٔ این حوزه از یك یا چند منحنی هموار (و غیرمتقاطع با یکدیگر)، از همان طبقهٔ $\mathcal{C}^n$، تشکیل شده باشد، آن‌وقت، این تابع می‌تواند، با حفظ طبقهٔ، در تمامی $\mathcal{E}$ گسترش یابد.

$M_0(x_0,y_0)$ را، نقطهٔ دلخواهی از دورهٔ $\mathcal{L}$ می‌گیریم. برای سهولت کار فرض می‌کنیم: $x_0=y_0=0$، این نقطه، روی یکی از منحنی‌های داخل در ترکیب $\mathcal{L}$ قرار دارد و، ضمناً، یك نقطهٔ عادی است. در چنین حالتی، بدون این‌که به کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که در همسایگی نقطهٔ M_0، این منحنی، با معادلهٔ صریح $y=g(x)$ بیان می‌شود که، در آن، g هم از طبقهٔ $\mathcal{C}^n$ است و حوزهٔ $\mathcal{M}$ در بالای آن قرار دارد، یعنی (در نزدیکی M_0)، با نابرابری $y\geqslant g(x)$، معین می‌شود (شکل ۱۶۶–a).

تغییر متغیر می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$x=u,\ y=g(u)+v$$



شکل ۱۶۶

ضمناً، تابع $f(x, y)$، به‌این صورت، درمی‌آید:

$$\varphi(u, v) = f(u, g(u)+v)$$

که‌درنزدیکی‌نقطهٔ $u = v = 0$، به‌خصوص، برای $v \geqslant 0$، از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$است (شکل ۱۶۶–b) دراین‌صورت، بنابر پیش قضیهٔ I، تابع φ را می‌توان، باحفظ طبقه، روی مقدارهای $v < 0$ هم گسترش داد (با این محدودیت‌که با نقطه‌های به‌قدرکافی نزدیك به‌مبداء سروکار داریم). اگراین گسترش، برای تابع $\varphi^*(u, v)$ انجام شود، آن‌وقت، با برگشتن به متغیرهای‌قدیمی به‌سادگی دیده می‌شود که تابع

$$f^*(x, y) = \varphi^*(x, y - g(x))$$

گسترش تابع f را، درهمسایگی نقطهٔ M_0، به‌دست می‌دهد.

حالا، براساس پیش‌قضیهٔ II، می‌توانیم نتیجه بگیریم‌که تابع f، حقیقتاً، گسترش با حفظ طبقه را، برتمامی صفحه $\mathscr{E}$، اجازه می‌دهد.

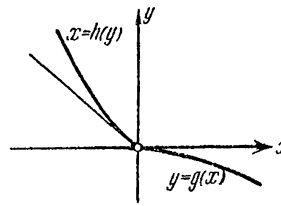
۲۶۱. تعمیم. باهمهٔ این‌ها، نتیجه‌ای‌که به‌دست‌آوردیم، برای نیازهای عملی، کافی نیست، زیرا، اغلب با حوزه‌هایی برخورد می‌کنیم‌که، در دورهٔ آن‌ها، «نقطه‌های زاویه‌ای» وجـود دارد. منحنی را، منحنی پاره هموار از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ می‌نامیم، وقتی کـه از چند کمان هموار از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ تشکیل شده باشد، به نحوی‌که هریك بـه دیگری، تحت زاویه‌ای (کـه مساوی ۰ یا π نیست)، وصل شده باشد.

قضیهٔ II. همان نتیجهٔ قضیهٔ I، دراین حالت هم به‌دست می‌آیدکه، دورهٔ $\mathscr{L}$، از یك‌یا چند منحنی پاره هموار از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$، تشکیل شده باشد.

قبلاً دیدیم، نقطهٔ دلخواه دورهٔ $\mathscr{L}$ را، که زاویه‌دار نباشد، می‌توان، بایك همسایگی محصورکرد، که درمحدودهٔ آن، گسترش تابع f، باحفظ‌طبقه، ممکن باشد. حالا، همین‌حکم را، دربارهٔ نقطهٔ زاویه‌دار $M_0(x_0, y_0)$ هم، ثابت می‌کنیم.

دراین‌جاهم، می‌توان $x_0 = y_0 = 0$ گرفت، همچنین، بدون این‌که به‌کلی‌بودن‌مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض‌کرد، کمان‌هایی‌که در مبداء به‌هم متصل شده‌اند، در این نقطه، مماس‌هایی دارندکه، یکی از آن‌هاروی جهت مثبت محورxها قرارگرفته است ودیگری با آن‌زاویه‌ای می‌سازد. (شکل ۱۶۷). درچنین حالتی، می‌توان، این کمان‌ها را، درنزدیکی مبداء، به‌ترتیب، با این معادله‌ها، بیان‌کرد:

$$y = g(x),\ x = h(y)$$



شکل ۱۶۷

ضمناً، $g'(0)=0$ است؛ تابع‌های f و g، هردو، به طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ تعلق دارند.

تغییر متغیر می‌دهیم.

$$x=u+h(v),\ y=g(u)+v \qquad (11)$$

چون ژاکوبین این تابع‌ها

$$J=\begin{vmatrix} 1 & h'(v) \\ g'(u) & 1 \end{vmatrix} = 1-g'(u)h'(v)$$

درنقطهٔ $u=v=0$ برابر ۱ می‌شود؛ دستگاه (۱۱)، درهمسایگی مقدارهای صفرهمهٔ آوندها امکان تبدیل یك ارزشی را پیدا می‌کند.

$$u=\lambda(x,\ y),\ v=\mu(x,\ y) \qquad (12)$$

ضمناً، تابع‌های λ و μ هم، از طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ هستند [۲۰۹].

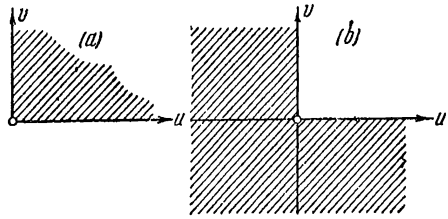
به‌ازای $v=0$ و $u\geqslant 0$، از (۱۱) نتیجه می‌شود: $y=g(x)$ و $x\geqslant 0$، به‌نحوی که قسمت مثبت محور u، متناظر است با نخستین کمان از کمان‌های نامبرده. به ترتیب مشابهی معلوم می‌شود که قسمت مثبت محور v، متناظر با دومین کمان است.

ضمناً روشن است که، تبدیل دو حوزهٔ زاویه‌ای، که، همسایگی *نقطهٔ* مبداء در صفحهٔ xy، بـه وسیلهٔ این کمان‌ها به‌آن‌ها تقسیم می‌شود، متناظر بـا دو زاویهٔ قائمهٔ «بیرونی» و «درونی» است کـه، همسایگی مبداء مختصات در صفحهٔ uv، بـه وسیلهٔ قسمت‌هـای مثبت محورهای u و v، به‌آن‌ها تقسیم می‌شود (شکل ۱۶۸–a و b).

با گذاشتن عبارت‌های (۱۱) در تابع f، تابع تبدیل شدهٔ

$$\varphi(u,\ v)=f(u+h(v),\ g(u)+v)$$

به دست می‌آوریم که، معین و متعلق به طبقهٔ $\mathscr{C}^n$ است و در این یا آن زاویهٔ قائمه ــ بسته به‌حالت ــ قرار دارد.



شکل ۱۶۸

اگر صحبت برسر زاویهٔ «بیرونی» باشد (شکل ۱۶۸ – a)، بنابرپیش قضیهٔ I،ابتدا تابع φ را در ربع چهارم دستگاه محورهـای مختصات، گسترش می‌دهیم و، سپس، تابع حاصل را (باعوض‌کردن نقش u و v)، در ربع‌های دوم و سوم هم گسترش می‌دهیم، یعنی در همسایگی‌کامل مبداء.

درحالت زاویهٔ «درونی» (شکل ۱۶۸ – b)، کار کمی بغرنج‌تر می‌شود. قبل ازهمه باتوجه به‌پیش قضیهٔ I (ولی‌باعوض‌کردن علامت u)، تابع φ را، از سمت چپ نیم‌صفحه به‌سمت راست آن گسترش می‌دهیم* و، به‌این ترتیب، تابع φ_1 را، درهمسایگی کامل‌مبداء بـه دست می‌آوریم. سپس، تابع $\psi=\varphi-\varphi_1$ را در نیم‌صفحهٔ پایینی گسترش می‌دهیم و، با استفاده از روشی که برای اثبات پیش قضیهٔ I بـه کار بردیم، آن را برنیم صفحه بالایی گسترش می‌دهیم، که، درنتیجه، تابع ψرا، بازهم درهمسایگی‌کامل مبداء، به‌دست می‌دهد. ولی‌در ربع سوم داریم: $\psi_1=\psi=\varphi-\varphi_1=0$، آن‌وقت، باهمان خصلت روش نامبرده روشن است که در ربع دوم هم $\psi_1=0$ است. حالا، اگر فرض کنیم، درهمسایگی مبداء $\varphi^*=\psi_1+\varphi_1$، آن‌گاه، درربع‌های دوم و سوم $\psi_1=0$ و $\varphi=\varphi_1$، به‌طوری‌که $\varphi^*=\varphi$ و در ربع چهارم: $\psi_1=\psi=\varphi-\varphi_1$ وبازهم $\varphi=\psi_1+\varphi_1$، $\varphi^*=(\varphi-\varphi_1)+\varphi_1$، به‌این‌ترتیب تابع φ^*، گسترش φ را، درهمسایگی‌کامل مبداء، به‌دست می‌دهد.

به‌کمك عکس تبدیل (۱۲) به متغیرهای قدیم هم، گسترش

$$f^*(x, y)=\varphi^*(\lambda(x, y), \mu(x, y))$$

تابع f به‌دست می‌آید. اثبات را، می‌توان شبیه قضیهٔ I، با استناد به پیش قضیهٔ II،انجام داد.

۲۶۲. ملاحظه‌های نهایی. قضیه‌ای را کـه دربارهٔ گسترش تابـع ثابت کردیـم،

---

*) همیشه، توجه ما، به‌نقطه‌های نزدیك به مبداء است.

کاربردهای گوناگونی دارد. در این‌جا، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یك رشته از رابطه‌ها و قضیه‌های آنالیز را، در همسایگی نقطهٔ معینی، که در مرز حوزه قرار گرفته است (و نه آن‌طور که معمولاً در نظر می‌گیرید، در درون حوزه)، تعمیم داد.

مثلاً، فرض کنید، در حوزهٔ بستهٔ $\mathcal{M}$، محدود به دوره $\mathcal{L}$ (از نوعی که در بالا داشتیم)، تابع $z=f(x, y)$، معین و همراه با مشتق‌های f'_x و f'_y، پیوسته باشد. می‌دانیم که، تنها وقتی که نقطهٔ (x_0, y_0) در درون $\mathcal{M}$ واقع باشد، رابطهٔ معلوم مربوط به نمو کامل تابع را [۱۷۸]، می‌توانیم به‌کار ببریم:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=$$

$$=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (۱۳)$$

که در آن، α و β، همراه با Δx و Δy، به سمت صفر میل می‌کنند. استدلالی را که برای اثبات این رابطه به‌کار برده‌ایم، در حالت کلی، نمی‌توان برای حالتی که نقطهٔ (x_0, y_0) بر دورهٔ حوزه قرار گرفته است، مورد استفاده قرار داد. ضمناً، این رابطه، در این حالت هم درست است، تنها اگر Δx و Δy را با شرطی به‌هم مربوط کنیم که نقطهٔ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$، از حدود $\mathcal{M}$ خارج نشود. به سادگی می‌توان به‌این نتیجه رسید، اگر ابتدا، این رابطه‌را برای تابع f^*، که گسترش f را بر تمامی صفحه می‌دهد، بنویسیم و، سپس، با اکتفا به نقطه‌های حوزهٔ $\mathcal{M}$ ــ همان‌طور که نشان داده‌ایم ــ به تابع f برگردیم.

و به‌این ترتیب، توانستیم استدلال تکمیلی محکمی، برای رابطهٔ (۱۳) به‌دست آوریم و مضمون آن‌را، تعمیم دهیم.

به‌این ترتیب، با توجه به‌فرض‌هایی که نسبت به تابع f به عمل آوردیم، این تابع، نه تنها در نقطه‌های درونی حوزهٔ $\mathcal{M}$، بلکه در نقطه‌های مرزی آن هم، مشتق‌پذیر می‌شود [۱۷۹]. در نتیجه، امکان پیدا می‌کنیم، تا دربارهٔ صفحهٔ مماس [۱۸۰] بر رویهٔ با معادلهٔ $z=f(x, y)$، حتی در نقطه‌های مربوط به دورهٔ آن هم، صحبت کنیم.

می‌دانیم که قاعدهٔ مشتق‌گیری از تابع‌های مرکب هم، بر همین رابطه، بنا نهاده شده است [۱۸۱]. اگر تابع‌های

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (t_0\leqslant t\leqslant T) \qquad (۱۴)$$

دارای مشتق باشند و نقطه‌های $(\varphi(t), \psi(t))$ همگی در درون حوزهٔ $\mathcal{M}$ واقع شوند، آن‌گاه برای تابع مرکب $z=f(\varphi(t), \psi(t))$، این رابطه را داشتیم:

$$z'_t=f'_x x'_t+f'_y y'_t$$

حالا، می‌توان این رابطه را، برای حالتی هم که «منحنی» (۱۴) کاملاً به دورهٔ حوزهٔ $\mathcal{M}$ نزدیك می‌شود، تعمیم داد. و غیره وغیره.

بدون‌این‌که، به‌جزءجزء مطلب‌وارد شویم، نمونهٔ مهم‌دیگری‌راهم می‌آوریم. دستگاه تابع‌های

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v) \qquad (۱۵)$$

را، که همراه‌بامشتق‌های خود، درحوزهٔ بستهٔ $\mathcal{P}$ برصفحهٔ uv بادورهٔ $\mathcal{K}$، پیوسته است،درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، دریك نقطهٔ (u_0, v_0) از این حوزه، ژاکوبین

$$J=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$$

مخالف صفر باشد. اگر نقطهٔ (u_0, v_0) درون $\mathcal{P}$ باشد، بنابر قضیهٔ IV شمارهٔ ۲۰۸، دستگاه تابع‌های (۱۵)، تبدیل را ممکن می‌سازد، به‌نحوی‌که درهمسایگی نقطهٔ (x_0, y_0)، که در آن‌جا داریم:

$$x_0=\varphi(u_0, v_0),\quad y_0=\psi(u_0, v_0)$$

متغیرهای u و v، با تابع‌های یك‌ارزشی از متغیرهای x و y

$$u=\lambda(x,y),\quad v=\mu(x,y) \qquad (۱۵^*)$$

بیان می‌شوند که، همراه بامشتق‌های خود،درهمسایگی نامبرده، پیوسته‌اند. به‌این‌ترتیب،اگر خود را به‌مقدارهایی از u، v، x، yمحدودکنیم که به‌اندازهٔکافی به u_0، v_0، x_0، y_0نزدیك باشند، می‌توان گفت که‌رابطه‌های (۱۵) و (۱۵*)، کاملا هم‌ارزهستند. از این مطلب، مثلاً، برای اثبات این‌حکم استفاده‌کردیم که سطح

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v)$$

که‌در آن، (u, v) درحوزهٔ $\mathcal{P}$ تغییر می‌کند، در نزدیکی نقطهٔ عادی‌آن M_0 (نظیر $u=u_0$ و $v=v_0$)، می‌تواندبامعادلهٔ صریح‌بیان‌شود [۲۲۸]. ولی درنقطه‌های‌دورهٔ سطح‌نمی‌توانستیم از این نتیجه‌گیری استفاده کنیم، زیرا در صفحهٔ uv، نقطهٔ (u_0, v_0) نمی‌تواند بر دورهٔ $\mathcal{K}$ ازحوزهٔ $\mathcal{P}$ قرارگیرد.

ولی حالا می‌توانیم، با استفاده ازگسترش‌های φ^* و ψ^* تابع‌های φ و ψ، این نتیجه را، برای تبدیل دستگاه تابع‌ها، در حالتی هم که نقطهٔ (u_0, v_0) بـر دورهٔ $\mathcal{K}$ قرار دارد،

تعمیم دهیم. بخشی از حوزهٔ $\mathcal{P}$ وصل به‌نقطهٔ (u_0, v_0)، برصفحهٔ xy متناظر است با حوزهٔ وصل به نقطهٔ (x_0, y_0)، که در محدودهٔ آن، می‌توان تبدیل را انجام داد.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان نتیجهٔ هندسی مذکور را هم، تکمیل کرد.

همین مثال‌ها کافی است تا اهمیت این‌قضیه‌ها، چه‌برای خودآنالیز و چه‌برای‌کاربرد آنالیز، برای خواننده روشن شود. درجلدهای بعد، بازهم، مثال‌هایی از کاربرد قضیه‌های مربوط به‌گسترش تابع‌ها را خواهید دید.